Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Дифференцирование абелевых функций по параметрам, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:09:35

Дифференцирование абелевых функций по параметрам

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин

Отождествим $\mathbb{C} \cup \infty$ с S^2 и рассмотрим $f(x, y, \lambda)$ – полином по x, y и λ , где x и y из S^2 и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$. Мы будем предполагать, что $f(x, y, \lambda) = 0$ задает $y(x, \lambda)$ как целую алгебраическую функцию x и голоморфную функцию λ .

Рассмотрим семейство кривых $V = \{(x, y, \lambda) \in (S^2)^2 \times \mathbb{C}^d \mid f(x, y, \lambda) = 0\}$ и проекцию $p: V \rightarrow \mathbb{C}^d$. Зафиксируем целое число $g > 0$ и обозначим через $B = B(g)$ подмножество всех точек $b \in \mathbb{C}^d$ таких, что род кривой $V_b = p^{-1}(b)$ равен g . Пусть $A(x, y, \lambda)^t = (a_k(x, y, \lambda) dx)$, $k = 1, \dots, g$, – вектор 1-форм на V , голоморфных по λ , такой, что $A(x, y, b)$ – вектор базисных дифференциалов первого рода на V_b для всех $b \in B$. Пусть V_0 – семейство кривых $V_{0b} = V_b \setminus \{\infty\}$ с выколотой точкой в бесконечности. Пусть $A^*(x, y, \lambda)^t = (a_k^*(x, y, \lambda) dx)$, $k = 1, \dots, g$, – вектор 1-форм на V_0 , голоморфных по λ , такой, что $D(x, y, b)^t = (A(x, y, b)^t, A^*(x, y, b)^t)$ – вектор базисных голоморфных дифференциалов на V_{0b} для всех $b \in B$.

ЛЕММА 1. Для произвольного векторного поля $\ell = \sum_{i=1}^d \ell_i(\lambda) \partial \lambda_i$, где $\ell_i(\lambda)$ – мероморфные функции, существует единственная матрица $\Gamma_\ell(\lambda)$ такая, что дифференциал $\ell(D(x, y, b)) + \Gamma_\ell(b) D(x, y, b)$ является точным на V_{0b} для всех $b \in B$.

Далее мы будем предполагать, что вектор $D(x, y, \lambda)$ выбран так, что его матрица периодов $\Omega(\lambda)$ удовлетворяет соотношению Лежандра $(\Omega(b))^t J \Omega(b) = 2\pi\sqrt{-1} J$ для всех $b \in B$, где $J = \begin{pmatrix} 0_g & 1_g \\ -1_g & 0_g \end{pmatrix}$. Тогда матрица $M_\ell(\lambda) = J \Gamma_\ell(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_\ell & \beta_\ell \\ \delta_\ell & \alpha_\ell \end{pmatrix}$ – симметрическая, т. е. $\alpha_\ell = \alpha_\ell^t$, $\gamma_\ell = \gamma_\ell^t$ и $\delta_\ell = \beta_\ell^t$, где $\alpha_\ell = (\alpha_{kl})$, $\beta_\ell = (\beta_l^k)$ и $\gamma_\ell = (\gamma^{kl})$ – $(g \times g)$ -матрицы. Пусть $u = (u_1, \dots, u_g) \in \mathbb{C}^g$. Положим

$$H_\ell = \alpha_{kl} \partial_{u_k, u_l} + 2\beta_l^k u_k \partial_{u_l} + \gamma^{kl} u_k u_l.$$

Здесь и ниже подразумевается суммирование от 1 до g по повторяющимся индексам.

В работе [1] построена сигма-функция $\sigma(u, \lambda)$ – единственная голоморфная функция, которая является совместной собственной функцией операторов ковариантного сдвига $S_j = \exp\{\eta_i^j(\lambda) u_i\} \exp\{\omega_{i,j}(\lambda) \partial_{u_i}\}$, где $((\omega_{i,j}(\lambda))^t, (\eta_i^j(\lambda))^t)$, $i = 1, \dots, g$, – j -й столбец матрицы $\Omega(\lambda)$, $j = 1, \dots, 2g$, и оператора $2\ell - H_\ell$ для любого мероморфного векторного поля ℓ . Положим $\zeta_k(u, \lambda) = \partial_{u_k} \log \sigma(u, \lambda)$, $k = 1, \dots, g$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ поле мероморфных функций $F(u, \lambda)$ таких, что для каждого $b \in B$ функции $F(u, b)$ образуют поле $\mathcal{F}_b$ абелевых функций с периодами, порожденными $(\omega_{1,i}(b), \dots, \omega_{g,i}(b))$, $i = 1, \dots, 2g$.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного мероморфного векторного поля $\ell = \sum_{i=1}^d \ell_i(\lambda) \partial \lambda_i$ оператор $d_\ell = \ell - \alpha_{kl} \zeta_k(u, \lambda) \partial_{u_l} - \beta_l^k u_k \partial_{u_l}$ является дифференцированием поля $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя классические результаты теории абелевых функций, можно показать, что если теорема верна хотя бы для одной непостоянной по u функции из $\mathcal{F}$, то она верна для всех функций из $\mathcal{F}$. Далее, сигма-функция удовлетворяет уравнению $\{2\ell - H_\ell\} \sigma(u, \lambda) = E_\ell(\lambda) \sigma(u, \lambda)$, где $E_\ell(\lambda)$ – мероморфная функция, которая для данного семейства кривых V полностью определяется векторным полем ℓ . Имеем: $\wp_{ij}(u, \lambda) = -\partial_{u_i, u_j} \log \sigma(u, \lambda) \in \mathcal{F}$ и $\partial_{u_i, u_j} (\sigma^{-1} \{2\ell - H_\ell - E_\ell\}(\sigma)) = -2d_\ell(\wp_{ij}) + \alpha_{kl} (\partial_{u_k, u_l} \wp_{ij} - 2\wp_{ik} \wp_{jl}) + 2\beta_k^j \wp_{ik} + 2\beta_k^i \wp_{jk} - 2\gamma_{ij} = 0 \Rightarrow d_\ell(\wp_{ij}) \in \mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формулировка теоремы в терминах связности в расслоении, ассоциированном с расслоением $p: V \rightarrow B$, дана в [2]. Дифференцирования поля эллиптических функций были впервые найдены в [3].

Рассмотрим кольцо $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ функций, голоморфных по λ . В качестве образующих кольца $\mathcal{R}$ можно выбрать $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ и $\wp_{i_1 \dots i_k}(u, \lambda) = -\partial^k \log \sigma(u, \lambda) / \partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}$, $k > 1$.

Пусть теперь $B = \mathbb{C}^d \setminus \Sigma$, где Σ – гиперповерхность, заданная неприводимым алгебраическим уравнением $\Delta(\lambda) = 0$. Пусть ℓ – голоморфное векторное поле, касательное к Σ , т. е. такое, что $\ell \log \Delta(\lambda)$ – голоморфная функция. Из общих результатов теории особенностей [4] следует, что для такого поля ℓ матрица $\Gamma_\ell(\lambda)$ голоморфна.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для поля $\ell = \sum_{i=1}^d \ell_i(\lambda) \partial_{\lambda_i}$, оператор d_ℓ является дифференцированием кольца $\mathcal{R}$.

В приложениях важную роль играют семейства V , заданные квазиоднородными полиномами $f(x, y, \lambda)$, когда существуют ненулевые наборы целых чисел $\varepsilon_f, \varepsilon_x, \varepsilon_y$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ такие, что $\varepsilon_x x \partial_x f + \varepsilon_y y \partial_y f + \sum_{k=1}^d \varepsilon_k \lambda_k \partial_{\lambda_k} f = \varepsilon_f f$. В этом случае при $\deg u_i = \varepsilon_x + \deg a_i(x, y, \lambda)$, $i = 1, \dots, g$, сигма-функция становится квазиоднородной.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть полином $f(x, y, \lambda)$ квазиоднороден и $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, \dots, d$. Тогда если $\ell = \sum_{i=1}^d \ell_i(\lambda) \partial_{\lambda_i}$ – голоморфное квазиоднородное векторное поле, касающееся Σ , и $\deg \ell > 0$, то матрица $\Gamma_\ell(\lambda)$ полиномиальна.

Пространство $H(\Sigma)$ квазиоднородных голоморфных векторных полей, касающихся Σ , является градуированным модулем над градуированным кольцом квазиоднородных голоморфных функций от λ .

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, \dots, d$, и в модуле $H(\Sigma)$ существует базис $L_1, \dots, L_{d+q}$, $q \geq 0$, такой, что $\deg L_i \geq 0$, $k = 1, \dots, d + q$. Тогда коэффициенты разложения $\sigma(u, \lambda)$ в ряд по степеням $u_1, \dots, u_g$ являются полиномами от λ .

Этот результат применим к семействам (n, s) -кривых (см. [1], [2]), в которые включаются модели всех неприводимых алгебраических кривых.

ПРИМЕР: СЕМЕЙСТВО КРИВЫХ $f(x, y, \lambda) = y^2 - 4x^{2g+1} - \sum_{k=0}^{2g-1} \lambda_k x^k$. Имеем $d = 2g$, $\varepsilon_x = 2$, $\varepsilon_y = 2g+1$, $\varepsilon_k = 2(2g+1-k)$, $k = 0, \dots, 2g-1$. Производящая функция базиса в $H(\Sigma)$ задается (см. [5]) соотношением $x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} L_{2k} \equiv \sum_{k=0}^{2g-1} f d_x^{k+1} (\partial_x f) \partial_{\lambda_k}$, где $\equiv$ обозначает сравнение по модулю идеала $(\partial_x f, \partial_y f)$ и d_x – линейный оператор на $\mathbb{C}[x]$ такой, что $d_x 1 = 0$ и $d_x x^j = x^{j-1}$, $j > 0$. Ясно, что $\deg L_{2k} = 2k$. Возьмем $a_i(x, y, \lambda) = x^{i-1}/y$, тогда $\deg u_i = -2(g-i) - 1$, $i = 1, \dots, g$.

ТЕОРЕМА 7. Базис модуля дифференцирований гиперэллиптического кольца $\mathcal{R}$ задается операторами $\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_g}$ и $d_{L_{2k}}$, $k = 0, \dots, 2g-1$. Производящая функция операторов $d_{L_{2k}}$ задается соотношением $x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} d_{L_{2k}} \equiv \sum_{k=0}^{2g-1} f d_x^{k+1} (\partial_x f) \partial_{\lambda_k} + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{i-2} x^{i-j-2} j u_j f \partial_{u_i} - \sum_{i,j=1}^g (2x^{i+j-2} \zeta_j + \frac{1}{2} x^{i+j-1} u_j \partial_x d_x^{2i}(f)) \partial_{u_i}$.

Список литературы

- [1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Функц. анализ и его прилож.*, **38:2** (2004), 12–27.
 [2] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, *The problem of differentiation of an Abelian function over its parameters*, MIMS Preprint 2006.414. [3] F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *J. Reine Angew. Math.*, **92** (1882), 311–337. [4] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, МЦНМО, М., 2004. [5] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Функц. анализ и его прилож.*, **36:4** (2002), 18–34.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
 Принято редколлегией
 01.06.2007

Д. В. Лейкин (D. V. Leikin)
 Институт магнетизма, Киев, Украина
 E-mail: dile@imag.kiev.ua