Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Штогрин, Специальные изометрические преобразования цилиндра, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:18:19

Специальные изометрические преобразования цилиндра

М. И. Штогрин

Исследуются специальные изометрические *вложения* поверхности прямого кругового цилиндра в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, см. [1]. Строение вложенной цилиндрической поверхности обладает двоякой периодичностью. В окружном направлении действует группа $G = nmt$, порожденная отражениями от плоскостей, угол между которыми равен π/n . По высоте действует группа параллельных переносов. Периодом последней может служить боковая поверхность призмы.

Возьмем вспомогательную правильную призму Π с горизонтальным $2n$ -угольным основанием и вертикальной осью. На боковой грани α_1 возьмем произвольную гладкую кривую γ_1 , однозначно проектирующуюся на ось. На смежной боковой грани α_2 построим кривую γ_2 , получающуюся из γ_1 при зеркальном отражении от плоскости β , проходящей через боковое ребро $\alpha_2 \cap \alpha_1$ и ось. Аналогично строим кривую γ_3 на грани α_3 , смежной с α_2 , и т. д. Так на каждой грани α_i получим кривую γ_i . Проведем теперь через кривые γ_1 и γ_2 цилиндрическую поверхность Z_{12} с горизонтальными образующими, перпендикулярными плоскости β . Аналогично строим цилиндрические поверхности Z_{23} , Z_{34} и т. д. Все вместе они составляют кусочно гладкую трубчатую поверхность Z с ребристыми линиями γ_i , $i = 1, \dots, 2n$.

Именно так в работе [1] построил А. В. Погорелов открытую им трубчатую поверхность Z . Она всегда изометрична прямому круговому цилиндру, см. [1; с. 51]. Постоянный периметр L всех горизонтальных сечений поверхности Z связан с радиусом r цилиндра соотношением $L = 2\pi r$. Высота цилиндра равна длине кривой $\tilde{\gamma} = \beta \cap Z_{12}$. Предположив, что кривая γ_1 на грани α_1 призмы Π , с помощью которой была получена поверхность Z , произвольным образом деформируется, но так, что длина кривой $\tilde{\gamma} = \beta \cap Z_{12}$ сохраняется, А. В. Погорелов получил такую деформацию кусочно гладкой поверхности Z , которая является геометрическим изгибанием, см. [1; с. 52]. (Этот важный факт об изометрических вложениях цилиндра следовало осветить в работе [2] в явном виде. В замечании 1 нужно было четко и ясно сказать, что в процессе изгибания поверхности T высота всех трапеций сохраняется.)

Если при изгибании в точках γ_i непрерывно уменьшать кривизну кривой, устремив ее к нулю, то кривая γ_i выпрямится в прямолинейный отрезок ℓ_i , а кусочно гладкая поверхность Z превратится в изометричную кусочно линейную поверхность $\bar{Z}$.

К краям кусочно линейной поверхности $\bar{Z}$ приклеим два выпуклых многоугольника. Получим выпуклый многогранник. Тут $\ell_j \cap \ell_i = \emptyset$, $j \neq i$. В любой вершине сходятся три плоских угла φ , $\pi - \varphi$ и $\pi - \pi/n$. В силу неравенств треугольника имеем

$$\frac{\pi}{2n} < \varphi < \pi - \frac{\pi}{2n}. \quad (*)$$

Этим же неравенствам удовлетворяет и переменный угол, который составляет кривая γ_i в любой своей точке с той или иной прямолинейной образующей, проходящей через данную точку в случае произвольной кусочно гладкой поверхности Z .

Разрежем цилиндр Z_{2n-1} плоскостью симметрии, т. е. одной из n плоскостей симметрии поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, и развернем поверхность Z на евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Получим развертку кусочно гладкой поверхности Z в виде некоторого прямоугольника $R \subset \mathbb{R}^2$, обладающего парой эквивалентных сторон. Обе стороны имеют один и тот же образ на поверхности Z при изометрическом отображении $f: R \rightarrow Z$. Так как отображение f сохраняет углы, то развертка R наследует условия (*).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00170), программы «Ведущие научные школы» (проект НШ-4182.2006.1) и государственной программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики».

Пусть развертка R кусочно гладкой поверхности Z расположена на плоскости $\mathbb{R}^2$ так, что прообразы всех прямолинейных образующих поверхности Z находятся на горизонтальных прямых. Тогда неравенства (*) означают, что график прообраза гладкой кривой γ_i на плоскости $\mathbb{R}^2$ является *не слишком пологим*. Прообразы следов плоскостей зеркальной симметрии на трубчатой поверхности Z суть вертикальные отрезки. Они разбивают развертку R на $2n$ фундаментальных прямоугольников – прообразов фундаментальных областей группы $G = n\tau\tau$. В каждом прямоугольнике имеется прообраз своей гладкой кривой γ_i , взятой на грани α_i призмы Π .

ТЕОРЕМА. Любая не слишком полая (см. (*)) гладкая кривая τ_1 , расположенная на развертке R внутри заданного фундаментального прямоугольника, является прообразом некоторой гладкой кривой γ_1 , взятой на грани α_1 призмы Π и порождающей кусочно гладкую поверхность Z , построенную методом А. В. Погорелова.

Пусть $\bar{Z}$ и Z изометричны. Тогда их развертки можно наложить друг на друга.

СЛЕДСТВИЕ. Не слишком полая вариация прообраза ребра ℓ_1 на развертке R влечет вариацию гладкой кривой γ_1 , задающую изгибание поверхности Z .

Сказанное выше является всего лишь иным изложением работы [1; § 3, п. 1].

А. В. Погорелов рассматривал лишь общий случай кусочно гладких преобразований цилиндра. Теперь мы рассматриваем и некоторые частные случаи. Среди них встречаются *кусочно гладкие, кусочно линейные и экзотические* поверхности.

Особо выделим один частный случай, даже серию. В качестве исходной кривой γ_1 возьмем гладкую кривую, соединяющую вершину нижнего основания с серединой верхнего основания грани α_1 вспомогательной правильной призмы Π . Кривая γ_1 однозначно проектируется на ось и вдобавок обладает *вертикальными* касательными в обоих концах. Так как призма Π имеет $2n$ -угольное основание, то нижнее основание поверхности Z есть правильный n -угольник, а верхнее – правильный $2n$ -угольник.

Именно так построим N поверхностей Z_k , $k = 1, \dots, N$. При этом в качестве основания соответствующей вспомогательной призмы Π_k берем правильный $2^k n$ -угольник. Пусть высота всех призм Π_k равна 1, и пусть нижнее основание поверхности Z_k , $k = 2, \dots, N$, совпадает с верхним основанием поверхности Z_{k-1} . Тогда $\bigcup_{k=1}^N Z_k$ представляет собой конечную кусочно гладкую трубчатую поверхность, изометричную цилиндру. При $N \geq 2$ поверхность $\bigcup_{k=1}^N Z_k$ состоит из $2^N n > 2n$ гладких кусков. Размножив поверхность $\bigcup_{k=1}^N Z_k$ всеми элементами группы H , порожденной отражениями m_1 и m_2 от плоскостей нижнего и верхнего основания соответственно, получим бесконечную в обе стороны кусочно гладкую поверхность, обладающую двойкой периодичностью. В окружном направлении действует группа $G = n\tau\tau$ порядка $2n$. Однако полученная бесконечная поверхность содержит не $2n$, а неограниченное множество гладких кусков, что противоречит выводу, сделанному в [1; с. 53].

УТОЧНЕНИЕ. Данный вывод выполняется, если $\gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$ при всех $j \neq i$.

В нашем частном случае при некоторых $j \neq i$ имеет место неравенство $\gamma_j \cap \gamma_i \neq \emptyset$. Все сказанное является существенным дополнением к работе А. В. Погорелова [1].

Список литературы

- [1] А. В. Погорелов, *Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек*, Наука, М., 1986; 1998. [2] М. И. Штогрин, *УМН*, 60:4 (2005), 221–222.

М. И. Штогрин (M. I. Shtogrin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
01.08.2007