Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Ю. Барт, Хеджирование опционов в биномиальной модели с разными процентными ставками, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 227–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm76>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:37:23

ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ В БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ С РАЗНЫМИ ПРОЦЕНТНЫМИ СТАВКАМИ

Я. Ю. БАРТ

1. В работе [1] изложена методика хеджирования опционов для диффузионной модели финансового рынка с ограничениями. Задачей настоящей заметки является распространение методов указанной статьи на биномиальную модель финансового рынка с разными процентными ставками для описания полной структуры оптимального хеджа.

Рассмотрим следующую биномиальную модель финансового рынка (см. [3], [4]):

$$(1) \quad \underline{B}_n = (1 + \underline{r})\underline{B}_{n-1}, \quad \overline{B}_n = (1 + \overline{r})\overline{B}_{n-1}, \quad S_n = (1 + \rho_n(\omega))S_{n-1}, \quad \underline{B}_0, \overline{B}_0, S_0 > 0,$$

где $\underline{r} \leq \overline{r}$ – ставки депозита и кредита, $\rho = (\rho_n(\omega))$ – последовательность н.о.р. случайных величин, принимающих значения a и b с вероятностью $1-p$ и p соответственно ($a > b, 0 < p < 1$). “Вероятность” p порождает меру P на подмножествах пространства $\Omega = \{+1, -1\}^N$.

Инвестиционной стратегией (портфелем) назовем предсказуемую последовательность $\pi = (\underline{\beta}_n, \overline{\beta}_n, \gamma_n)$, где $\underline{\beta}_n, \overline{\beta}_n$ и γ_n количества депозита, кредита и акций инвестора в момент времени n . Капитал стратегии $V_n^\pi \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\beta}_n \underline{B}_n + \overline{\beta}_n \overline{B}_n + \gamma_n S_n$, где $\underline{\beta} \geq 0, \overline{\beta} \leq 0$. Если капитал имеет вид: $V_n^\pi = V_0 + \sum_{k=1}^n (\underline{\beta}_k \Delta \underline{B}_k + \overline{\beta}_k \Delta \overline{B}_k + \gamma_k \Delta S_k) - C_n$, где $C = (C_n)_{0 \leq n \leq N}$ – возрастающая стохастическая последовательность, то π называется стратегией с потреблением.

2. Для изложения важна характеристика стохастических последовательностей V вида $V_n = V_0 + \sum_{k=1}^n H_k^i \Delta X_k^i - C_n$, где $H_k = (H_k^1, H_k^2, H_k^3) = (\underline{\beta}_k, \overline{\beta}_k, \gamma_k)$, $X_k = (X_k^1, X_k^2, X_k^3) = (\underline{B}_k, \overline{B}_k, S_k)$, C_n – возрастающая последовательность.

Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(H, X) = \{Y \mid Y = \sum H \Delta X\}$, $\mathcal{E}(\cdot)$ – “стохастическая экспонента” [1], [4].

Для $Y \in \mathcal{Y}$ имеет место разложение Дуба (см. [2]): $Y = M^Y + A^Y$, где M^Y – мартингал, а A^Y – предсказуемая последовательность (компенсатор Y). Семейство вероятностных мер Q таких, что $Q \sim P$ и $A^{\mathcal{Y}}(Q)_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess sup}_{Y \in \mathcal{Y}} A_n^Y(Q) < +\infty, 0 \leq n \leq N$, где $A^Y(Q)$ – компенсатор Y относительно меры Q , обозначим $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$.

Следующая “дуальная характеристика” (см. [1]) имеет ключевое значение.

ЛЕММА. Предположим, что $\mathcal{P}(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$.

1) Неотрицательная стохастическая последовательность V представима в виде $V_n = V_0 \mathcal{E}(\sum_{k=1}^n H_k \Delta X_k - C_n)$, $0 \leq n \leq N$, где H – предсказуемая последовательность, C – возрастающая последовательность, если и только если при всех $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ процесс $V/\mathcal{E}(A^{\mathcal{Y}}(Q))$ – супермартингал.

2) Для платежного обязательства f_N с $\sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})} E^Q f_N / \mathcal{E}(A^{\mathcal{Y}}(Q))_N < +\infty$ найдется стохастическая последовательность V такая, что

$$V_n = \text{ess sup}_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})} (\mathcal{E}(A^{\mathcal{Y}}(Q))_n E^Q(f_N / \mathcal{E}(A^{\mathcal{Y}}(Q))_N \mid \mathcal{F}_n)), \quad 0 \leq n \leq N,$$

а для любой $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ последовательность $V/\mathcal{E}(A^{\mathcal{Y}}(Q))$ – супермартингал.

3. Обозначим $\mathcal{P}$ семейство вероятностных мер Q таких, что $Q \sim P$ и для всех $k, 1 \leq k \leq N$, выполнено неравенство: $\underline{r} \leq E^Q(\rho_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq \overline{r}$.

ТЕОРЕМА. 1) Положительная стохастическая последовательность $(V_n)_{0 \leq n \leq N}$ есть капитал стратегии с потреблением если и только если для всякой $Q \in \mathcal{P}$

$$(2) \quad V_n / \prod_{k=1}^n (1 + E^Q(\rho_k \mid \mathcal{F}_{k-1})), \quad 0 \leq n \leq N,$$

является супермартингалом.

2) Для опциона европейского типа с платежным обязательством $f_N \geq 0$ множество хеджирующих стратегий не пусто если и только если

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} E^Q f_N / \prod_{k=1}^N (1 + E^Q(\rho_k | \mathcal{F}_{k-1})) < \infty.$$

Существует минимальная хеджирующая стратегия с капиталом

$$(3) \quad \hat{V}_n = \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} E^Q \left(f_N / \prod_{k=n+1}^N (1 + E^Q(\rho_k | \mathcal{F}_{k-1})) \mid \mathcal{F}_n \right).$$

Для доказательства п. 1 теоремы показывается, что для $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\mathcal{H}, R) = \{Y \mid Y = a_1 \underline{r} + a_2 \bar{r} + a_3 \rho_k, \sum_{i=1}^3 a_i \leq 1, a_1 \geq 0, a_2 \leq 0\}$ семейства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ совпадают, $A_n^{\mathcal{Y}}(Q) = \sum_{k=1}^n E^Q(\rho_k | \mathcal{F}_{k-1})$, где $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, и применяется первая часть леммы. Доказательство п. 2 проводится в два шага: сначала из супермартингалности (2) находим, что (3) является нижней границей для капитала, а с помощью второй части леммы, что указанная граница реализуется в виде капитала стратегии с потреблением.

4. Изложенный подход с применением “обратной индукции” (см. [4]) приводит для платежного обязательства $f_N = g(S_N)$ к следующему выражению капитала минимального хеджа: $\hat{V}_n = \hat{v}(S_n, n)$, где $\hat{v}(S_n, n)$ – решение уравнения:

$$\begin{cases} \hat{v}(S_N, N) = g(S_N), \\ \hat{v}(S_{n-1}, n-1) = \max \left\{ \hat{v}(S_{n-1}(1+a), n) \frac{\bar{r}-b}{a-b} + \hat{v}(S_{n-1}(1+b), n) \frac{a-\bar{r}}{a-b}, \right. \\ \left. \hat{v}(S_{n-1}(1+a), n) \frac{r-b}{a-b} + \hat{v}(S_{n-1}(1+b), n) \frac{a-r}{a-b} \right\}. \end{cases}$$

Если платежное обязательство $f_N = \sup_{n \leq N} S_n - S_N$, то капитал минимальной хеджирующей стратегии выражается в виде: $\hat{V}_n = S_n \hat{v}(X_n, n)$, где $X_n = \sup_{k \leq n} S_k / S_n$, а $\hat{v}(X_n, n)$ – решение уравнения:

$$\begin{cases} \hat{v}(X_N, N) = X_N - 1, \\ \hat{v}(X_{n-1}, n-1) = \max \left\{ \hat{v} \left(\max \left\{ \frac{X_{n-1}}{1+a}, 1 \right\}, n \right) \frac{(1+a)(\bar{r}-b)}{a-b} \right. \\ \quad + \hat{v} \left(\max \left\{ \frac{X_{n-1}}{1+b}, 1 \right\}, n \right) \frac{(1+b)(a-\bar{r})}{a-b}, \hat{v} \left(\max \left\{ \frac{X_{n-1}}{1+a}, 1 \right\}, n \right) \frac{(1+a)(r-b)}{a-b} \\ \quad \left. + \hat{v} \left(\max \left\{ \frac{X_{n-1}}{1+b}, 1 \right\}, n \right) \frac{(1+b)(a-r)}{a-b} \right\}. \end{cases}$$

Автор признателен Д. О. Крамкову и А. В. Мельникову за руководство данной работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Волков С. Н., Крамков Д. О. // Обозрение прикл. и пром. матем. 1997. Т. 4. № 1. С. 18–65. [2] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. [3] Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. // Теор. вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 23–79. [4] Мельников А. В. Финансовые рынки. М.: ТВП, 1997.