Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман, Уравнения Книжника–Замолодчикова для положительного рода и алгебры Кричевера–Новикова, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 147–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:41:40

УДК 517.774

УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА ДЛЯ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РОДА И АЛГЕБРЫ КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА

М. ШЛИХЕНМАЙЕР, О. К. ШЕЙНМАН

В статье развивается глобальный операторный подход к теории Весса–Зумино–Виттена–Новикова для компактных римановых поверхностей произвольного рода с отмеченными точками. Глобальность означает здесь, что мы используем алгебры Кричевера–Новикова калибровочных и конформных симметрий (т.е. глобальных симметрий) вместо алгебр петель и Вирасоро, которые в этом контексте являются локальными. Элементы этого глобального подхода описаны в предыдущей статье авторов (УМН, 1999, т. 54, № 1). В настоящей статье дается конструкция конформных блоков и проективно плоской связности на образованном ими расслоении.

Библиография: 35 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	148
2. Алгебры типа Кричевера–Новикова	151
2.1. Алгебры Ли $\mathcal{A}$, $\bar{\mathcal{A}}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}^1$ и $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$	151
2.2. Мероморфные формы веса λ и двойственность Кричевера–Новикова ..	152
2.3. Базисы Кричевера–Новикова	153
2.4. Почти градуированная структура, треугольные разложения	154
2.5. Центральные расширения и 2-когомологии	156
2.6. Аффинные алгебры	158
2.7. Центральные расширения алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$	160
2.8. Локальные коциклы для $\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(n)$	161
3. Представления многоточечных алгебр Кричевера–Новикова	162
3.1. Проективные $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модули	162
3.2. Фермионные представления	163
3.3. Представление Сугавары	165
4. Модули кривых с отмеченными точками, конформные блоки и проективно плоская связность	169
4.1. Пространство модулей $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ и пучок конформных блоков	169
4.2. Проективно плоская связность и обобщенные уравнения Книжника–Замолотчикова	172
Список литературы	179

1. Введение

В этой статье мы рассматриваем следующую проблему двумерной конформной теории поля: по данным алгебрам калибровочных и конформных симметрий построить на пространстве модулей римановых поверхностей с отмеченными точками расслоение с определенной на нем проективно плоской связностью¹ так, чтобы слой расслоения был равен пространству коинвариантов калибровочных симметрий.

Проблема берет начало в известной работе В. Книжника и А. Замолодчикова [9], где рассмотрен случай рода нуль. В этой статье выведено следующее замечательное уравнение:

$$\left(k \frac{\partial}{\partial z_p} - \sum_{r \neq p} \frac{t_p^a t_r^a}{z_p - z_r}\right) \Psi = 0, \quad p = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Здесь $z_1, \dots, z_N$ – произвольные отмеченные точки (общего положения) на римановой сфере. Для $i = 1, \dots, N$ заданы представления t_i некоторой редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (t_i^a – матрица представления a -го генератора алгебры $\mathfrak{g}$), а k – константа. В (1.1) предполагается суммирование по a .

В настоящее время эти уравнения известны как уравнения Книжника–Замолодчикова. Их можно интерпретировать как условия горизонтальности сечений *связности Книжника–Замолодчикова*. С физической точки зрения соотношения (1.1) являются уравнениями N -точечных корреляционных функций в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена.

Дальнейшее развитие идей Книжника–Замолодчикова кратко описано в [26]. Там же можно найти и более подробную библиографию. До 1987 года это развитие было неразрывно связано с концепцией калибровочных и конформных симметрий, основанной на алгебрах Каца–Мули и Вирасоро. Первая попытка обобщения на положительный род в рамках этой концепции была предпринята Д. Бернардом [1], полная теория (конформная теория поля на семействах стабильных алгебраических кривых) построена А. Цучия, К. Уено и Й. Ямадой [34]. Конструкция этих авторов локально (в окрестности отмеченных точек) воспроизводит конструкцию Книжника–Замолодчикова.

Н. Хитчин [6] предложил иной (вне рамок калибровочной теории) подход к проблеме. Методами геометрического квантования, с применением гамильтоновой редукции, он доказал существование проективно плоской связности в случае пространства замкнутых кривых. В предисловии к своей работе он отмечает, что обобщение его методов на кривые с отмеченными точками потребовало бы значительных модификаций, так что он не рассматривает этот вопрос. Позднее указанные модификации были произведены И. Ласло для случая *одной* отмеченной точки. Заметим, что физически рассмотрение отмеченных точек принципиально важно, так как искомые горизонтальные сечения связности – это корреляционные функции полей, локализованных в этих точках. Рассмотрение отмеченных точек принципиально важно и по топологическим соображениям, так как только в их присутствии возникает связь дву-

О. К. Шейнман получил поддержку Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-00803, 02-01-22004) и программы РАН “Математические проблемы нелинейной динамики”.

¹По поводу точного определения пространства модулей римановых поверхностей с отмеченными точками см. раздел 4.

мерной теории с теорией узлов и зацеплений в “телах с ручками”. Таким образом, к 1989–90 гг. сформировалось два направления конформной теории поля: теория Весса–Зумино–Новикова–Виттена, и теория Хитчина. Позднее возникли и другие: бесконечномерный аналог теории Бореля–Вейля–Ботта и некоммутативная теория тэта-функций. Настоящая работа посвящена первому из названных направлений – теории Весса–Зумино–Новикова–Виттена.

Основным вопросом, который мы ставим перед собой в этой работе, является следующий: каково обобщение уравнений Книжника–Замолотчикова на римановы поверхности положительного рода с несколькими отмеченными точками? Этот вопрос является по-прежнему актуальным и поднимается в ряде статей ([3], [4] и др.). Основополагающая работа Цучия, Уэно и Ямады не закрывает его. Попытки эффективизации и прояснения их подхода продолжают (см., например, [3]). Наша работа непосредственно развивает метод работы Цучия, Уэно и Ямады. Новым в нашем подходе является использование алгебр Кричевера–Новикова.

В работах [10]–[12] И.М. Кричевер и С.П. Новиков определили основные объекты двумерной конформной теории поля (например, тензор энергии-импульса) как глобальные мероморфные объекты на римановой поверхности. Они указали другой выбор базисных калибровочных и конформных симметрий, которые имеют глобальную природу и образуют *алгебры Кричевера–Новикова*. Алгебры Кричевера–Новикова представляют собой двумерный алгебро-геометрический аналог аффинных алгебр Каца–Мури и алгебры Вирасоро и включают в себя последние как частный случай. Их определение основано на алгебро-геометрических данных того типа, который широко используется в теории солитонов: римановой поверхности с отмеченными точками и фиксированными струями локальных координат в них. На этих алгебрах и их *локальных* центральных расширениях можно ввести *почти градуированную структуру*, что позволяет развить для них теорию представлений, порожденных вакуумом, или, физически говоря, формализм вторичного квантования.

Возможность обобщения конструкции Цучия–Уэно–Ямады на алгебры Кричевера–Новикова далеко не очевидна. В нашей работе мы решаем эту задачу. То, что мы делаем, – это не абстрактное доказательство существования связности, а ее явная конструкция, с решением сопутствующих геометрических и деформационных проблем.

В [25], [26] мы обобщили результаты Кричевера–Новикова на неабелев многооточечный случай и предложили наш *глобальный операторный подход* к модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена. В [26] мы сформулировали основы нашего подхода, включая общий вид связности Книжника–Замолотчикова для произвольного конечного рода g и ее вычисление для малых родов ($g = 0$ и $g = 1$). Мы, однако, не смогли показать там, что наша связность корректно определена на *конформных блоках*, поэтому мы также опустили доказательство ее проективной плоскостности. Одной из целей настоящей работы является восполнение этих пробелов. В частности, вопрос о корректной определенности связности мы решаем на основе явных формул для инфинитезимальных деформаций функций и векторных полей Кричевера–Новикова при деформации комплексной структуры, полученных в настоящей работе. Отметим существование проблемы идентификации нашего подхода к конформной теории поля с уже известными, а также последних между собой.

Мы полагаем, что глобальный операторный подход упрощает теорию, делает более прозрачными ее геометрию и связи. Он позволяет нам явно описать касательное пространство Кураниши к пространству модулей в терминах базисных элементов Кричевера–Новикова и, таким образом, явно записать уравнения обобщенной системы Книжника–Замолотчикова. Известно, что теории высших родов связаны с представлениями фундаментальной группы проколотой римановой поверхности (“твистами” в ранней терминологии конформной теории поля [4]). В нашем подходе представления фундаментальной группы естественно возникают как данные, задающие представления калибровочных алгебр Кричевера–Новикова. Таким образом, глобальное геометрическое соответствие Лэнглэндса проявляется в теории с самого начала. Еще одна интригующая связь может быть просто сформулирована в рамках нашего подхода, а именно связь между системами Книжника–Замолотчикова и квадратичными интегралами Хитчина [6]. Как оператор Книжника–Замолотчикова, так и соответствующий квантованный интеграл Хитчина соответствуют касательному вектору Кураниши. С одной стороны, рассмотрим (определенный) подъем e такого вектора в алгебру векторных полей Кричевера–Новикова. С другой стороны, рассмотрим соответствующее дифференцирование на пространстве модулей. Вычтем в обоих случаях оператор Сугавары, отвечающий e . В первом случае это приведет к квантованному интегралу Хитчина [33], а во втором – к оператору Книжника–Замолотчикова. Обсуждение связанных с этим вопросов, которым посвящено большое количество работ, выходит за рамки настоящей статьи.

За пределами настоящего обзора остаются две важные проблемы: проблема унитарности построенной связности и проблема ее продолжения на компактификацию пространства модулей. Проблема унитарности поставлена Хитчиным в упомянутой выше работе и не поддавалась попыткам решения в рамках использованных Хитчиным подходов. В аксиоматике эрмитовых тензорных категорий задача позднее рассмотрена А. Кирилловым (мл.). Насколько нам известно, утверждение о единственности унитарной проективно плоской связности до сих пор отсутствует в литературе (хотя многие в той или иной мере верят в его справедливость). Что касается продолжения на компактификацию, решение этого вопроса требует исследования поведения алгебр Кричевера–Новикова и их представлений при вырождении кривых. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах М. Шлихенмайера и А. Фиаловски.

Настоящая работа организована следующим образом. В разделах 2 и 3 мы даем новое изложение необходимых понятий и фактов с точки зрения последних продвижений в теории многоточечных алгебр Кричевера–Новикова [23], [24] и их представлений [30]–[32]. Ряд результатов расширен для целей настоящей работы.

В разделе 4 излагаются основные результаты, а именно конструкция обобщенной связности Книжника–Замолотчикова на расслоении конформных блоков на открытом плотном подмножестве пространства модулей и доказательство проективной плоскостности этой связности.

Один из авторов (О.К.Ш.) получил поддержку РФФИ в рамках проектов 02-01-00803, 02-01-22004 и программы РАН “Математические проблемы нелинейной динамики”. Авторы также благодарят Германское научное общество за поддержку в рамках исследовательской группы “Арифметика”, работающей в университетах Гейдельберга и Мангейма. Авторы благодарят рецензента настоящей статьи за замечания, способствовавшие улучшению вводной части работы.

2. Алгебры типа Кричевера–Новикова

По поводу введения и общих результатов, полученных в [10] для римановых поверхностей с двумя отмеченными точками и в [17]–[20] для случая многих отмеченных точек, мы отсылаем к [26]. Здесь мы лишь введем обозначения.

Пусть Σ – компактная риманова поверхность рода g , или, в терминах алгебраической геометрии, гладкая проективная кривая над $\mathbb{C}$. Пусть

$$I = (P_1, \dots, P_N), \quad N \geq 1,$$

– набор различных упорядоченных точек (“отмеченных точек”, “проколов”) на Σ и P_∞ – выделенная точка, отличная от P_i для любого i . Точки из I называются *входящими*, а точка P_∞ – *исходящей*. Пусть, как множество, $A = I \cup \{P_\infty\}$. В [19], [20] рассмотрен случай произвольного конечного числа исходящих точек. Результаты этого раздела остаются справедливыми в этом более общем контексте.

2.1. Алгебры Ли $\mathcal{A}$, $\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}^1$ и $\mathcal{D}_{\bar{\mathfrak{g}}}^1$. Пусть $\mathcal{A} := \mathcal{A}(\Sigma, I, P_\infty)$ – ассоциативная алгебра мероморфных функций на Σ , регулярных везде, за исключением, быть может, точек $P \in A$. Пусть $\mathfrak{g}$ – комплексная конечномерная алгебра Ли. Тогда

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \quad (2.1)$$

называется *алгеброй токов Кричевера–Новикова* [10], [27]–[29]. Скобка Ли на $\bar{\mathfrak{g}}$ задается с помощью соотношений

$$[x \otimes A, y \otimes B] = [x, y] \otimes AB. \quad (2.2)$$

Мы будем часто опускать в обозначениях символ $\otimes$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ алгебру Ли мероморфных векторных полей на Σ , которым разрешается иметь полюсы только в точках $P \in A$ [10]–[12].

Для римановой сферы ($g = 0$) с квазиглобальной координатой z и множествами $I = \{0\}$ и $P_\infty = \infty$ алгебра $\mathcal{A}$ – это алгебра полиномов Лорана, алгебра токов $\bar{\mathfrak{g}}$ – это алгебра петель, а алгебра векторных полей $\mathcal{L}$ – это алгебра Витта. Иногда, для краткости, мы называем этот случай классическим.

Алгебра $\mathcal{L}$ действует на элементы алгебры $\mathcal{A}$ с помощью дифференцирований (производных Ли). Это позволяет определить алгебру Ли $\mathcal{D}^1$ дифференциальных операторов первого порядка как полупрямую сумму алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$. Как векторное пространство $\mathcal{D}^1 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{L}$. Скобка Ли определяется с помощью соотношений

$$[(g, e), (h, f)] := (e \cdot h - f \cdot g, [e, f]), \quad g, h \in \mathcal{A}, \quad e, f \in \mathcal{L}. \quad (2.3)$$

Здесь $e \cdot f$ обозначает взятие производной Ли. В локальных координатах имеем $e| = \tilde{e} \frac{d}{dz}$ и $e \cdot f| = \tilde{e} \frac{df}{dz}$.

Рассмотрим, наконец, алгебру Ли $\mathcal{D}_{\bar{\mathfrak{g}}}^1$ дифференциальных операторов, связанную с $\bar{\mathfrak{g}}$ (алгебру *дифференциальных операторов Кричевера–Новикова*). Как линейное пространство $\mathcal{D}_{\bar{\mathfrak{g}}}^1 = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$. Скобка Ли задается соответствующими скобками на $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathcal{L}$ и дополнительными требованиями

$$[e, x \otimes A] := -[x \otimes A, e] := x \otimes (e \cdot A). \quad (2.4)$$

В качестве частного случая при $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1)$ получаем $\mathcal{D}_{\bar{\mathfrak{g}}}^1 = \mathcal{D}^1$.

2.2. Мероморфные формы веса λ и двойственность Кричевера–Новикова. Пусть $\mathcal{K}$ – каноническое линейное расслоение. Ассоциированный пучок локальных сечений – это пучок голоморфных дифференциалов. Следуя общепринятой практике, мы обычно не будем делать различий между линейным расслоением и ассоциированным обратимым пучком локальных сечений. Для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}$ рассмотрим расслоение $\mathcal{K}^\lambda := \mathcal{K}^{\otimes \lambda}$. Здесь мы следуем обычному соглашению: $\mathcal{K}^0 = \mathcal{O}$ – тривиальное расслоение, а $\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^*$ – голоморфное касательное (линейное) расслоение. Разумеется, зафиксировав тэта-характеристики, т.е. расслоение S , для которого $S^{\otimes 2} = \mathcal{K}$, мы могли бы рассматривать $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{F}^\lambda$ (бесконечномерное) векторное пространство глобальных мероморфных сечений расслоения $\mathcal{K}^\lambda$, голоморфных на $\Sigma \setminus A$. Элементы пространства $\mathcal{F}^\lambda$ называются (мероморфными) формами или тензорами веса λ .

Особый интерес представляют следующие случаи: функции ($\lambda = 0$), векторные поля ($\lambda = -1$), 1-формы ($\lambda = 1$) и квадратичные дифференциалы ($\lambda = 2$). Пространство функций выше обозначено $\mathcal{A}$, а пространство векторных полей – $\mathcal{L}$.

Умножая сечения на функции, вновь получаем сечения. Таким образом, пространства $\mathcal{F}^\lambda$ наделяются структурой $\mathcal{A}$ -модулей. Действие векторных полей на формы с помощью производной Ли превращает пространства $\mathcal{F}^\lambda$ в $\mathcal{L}$ -модули. В локальных координатах производная Ли задается формулой

$$(e \cdot g)_\lambda := \left(\tilde{e}(z) \frac{d}{dz} \right) \cdot (\tilde{g}(z) dz^\lambda) := \left(\tilde{e}(z) \frac{d\tilde{g}}{dz}(z) + \lambda \tilde{g}(z) \frac{d\tilde{e}}{dz}(z) \right) dz^\lambda. \quad (2.5)$$

С помощью канонического определения $(g + e) \cdot v = g \cdot v + e \cdot v$ на векторных пространствах $\mathcal{F}^\lambda$ задается структура $\mathcal{D}^1$ -модулей. Здесь $g \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$ и $v \in \mathcal{F}^\lambda$. Универсальные конструкции позволяют рассматривать и алгебры дифференциальных операторов произвольного порядка [20], [22].

Пусть ρ – мероморфный дифференциал, голоморфный на $\Sigma \setminus A$, имеющий полюсы в точности первого порядка в точках множества A , заданные положительные вычеты в I , заданные отрицательные вычеты в точке P_∞ (разумеется, удовлетворяющие условию $\sum_{P \in I} \text{res}_P(\rho) + \text{res}_{P_\infty}(\rho) = 0$) и чисто мнимые периоды. Существует ровно один такой дифференциал [16; с. 116]. Для фиксированной точки $R \in \Sigma \setminus A$ определена (и является гармонической) функция $u(P) = \text{Re} \int_R^P \rho$. Семейство линий уровня $C_\tau := \{p \in M \mid u(P) = \tau\}$, $\tau \in \mathbb{R}$, определяет на $\Sigma \setminus A$ слоение. Каждая линия C_τ отделяет точки множества I от точки P_∞ . Для всех $\tau \ll 0$ ($\tau \gg 0$) линия уровня C_τ представляет собой несвязное объединение деформированных окружностей C_i вокруг точек P_i , $i = 1, \dots, N$ (деформированной окружности C_∞ вокруг точки P_∞). Мы назовем любую такую линию уровня, или любой цикл, гомологичный такой линии уровня, *разделяющим циклом* и обозначим его C_S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Двойственность Кричевера–Новикова* задается спариванием пространств $\mathcal{F}^\lambda$ и $\mathcal{F}^{1-\lambda}$ с помощью формы

$$\mathcal{F}^\lambda \times \mathcal{F}^{1-\lambda} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} f \otimes g = \sum_{P \in I} \text{res}_P(f \otimes g) = -\text{res}_{P_\infty}(f \otimes g), \quad (2.6)$$

где C_S – произвольный разделяющий цикл.

Последнее равенство следует из теоремы о вычетах. Заметим, что в (2.6) интеграл не зависит от выбора разделяющего цикла. Из существования дуального базиса, построенного в следующем п. 2.3, следует, что спаривание Кричевера–Новикова является невырожденным.

2.3. Базисы Кричевера–Новикова. Кричевер и Новиков ввели специальные базисы (*базисы Кричевера–Новикова*) в пространствах мероморфных тензоров на римановых поверхностях с двумя отмеченными точками. При $g = 0$ базисы Кричевера–Новикова совпадают с базисами Лорана. Многоточечное обобщение этих базисов дано одним из авторов в [19], [20] (см. также [15] о некоторых результатах в том же направлении). Следуя [19], [20], мы определяем здесь базисы типа Кричевера–Новикова для тензоров произвольного веса λ на римановой поверхности с N отмеченными точками.

Зафиксируем λ и для любых $n \in \mathbb{Z}$, $p = 1, \dots, N$ предъявим базисный элемент $f_{n,p}^\lambda \in \mathcal{F}^\lambda$. Базисные элементы выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли соотношениям двойственности

$$\langle f_{n,p}^\lambda, f_{m,r}^{1-\lambda} \rangle = \delta_{-n}^m \cdot \delta_p^r \quad (2.7)$$

по отношению к спариванию (2.6). В частности, отсюда вытекает, что спаривание (2.6) невырожденно. Кроме того, базисные элементы удовлетворяют условию

$$\text{ord}_{P_i}(f_{n,p}^\lambda) = (n + 1 - \lambda) - \delta_i^p, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Порядок в точке P_∞ выбирается так, чтобы с точностью до скалярного множителя существовал единственный элемент, удовлетворяющий (2.7). Для этого при $g \geq 2$, $\lambda \neq 0, 1$ и A , состоящем из точек общего положения (а также при $g = 0$ – без дополнительных ограничений), потребуем

$$\text{ord}_{P_\infty}(f_{n,p}^\lambda) = -N(n + 1 - \lambda) + (2\lambda - 1)(g - 1). \quad (2.9)$$

После выбора локальных координат z_p в точках P_p скалярный множитель фиксируется условием

$$f_{n,p}^\lambda(z_p) = z_p^{n-\lambda}(1 + O(z_p))(dz_p)^\lambda, \quad p = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

С использованием теоремы Римана–Роха в [17] показано, что существует только один элемент, удовлетворяющий (2.8)–(2.10). По поводу модификаций этих требований при остальных g и λ см. [26], [19], [20].

Имеются точные описания базисных элементов $f_{n,p}^\lambda$ в терминах рациональных функций при $g = 0$, σ -функции Вейерштрасса при $g = 1$, прим-форм и тэта-функций при $g \geq 1$ [18]. Для $g = 0$ и $g = 1$ такие описания можно найти в [26; §2, 7]. По поводу описаний в терминах $\wp$ -функции Вейерштрасса см. [14], [21]. Наличие таких описаний необходимо в контексте нашей работы, поскольку мы рассматриваем введенные выше алгебры и модули в зависимости от точки конфигурационного пространства или пространства модулей кривых с отмеченными точками соответственно. В частности, из явных представлений видно, что базисные элементы аналитически меняются при деформации комплексной структуры римановой поверхности.

Для следующих случаев мы вводим специальные обозначения:

$$A_{n,p} := f_{n,p}^0, \quad e_{n,p} := f_{n,p}^{-1}, \quad \omega^{n,p} := f_{-n,p}^1, \quad \Omega^{n,p} := f_{-n,p}^2. \quad (2.11)$$

При $g = 0$ и $N = 1$ построенные базисные элементы совпадают со стандартными генераторами алгебры Витта и алгебры петель соответственно. Для $g \geq 1$ и $N = 1$ эти элементы с точностью до сдвига номера совпадают с введенными Кричевером и Новиковым в [10]–[12].

2.4. Почти градуированная структура, треугольные разложения. При $g = 0$ и $N = 1$ алгебры Ли, введенные в п. 2.1, являются градуированными. Градуировка – необходимый инструмент их структурной теории и теории представлений старшего веса. Для случая высших родов (и в многоточечной ситуации при $g = 0$) градуировки нет. Фундаментальным наблюдением Кричевера и Новикова [10]–[12] является то, что более слабое свойство, почти градуированность, уже достаточно для развития структурной теории и теории представлений в этом более общем контексте.

Алгебра (ассоциативная или алгебра Ли) называется *почти градуированной*, если она допускает разложение в прямую сумму векторных пространств $\mathcal{V} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$, где (1) $\dim \mathcal{V}_n < \infty$ и (2) существуют константы R и S такие, что

$$\mathcal{V}_n \cdot \mathcal{V}_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R}^{n+m+S} \mathcal{V}_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Элементы пространства $\mathcal{V}_n$ называются *однородными элементами степени n* . Пусть $\mathcal{V} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$ – почти градуированная алгебра и M – некоторый $\mathcal{V}$ -модуль. Модуль M называется *почти градуированным*, если он допускает разложение в прямую сумму векторных пространств $M = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} M_m$, где (1) $\dim M_m < \infty$ и (2) имеются константы T и U такие, что

$$\mathcal{V}_n \cdot M_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m-T}^{n+m+U} M_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

Элементы пространства M_n называются *однородными элементами степени n* .

В случае пространства $\mathcal{F}^\lambda$ однородная компонента $\mathcal{F}_n^\lambda$ определяется как подпространство, порожденное элементами $f_{n,p}^\lambda$, $p = 1, \dots, N$. Тогда $\mathcal{F}^\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^\lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [19], [20]. *По отношению к введенной степени алгебра векторных полей $\mathcal{L}$, алгебра функций $\mathcal{A}$ и алгебра дифференциальных операторов $\mathcal{D}^1$ являются почти градуированными, а $\mathcal{F}^\lambda$ является почти градуированным модулем над ними.*

Алгебру $\mathcal{A}$ как векторное пространство можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_{(0)} \oplus \mathcal{A}_-, \\ \mathcal{A}_+ &:= \langle A_{n,p} \mid n \geq 1, p = 1, \dots, N \rangle, \quad \mathcal{A}_- := \langle A_{n,p} \mid n \leq -K-1, p = 1, \dots, N \rangle, \\ \mathcal{A}_{(0)} &:= \langle A_{n,p} \mid -K \leq n \leq 0, p = 1, \dots, N \rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

а алгебру Ли $\mathcal{L}$ – следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_{(0)} \oplus \mathcal{L}_-, \\ \mathcal{L}_+ &:= \langle e_{n,p} \mid n \geq 1, p = 1, \dots, N \rangle, \quad \mathcal{L}_- := \langle e_{n,p} \mid n \leq -L-1, p = 1, \dots, N \rangle, \\ \mathcal{L}_{(0)} &:= \langle e_{n,p} \mid -L \leq n \leq 0, p = 1, \dots, N \rangle.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Мы называем (2.14), (2.15) *треугольными разложениями*. Аналогично получаем треугольное разложение алгебры $\mathcal{D}^1$.

Вследствие почти градуированности, подпространства $\mathcal{A}_\pm$ и $\mathcal{L}_\pm$ являются подалгебрами, но подпространства $\mathcal{A}_{(0)}$ и $\mathcal{L}_{(0)}$ таковыми, вообще говоря, не являются. Для них мы используем название *критическая полоса*.

Заметим, что $\mathcal{A}_+$ и $\mathcal{L}_+$ могут быть охарактеризованы как алгебра функций (соответственно, векторных полей), имеющих в точках $P_i, i = 1, \dots, N$, нули, как минимум, порядка один (соответственно, два). Эти алгебры могут быть расширены с помощью добавления всех элементов, регулярных в точках P_i . Этого можно достичь, добавляя к ним множества $\{A_{0,p}, p = 1, \dots, N\}$ (соответственно $\{e_{0,p}, e_{-1,p}, i = 1, \dots, N\}$) базисных элементов критической полосы. Мы обозначаем расширенные алгебры $\mathcal{A}_+^*$ и $\mathcal{L}_+^*$ соответственно.

Со своей стороны, $\mathcal{A}_-$ и $\mathcal{L}_-$ также могут быть расширены так, чтобы они содержали все элементы, регулярные в P_∞ . Это подробно объяснено в [26]. Получим $\mathcal{A}_-^*$ и $\mathcal{L}_-^*$ соответственно. Точно так же для любого $p \in \mathbb{N}_0$ пусть $\mathcal{L}_-^{(p)}$ – подалгебра векторных полей, имеющих в точке P_∞ нуль порядка $\geq p+1$, а $\mathcal{A}_-^{(p)}$ – подалгебра функций, имеющих в P_∞ нуль порядка $\geq p$. Получаем разложения

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_{(0)}^{(p)} \oplus \mathcal{L}_-^{(p)} \text{ для } p \geq 0 \text{ и } \mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_{(0)}^{(p)} \oplus \mathcal{A}_-^{(p)} \text{ для } p \geq 1 \tag{2.16}$$

с “критическими полосами” $\mathcal{L}_{(0)}^{(p)}$ и $\mathcal{A}_{(0)}^{(p)}$, которые несут лишь структуру подпространств. Особенный интерес для нас представляет пространство $\mathcal{L}_{(0)}^{(1)}$, которое мы называем *редуцированной критической полосой*. При $g \geq 2$ его размерность равна

$$\dim \mathcal{L}_{(0)}^{(1)} = N + N + (3g - 3) + 1 + 1 = 2N + 3g - 1. \tag{2.17}$$

Здесь первые два слагаемых соответствуют размерностям $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_{-1}$. Средний член идет от базисных векторных полей, имеющих полюсы и в $P_i, i = 1, \dots, N$, и в P_∞ . Сумма $1+1$ соответствует базисным векторным полям, имеющим в P_∞ порядки ровно нуль и ровно один соответственно.

Несложно продолжить квазиградуировку на алгебру токов $\bar{\mathfrak{g}}$, полагая $\deg(x \otimes A_{n,p}) := n$. Как и выше, имеется треугольное разложение

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}_+ \oplus \bar{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \bar{\mathfrak{g}}_- \text{ с } \bar{\mathfrak{g}}_\beta = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_\beta, \quad \beta \in \{-, (0), +\}, \tag{2.18}$$

В частности, $\bar{\mathfrak{g}}_\pm$ являются подалгебрами. Соответствующим образом возникают и расширенные подалгебры. Из последних для нас особенно важна подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}^r := \bar{\mathfrak{g}}_-^{(1)} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_-^{(1)}$. Она называется *регулярной подалгеброй*.

Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ естественно вкладывается в $\bar{\mathfrak{g}}$ в качестве подалгебры. Она лежит в подпространстве $\bar{\mathfrak{g}}_0$, что можно видеть с помощью соотношения $1 = \sum_{p=1}^N A_{0,p}$ [26; лемма 2.6].

2.5. Центральные расширения и 2-когомологии. Пусть $\mathcal{V}$ – алгебра Ли и γ – 2-коцикл на ней в смысле когомологий алгебр Ли, т.е. антисимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая соотношению

$$\gamma([f, g], h) + \gamma([g, h], f) + \gamma([h, f], g) = 0 \quad \forall f, g, h \in \mathcal{V}. \quad (2.19)$$

Можно определить структуру алгебры Ли на $\widehat{\mathcal{V}} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{V}$, вводя для элементов этого пространства обозначения $\widehat{f} := (0, f)$ и $\widehat{t} := (1, 0)$ и полагая

$$[\widehat{f}, \widehat{g}] := \widehat{[f, g]} + \gamma(f, g) \cdot \widehat{t}, \quad [\widehat{t}, \widehat{v}] = 0. \quad (2.20)$$

Элемент $\widehat{t}$ является центральным. С точностью до эквивалентности центральные расширения классифицируются элементами пространства $H^2(\mathcal{V}, \mathbb{C})$ 2-когомологий алгебры Ли $\mathcal{V}$ со значениями в тривиальном модуле $\mathbb{C}$. В частности, два коцикла γ_1, γ_2 определяют эквивалентные центральные расширения в том и только том случае, когда существует линейная форма ϕ на $\mathcal{V}$ такая, что

$$\gamma_1(f, g) = \gamma_2(f, g) + \phi([f, g]). \quad (2.21)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\mathcal{V} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$ – почти градуированная алгебра Ли. Коцикл γ на $\mathcal{V}$ называется локальным (по отношению к почти градуировке), если существуют $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}: \quad \gamma(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m) \neq 0 \implies M_2 \leq n + m \leq M_1. \quad (2.22)$$

Константы M_1 и M_2 называются соответственно верхней и нижней границами локального коцикла γ .

При условии $\deg(\widehat{t}) := 0$ центральное расширение $\widehat{\mathcal{V}}$ почти градуировано тогда и только тогда, когда оно задано локальным коциклом γ . В этом случае мы называем $\widehat{\mathcal{V}}$ *почти градуированным центральным расширением* или *локальным центральным расширением*.

В дальнейшем мы рассматриваем коциклы геометрического происхождения. Сначала мы делаем это для $\mathcal{A}, \mathcal{L}$ и $\mathcal{D}^1$. Полное изложение для этих случаев дано в [23]. К этой работе мы отсылаем за доказательствами нижеследующих утверждений и дальнейшими разъяснениями.

Для коммутативной алгебры Ли $\mathcal{A}$ любая антисимметрическая билинейная форма является коциклом. Пусть C – произвольный (не обязательно связный) гладкий контур в $\Sigma \setminus A$, тогда билинейная форма, определенная соотношениями

$$\gamma_C^{(f)}: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_C^{(f)}(g, h) := \frac{1}{2\pi i} \int_C g dh, \quad (2.23)$$

антисимметрична и, следовательно, является коциклом. Отметим, что замена контура C любым гомологичным (гладким) контуром приводит к тому же коциклу. Этот коцикл $\mathcal{L}$ -инвариантен, т.е.

$$\gamma_C^{(f)}(e \cdot g, h) = \gamma_C^{(f)}(e \cdot h, g) \quad \forall e \in \mathcal{L}, \quad \forall g, h \in \mathcal{A}. \quad (2.24)$$

Для алгебры $\mathcal{L}$ векторных полей обобщим, следуя [10], на случай положительного рода коцикл Вирасоро–Гельфанда–Фукса. Для этого сначала выберем проективную связность. Это позволит нам добавить к подынтегральному выражению корректирующий член и получить корректно определенную 1-форму. Пусть R – глобальная голоморфная проективная связность (определение см., например, в [26]), C – произвольный цикл. Сопоставим им коцикл с помощью соотношения

$$\gamma_{C,R}^{(v)}(e, f) := \frac{1}{24\pi i} \int_C \left(\frac{1}{2}(\tilde{e}''' \tilde{f} - \tilde{e} \tilde{f}''') - R(\tilde{e}' \tilde{f} - \tilde{e} \tilde{f}') \right) dz. \quad (2.25)$$

Здесь $e| = \tilde{e} \frac{d}{dz}$ и $f| = \tilde{f} \frac{d}{dz}$, $\tilde{e}$ и $\tilde{f}$ – локальные мероморфные функции. Другой выбор проективной связности (даже если выбирать среди мероморфных проективных связностей с полюсами только в точках множества A) приведет к когомологичному коциклу и, следовательно, к эквивалентному центральному расширению.

Коциклы рассмотренных двух типов могут быть продолжены на всю алгебру $\mathcal{D}^1$, если положить их равными нулю на подпространстве, дополнительном к области их определения. Для коциклов на алгебре векторных полей это не требует дополнительных условий, для алгебры функций необходимым и достаточным является условие $\mathcal{L}$ -инвариантности (2.24). Однако имеется еще один тип коциклов, которые “смешивают” функции и векторные поля. Для их определения зафиксируем аффинную связность T , которая голоморфна вне множества A и имеет не более чем простые полюсы в P_∞ . По поводу определения и существования аффинных связностей см. [20], [31], [23]. Тогда

$$\gamma_{C,T}^{(m)}(e, g) := -\gamma_{C,T}^{(m)}(g, e) := \frac{1}{2\pi i} \int_C (\tilde{e} g'' + T(\tilde{e} g')) dz \quad (2.26)$$

является 2-коциклом. Как и раньше, класс когомологий не зависит от выбора аффинной связности.

Далее рассмотрим коциклы, полученные интегрированием по разделяющему циклу C_S . Вместо γ_{C_S} будем писать γ_S . Очевидно, эти коциклы можно выразить через вычеты в точках множества I , или, эквивалентно, в точке P_∞ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 [10], [20]. *При интегрировании по разделяющим циклам C_S рассмотренные выше коциклы локальны. Для каждого из них верхняя граница равна нулю.*

Если заменить R или T другими мероморфными связностями, имеющими полюсы лишь в точках множества A , коциклы останутся локальными. Верхняя и нижняя границы могут меняться. Если полюсы, лежащие в I , имеют порядок не более двух для проективных связностей и не более единицы для аффинных, то верхняя граница останется равной нулю. Заметим, что такая замена связности всегда достигается путем прибавления элемента пространства $\mathcal{F}^2$ в случае R или пространства $\mathcal{F}^1$ в случае T .

Ввиду локальности геометрические коциклы дают почти градуированные центральные расширения $\hat{\mathcal{A}}$, $\hat{\mathcal{L}}$ и $\hat{\mathcal{D}}^1$. Ввиду обращения в нуль этих коциклов (по крайней мере при голоморфной R) на подалгебрах $\mathcal{A}_\pm$ и $\mathcal{L}_\pm$ последние естественно отождествляются с подалгебрами $\hat{\mathcal{A}}_\pm$ и $\hat{\mathcal{L}}_\pm$ в $\hat{\mathcal{A}}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ соответственно.

Одним из главных результатов работы [23] является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.5. (а) Каждый локальный коцикл на $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{L}$ -инвариантности, кратен (над $\mathbb{C}$) коциклу $\gamma_S^{(f)}$. Коцикл $\gamma_S^{(f)}$ когомологически нетривиален.

(б) Каждый локальный коцикл на $\mathcal{L}$ когомологичен коциклу, кратному $\gamma_{S,R}^{(v)}$. Более того, класс когомологий коцикла $\gamma_{S,R}^{(v)}$ нетривиален, и для каждого когомологически нетривиального локального коцикла найдется мероморфная проективная связность R' , голоморфная вне A , такая, что этот коцикл равен коциклу, кратному $\gamma_{S,R'}^{(v)}$.

(с) Каждый локальный коцикл на $\mathcal{D}^1$ с точностью до кограницы является линейной комбинацией коциклов $\gamma_S^{(f)}$, $\gamma_{S,R}^{(v)}$ и $\gamma_{S,T}^{(m)}$, т.е.

$$\gamma = r_1 \gamma_S^{(f)} + r_2 \gamma_{S,T}^{(m)} + r_3 \gamma_{S,R}^{(v)} + \text{кограница}, \quad r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}. \quad (2.27)$$

Три указанных коцикла линейно независимы в пространстве когомологий. Если коэффициенты r_2 и r_3 линейной комбинации – ненулевые, то мероморфные проективная связность R' и аффинная связность T' , голоморфные вне A , могут быть выбраны так, что $\gamma = r_1 \gamma_S^{(f)} + r_2 \gamma_{S,T'}^{(m)} + r_3 \gamma_{S,R'}^{(v)}$.

2.6. Аффинные алгебры. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная редуктивная алгебра Ли. Выше мы ввели почти градуированную алгебру токов $\overline{\mathfrak{g}}$. В этом пункте мы изучим центральные расширения алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$. Задаваясь инвариантными симметрическими билинейными формами $\alpha(\cdot, \cdot)$, где условие инвариантности означает, что $\alpha([x, y], z) = \alpha(x, [y, z])$, мы определяем такие расширения как обобщение алгебр Каца–Мули аффинного типа. Мы называем их (многоточечными) аффинными алгебрами Ли высших родов, а также алгебрами Кричевера–Новикова аффинного типа. Это векторные пространства вида $\widehat{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}t$, на которых задана скобка Ли

$$[\widehat{x \otimes f}, \widehat{y \otimes g}] = [\widehat{x, y}] \otimes (fg) + \alpha(x, y) \cdot \gamma_{C_S}(f, g) \cdot t, \quad [t, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0, \quad (2.28)$$

где

$$\gamma_{C_S}(f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} f dg \quad (2.29)$$

– геометрический коцикл на алгебре функций, полученный интегрированием по разделяющему контуру C_S . Мы обозначаем это центральное расширение через $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha, S}$. Оно зависит от билинейной формы α . Как обычно, мы полагаем $\widehat{x \otimes f} := (0, x \otimes f)$. Определяющий центральное расширение коцикл $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha, S}$ локален. Следовательно, мы можем продолжить нашу почти градуировку на все центральное расширение, полагая $\deg t := 0$ и $\deg(x \otimes \widehat{A_{n,p}}) := n$. Как и прежде, мы получаем треугольное разложение

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha, S} = \widehat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_- \quad \text{с} \quad \widehat{\mathfrak{g}}_{\pm} \cong \overline{\mathfrak{g}}_{\pm} \quad \text{и} \quad \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} = \overline{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \mathbb{C} \cdot t. \quad (2.30)$$

Соответствующие разложения имеют место для расширенных подалгебр. Среди последних особый интерес представляет

$$\widehat{\mathfrak{g}}^r := \widehat{\mathfrak{g}}_-^{(1)} = \overline{\mathfrak{g}}_-^{(1)} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_-^{(1)}, \quad \widehat{\mathfrak{g}}_+^{*, \text{ext}} = \overline{\mathfrak{g}}_+^* \oplus \mathbb{C}t = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_+^*) \oplus \mathbb{C}t.$$

Вместо интегрирования в (2.29) по разделяющему контуру, мы могли бы интегрировать по любому другому циклу C и получить другое, вообще говоря неэквивалентное и даже не изоморфное, центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha, C}$. К тому же, *a priori* нет никаких причин для того, чтобы произвольно взятый коцикл, задающий центральное расширение алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$, принадлежал этому типу, т.е. получался бы в результате выбора некоторой инвариантной симметрической билинейной формы α и интегрирования 1-формы $f dg$ по циклу.

Прежде чем сформулировать относящиеся сюда результаты, расширим определение $\mathcal{L}$ -инвариантности коциклов на $\overline{\mathfrak{g}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Коцикл γ на $\overline{\mathfrak{g}}$ называется $\mathcal{L}$ -инвариантным, если

$$\gamma(x(e.g), y(h)) + \gamma(x(g), y(e.h)) = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad e \in \mathcal{L}, \quad g, h \in \mathcal{A}. \quad (2.31)$$

Введенные выше коциклы, очевидно, $\mathcal{L}$ -инвариантны.

ТЕОРЕМА 2.7 [24; теорема 3.13, следствие 3.14]. (а) Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная простая алгебра Ли, тогда каждый локальный коцикл на алгебре токов $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ когомологичен коциклу, задаваемому соотношением

$$\gamma(x \otimes f, y \otimes g) = r \frac{\beta(x, y)}{2\pi i} \int_{C_S} f dg, \quad (2.32)$$

где $r \in \mathbb{C}$, а β – форма Картана–Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, γ локален и $\mathcal{L}$ -инвариантен.

(б) Если с самого начала коцикл локален и $\mathcal{L}$ -инвариантен, то он совпадает с коциклом (2.32) при подходящем выборе $r \in \mathbb{C}$.

(с) Если $\mathfrak{g}$ проста, то с точностью до эквивалентности и умножения центрального элемента на скаляр существует только одно нетривиальное почти градуированное центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}}$ соответствующей многоточечной алгебры токов высшего рода $\overline{\mathfrak{g}}$. Оно задается коциклом (2.32).

Далее, пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная комплексная редуктивная конечномерная алгебра Ли и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_M \quad (2.33)$$

– ее разложение на абелев идеал $\mathfrak{g}_0$ и простые идеалы $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_M$. Для соответствующей алгебры токов имеем $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}_0 \oplus \overline{\mathfrak{g}}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{\mathfrak{g}}_M$.

ТЕОРЕМА 2.8 [24; теорема 3.20]. (а) Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная редуктивная алгебра Ли. Если дан локальный коцикл γ на $\overline{\mathfrak{g}}$, ограничение которого на $\overline{\mathfrak{g}}_0$ является $\mathcal{L}$ -инвариантным, то существует симметрическая инвариантная билинейная форма α на $\mathfrak{g}$ такая, что γ когомологичен коциклу

$$\gamma'_{\alpha, S}(x \otimes f, y \otimes g) = \frac{\alpha(x, y)}{2\pi i} \int_{C_S} f dg. \quad (2.34)$$

Обратно: каждая такая форма α определяет локальный коцикл.

(б) Если с самого начала коцикл γ локален и $\mathcal{L}$ -инвариантен на всей алгебре $\overline{\mathfrak{g}}$, то он совпадает с коциклом $\gamma'_{\alpha, S}$.

(с)

$$\dim H_{\text{loc}, \mathcal{L}}^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C}) = \frac{n(n+1)}{2} + M. \quad (2.35)$$

Здесь $H_{\text{loc}, \mathcal{L}}^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ обозначает подпространство когомологических классов, представленных локальными $\mathcal{L}$ -инвариантными коциклами.

2.7. Центральные расширения алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Напомним, что $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1 = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$ с дополнительным соотношением $[e, xA] = x(e \cdot A)$, см. (2.4). Имеется короткая точная последовательность алгебр Ли

$$0 \longrightarrow \bar{\mathfrak{g}} \xrightarrow{i_1} \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1 \xrightarrow{p_2} \mathcal{L} \longrightarrow 0. \quad (2.36)$$

Вначале еще раз отметим, что ввиду почти градуированности $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ и того, что $\mathcal{A}$ – почти градуированный $\mathcal{L}$ -модуль, алгебра $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ является почти градуированной. Для этой алгебры, как и для рассмотренных выше, локальные коциклы и центральные расширения изучены в [24] (отсутствие смешивающих коциклов в полупростом случае замечено в [31]). Ограничивая локальный коцикл алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ на подалгебру $\bar{\mathfrak{g}}$, получим локальный коцикл на последней. В полупростом случае имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.9. (а) Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли и γ – локальный коцикл на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Тогда на $\mathfrak{g}$ существует симметрическая инвариантная билинейная форма α такая, что коцикл γ когомологичен линейной комбинации локального коцикла $\gamma_{\alpha, S}$, заданного соотношением (2.34), и локального коцикла $\gamma_{S, R}^{(v)}$ (2.25) (где $C = C_S$) алгебры векторных полей $\mathcal{L}$.

(б) Если $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, то коцикл $\gamma_{\alpha, S}$ кратен стандартному коциклу (2.32) на $\mathfrak{g}$.

(с) $\dim H_{\text{loc}}^2(\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1, \mathbb{C}) = M + 1$, где M – число простых идеалов в $\mathfrak{g}$.

В редуктивном случае оказывается, что ограничение коцикла алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ на абелев идеал $\bar{\mathfrak{g}}_0$ является $\mathcal{L}$ -инвариантным. В обобщение смешивающего коцикла для $\mathcal{D}^1$ мы получаем для каждой линейной формы $\phi \in \mathfrak{g}^*$, обращающейся в нуль на $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_M$, локальный коцикл

$$\gamma_{\phi, S}(e, x(g)) := \frac{\phi(x)}{2\pi i} \int_{C_S} (\tilde{e}g'' + T(\tilde{e}g')) dz. \quad (2.37)$$

Здесь, как и выше, T – мероморфная аффинная связность, имеющая полюсы только в точках множества A .

ТЕОРЕМА 2.10 [24; теорема 4.11]. (а) Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная редуктивная алгебра Ли. Для каждого локального коцикла γ на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ существуют симметрическая инвариантная билинейная форма α на $\mathfrak{g}$, линейная форма ϕ на $\mathfrak{g}$, которая обращается в нуль на $\mathfrak{g}'$, и $r \in \mathbb{C}$ такие, что γ когомологичен

$$\gamma' = \gamma_{\alpha, S} + \gamma_{\phi, S} + r\gamma_{S, R}^{(v)}, \quad (2.38)$$

коцикл $\gamma_{\alpha, S}$ на алгебре токов дается формулой (2.34), смешивающий коцикл $\gamma_{\phi, S}$ – формулой (2.37) и коцикл $\gamma_{S, R}^{(v)}$ на алгебре векторных полей – формулой (2.25). Обратно: любые такие $\alpha, \phi, r \in \mathbb{C}$ определяют локальный коцикл.

(б) Размерность пространства классов локальных коциклов $H_{\text{loc}}^2(\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1, \mathbb{C})$ равна $\frac{n(n+1)}{2} + n + M + 1$.

2.8. Локальные коциклы для $\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(n)$. Рассмотрим $\mathfrak{sl}(n)$ – алгебру Ли бесследовых комплексных матриц размера $n \times n$. Единственной инвариантной симметрической билинейной формой на ней, с точностью до умножения на скаляр, является форма Картана–Киллинга $\beta(x, y) = \text{tr}(xy)$. Из теорем 2.2 и 2.4 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. (а) *Каждый локальный коцикл на алгебре токов $\overline{\mathfrak{sl}}(n)$ когомологичен коциклу*

$$\gamma(x(g), y(h)) = r \frac{\text{tr}(xy)}{2\pi i} \int_{C_S} g \, dh, \quad r \in \mathbb{C}. \quad (2.39)$$

(б) *Каждый $\mathcal{L}$ -инвариантный локальный коцикл совпадает с (2.39) при подходящем выборе r .*

(с) *Каждый локальный коцикл на алгебре дифференциальных операторов $\mathcal{D}_{\mathfrak{sl}(n)}^1$ когомологичен линейной комбинации (2.39) и стандартного локального коцикла $\gamma_{S,R}^{(v)}$ алгебры векторных полей. В частности, отсутствуют смешивающие коциклы.*

Займемся, далее, алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n)$ всех комплексных матриц размера $n \times n$. Она раскладывается (ср. с (2.33)) в прямую сумму 1-мерного центра $\mathfrak{s}(n)$ и простого идеала $\mathfrak{sl}(n)$: $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{s}(n) \oplus \mathfrak{sl}(n) \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(n)$, где $\mathfrak{s}(n)$ состоит из скалярных матриц размера $n \times n$.

Пространство симметрических инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{gl}(n)$ 2-мерно. Базис составляют формы

$$\alpha_1(x, y) = \text{tr}(xy) \quad \text{и} \quad \alpha_2(x, y) = \text{tr}(x) \text{tr}(y). \quad (2.40)$$

Форма α_1 является продолжением на $\mathfrak{gl}(n)$ формы Картана–Киллинга алгебры $\mathfrak{sl}(n)$ и инвариантна относительно $\mathfrak{gl}(n)$. Из теорем 2.3 и 2.5 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. (а) *Коцикл γ на $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ локален и обладает $\mathcal{L}$ -инвариантным ограничением на $\mathfrak{s}(n)$ тогда и только тогда, когда он когомологичен линейной комбинации следующих двух коциклов:*

$$\gamma_1(x(g), y(h)) = \frac{\text{tr}(xy)}{2\pi i} \int_{C_S} g \, dh, \quad \gamma_2(x(g), y(h)) = \frac{\text{tr}(x) \text{tr}(y)}{2\pi i} \int_{C_S} g \, dh. \quad (2.41)$$

(б) *Если локальный коцикл γ на $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ $\mathcal{L}$ -инвариантен, то γ является линейной комбинацией коциклов (2.41).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. (а) *Каждый локальный коцикл γ на $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}(n)}^1$ когомологичен линейной комбинации коциклов γ_1 и γ_2 , определенных соотношениями (2.41), смешивающего коцикла*

$$\gamma_{3,T}(e, x(g)) = \frac{\text{tr}(x)}{2\pi i} \int_{C_S} (\tilde{e}g'' + T\tilde{e}g') \, dz \quad (2.42)$$

и стандартного локального коцикла $\gamma_{S,R}^{(v)}$ алгебры векторных полей, т.е.

$$\gamma = r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + r_3\gamma_{3,T} + r_4\gamma_{S,R}^{(v)} + \text{кограница} \quad (2.43)$$

для подходящих $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{C}$.

(b) Если коцикл γ локален и его ограничение на $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ $\mathcal{L}$ -инвариантно, а $r_3, r_4 \neq 0$, то существуют аффинная связность T и проективная связность R , голоморфные вне A , при которых коцикл γ представим в виде (2.43) с нулевой кограницей.

(c) $\dim H_{\text{loc}}^2(\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}(n)}^1, \mathbb{C}) = 4$.

Оказывается, ограничения коциклов алгебры дифференциальных операторов на $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$ когомологичны $\mathcal{L}$ -инвариантным коциклам. Более того, ограничения на $\mathfrak{s}(n)$ являются $\mathcal{L}$ -инвариантными [24; предложение 4.10].

3. Представления многоточечных алгебр Кричевера–Новикова

3.1. Проективные $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модули. Пусть $\mathcal{V}$ – произвольная алгебра Ли, V – векторное пространство и $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \text{End}(V)$ – линейное отображение. Пространство V называется *проективным $\mathcal{V}$ -модулем*, если для любой пары $f, g \in \mathcal{V}$ существует $\gamma(f, g) \in \mathbb{C}$ такое, что

$$\pi([f, g]) = [\pi(f), \pi(g)] + \gamma(f, g) \cdot \text{id}. \quad (3.1)$$

В этом случае π также называется проективным действием. Мы часто пишем просто fv вместо $\pi(f)(v)$.

Если V – проективный $\mathcal{V}$ -модуль, то γ с необходимостью является 2-коциклом на алгебре Ли. С помощью соотношения (2.20) коцикл, а следовательно и проективное действие π , определяет центральное расширение $\widehat{\mathcal{V}}_\gamma = \widehat{\mathcal{V}}_\pi$ алгебры $\mathcal{V}$. Очевидно, полагая $\pi(t) = \text{id}$, проективное действие можно расширить до обычного действия алгебры Ли $\widehat{\mathcal{V}}_\gamma$ на V . Обычно мы опускаем индексы γ, π при $\widehat{\mathcal{V}}$, если они ясны из контекста. Следует помнить, что коцикл, определяющий $\widehat{\mathcal{V}}$, а также класс эквивалентности и даже изоморфизма этого центрального расширения, зависит от данного проективного действия. В конкретных случаях, рассмотренных ниже, мы в состоянии указать этот коцикл.

Пусть $\mathcal{V}$ – почти градуированная алгебра Ли. Проективный $\mathcal{V}$ -модуль V называется *допустимым*, если для каждого $v \in V$ существует $k(v) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $f \in \mathcal{V}$, для которых $\deg f \geq k(v)$, имеем $fv = 0$. Под почти градуированным проективным модулем V над почти градуированной алгеброй $\mathcal{V}$ мы понимаем только такие структуры почти градуированного проективного $\mathcal{V}$ -модуля на V , что соответствующий коцикл локален (см. определение 2.3). Мы называем почти градуированный модуль V *модулем старшего веса (вакуумным модулем)*, если существует элемент $|0\rangle \in V$ такой, что $f|0\rangle = 0$ для всех f таких, что $\deg f > 0$, и $V = U(\mathcal{V})|0\rangle$, где $U(\cdot)$ обозначает универсальную обертывающую алгебру. Элемент $|0\rangle$ называется вакуумным вектором. Очевидно, вакуумные модули допустимы.

Ниже мы будем предполагать, что V – допустимый проективный почти градуированный $\overline{\mathfrak{g}}$ -модуль (мы также будем писать *проективное представление*). В нашем

основном примере – *фермионных представлениях*, которые будут обсуждаться в следующем пункте – мы даже имеем структуру $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модуля. Более того, эти модули порождены вакуумными векторами как над $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$, так и над $\bar{\mathfrak{g}}$.

В действительности, мы в основном заинтересованы в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$. В частности, фермионные модули (фиксированного заряда) в этом случае неприводимы. Заметим, что для конструкций нижеследующего раздела 4 нам достаточно структуры (проективного) $\bar{\mathfrak{g}}$ -модуля на V ; мы будем предполагать неприводимость этого модуля.

3.2. Фермионные представления. В этом пункте мы кратко изложим конструкцию проективного фермионного $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модуля [30], [31], [33]. Она использует как важный ингредиент базисы Кричевера–Новикова в пространствах сечений голоморфных векторных расслоений. Эти базисы введены для двухточечного случая в [13] и обобщены на многоточечный случай в [33], где комбинируются подходы [13] и п. 2.3 настоящей работы (восходящего к [17], [18]). Мы отсылаем к цитированным работам за деталями. Здесь мы только упомянем, что указанные базисы задаются асимптотическим поведением своих элементов в отмеченных точках, и их свойства аналогичны свойствам, описанным в п. 2.3. В частности, они почти градуированы относительно действия алгебр Кричевера–Новикова.

Рассмотрим на Σ голоморфное расслоение F ранга r и степени gr (g – род римановой поверхности Σ). Пусть $\Gamma(F)$ обозначает пространство мероморфных сечений расслоения F , голоморфных вне точек $P_1, \dots, P_N, P_\infty$. Пусть τ – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V_τ . Положим $\Gamma_{F,\tau} := \Gamma(F) \otimes V_\tau$.

Определим $\bar{\mathfrak{g}}$ -действие на $\Gamma_{F,\tau}$ следующим образом:

$$(x \otimes A)(s \otimes v) = (As) \otimes \tau(x)v \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{g}, A \in \mathcal{A}, s \in \Gamma(F), v \in V_\tau. \quad (3.2)$$

Чтобы определить на $\Gamma(F)$ действие $\mathcal{L}$, выберем на F мероморфную (следовательно, плоскую) связность ∇ , имеющую логарифмические особенности в $P_1, \dots, P_N$ и P_∞ (см. детали в [31]). Ввиду плоскостности имеем $\nabla_{[e,f]} = [\nabla_e, \nabla_f]$ для всех $e, f \in \mathcal{L}$. Следовательно, ∇ определяет представление алгебры $\mathcal{L}$ в $\Gamma(F)$.

По определению связности, для любых $s \in \Gamma(F)$, $e \in \mathcal{L}$ и $A \in \mathcal{A}$ имеем $\nabla_e(As) = (e.A)s + A\nabla_e s$, где $e.A$ обозначает производную Ли. Следовательно, $[\nabla_e, A] = e.A$, т.е. отображение $e + A \rightarrow \nabla_e + A$ дает представление алгебры $\mathcal{D}^1$ в пространстве $\Gamma(F)$.

Определим соответствующее действие алгебры $\mathcal{L}$ на $\Gamma_{F,\tau}$:

$$e(s \otimes v) = \nabla_e s \otimes v \quad \text{для всех } e \in \mathcal{L}, s \in \Gamma(F), v \in V_\tau. \quad (3.3)$$

Можно непосредственно проверить, что (3.2) и (3.3) задают представление алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ в пространстве $\Gamma_{F,\tau}$.

Выберем базис Кричевера–Новикова в пространстве $\Gamma(F)$ [33] и базис весовых векторов $\{v_i \mid 1 \leq i \leq \dim V_\tau\}$ в V_τ . Каждый базисный элемент в $\Gamma(F)$ определяется его *степенью* $n \in \mathbb{Z}$, числом p отмеченных точек: $1 \leq p \leq N$, и целым числом j : $0 \leq j \leq r - 1$. Обозначим элемент, соответствующий тройке (n, p, j) , через $\psi_{n,p,j}$. Введем $\psi_{n,p,j}^i = \psi_{n,p,j} \otimes v_i$. Введем линейный порядок на множестве элементов $\psi_{n,p,j}^i$, занумеровав в лексикографически возрастающем порядке четверки n, p, j, i . Таким образом, мы полагаем $\psi_M = \psi_{n,p,j}^i$, где $M = M(n, p, j, i) \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 3.1 [33]. По отношению к индексу M модуль $\Gamma_{F,\tau}$ является почти градуированным $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модулем.

Доказательство почти градуированности аналогично данному в [30], [31] для двухточечного случая.

Заключительный шаг конструкции фермионного расслоения, соответствующего паре (F, τ) , – это переход к пространству полубесконечных мономов на $\Gamma_{F,\tau}$.

Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{H}_{F,\tau}$, порожденное над $\mathbb{C}$ формальными выражениями (полубесконечными мономами) вида $\Phi = \psi_{N_0} \wedge \psi_{N_1} \wedge \dots$, где ψ_{N_i} – введенные выше базисные элементы пространства $\Gamma_{F,\tau}$, индексы строго возрастают, т.е. $N_0 < N_1 < \dots$, и $N_k = k + m$ для всех достаточно больших k и некоторого m (зависящего от монома). Следуя [8], назовем m зарядом монома. Для монома Φ заряда m его степень определяется следующим образом:

$$\deg \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} (N_k - k - m). \quad (3.4)$$

Заметим, что для фиксированного n в нумерации элементов $\psi_{n,p,j}^i$ имеется произвол; только что определенная степень не зависит от этого произвола.

Мы хотим продолжить действие алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ на $\Gamma_{F,\tau}$ до действия на $\mathcal{H}_{F,\tau}$. Здесь мы даем краткое описание конструкции, отсылая к [30], [31] за деталями. Предполагая известным действие $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ на ψ_{N_i} , подействуем базисным элементом алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ на Φ по правилу Лейбница. Если в процессе встретится моном с одним и тем же ψ_N в разных позициях, его следует положить равным нулю. Если встретится пара $\psi_N \wedge \psi_{N'}$ в неправильном порядке ($N > N'$), этот порядок следует изменить, а также изменить знак перед всем мономом. Таким образом следует поступать пока все базисные элементы, входящие в моном, не окажутся в строго возрастающем порядке. Благодаря почти градуированности действия $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ на $\Gamma_{F,\tau}$ и упомянутой выше стабилизации ($N_k = k + m$ при $k \sim \infty$), описанный алгоритм приведет к корректно определенному результату для всех базисных элементов алгебры, кроме конечного их числа. В отношении последних применим стандартный процесс регуляризации [8], [11], [12], [20] (см. доказательство леммы 4.1). Таким образом действие в пространстве $\Gamma_{F,\tau}$ продолжается до проективного действия в $\mathcal{H}_{F,\tau}$.

Пусть $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ – подпространство в $\mathcal{H}_{F,\tau}$, порожденное полубесконечными мономами заряда m . Это подпространство инвариантно относительно проективного действия алгебры $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Это вытекает, как и в классической ситуации, из того факта, что мономы, которые возникают в результате действия $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$, имеют ту же “длину” и тот же “хвост”, что и моном, с которого мы начали. Следовательно, для каждого m пространство $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ само является проективным $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модулем, и имеет место разложение $\mathcal{H}_{F,\tau} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ в прямую сумму проективных $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модулей. Мы называем (проективные) модули $\mathcal{H}_{F,\tau}$, $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ фермионными представлениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ – подмодуль в $\mathcal{H}_{F,\tau}$ заряда m .

(а) Однородные пространства $(\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)})_d$ степени d (определенной соотношением (3.4)) конечномерны и $\dim(\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)})_d = p(-d)$ для $d \leq 0$, где p – функция разбиения. Если $d > 0$, то $(\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)})_d = 0$.

(b) Коцикл γ на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$, определенный проективным представлением, локален и ограничен сверху нулем.

(c) $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ является почти градуированным проективным $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Заметим, что все слагаемые в (3.4) неположительны, откуда следует, что $d \leq 0$. Число мономов данной степени d равно, следовательно, числу разбиений d в сумму отрицательных слагаемых, откуда следуют оба утверждения данного пункта.

(b) и (c) доказываются так же, как в двухточечном случае, [30], [31].

Из этого утверждения и классификационных результатов теоремы 2.10 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ является модулем над некоторым центральным расширением алгебры Ли $\widehat{\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1}$, причем коцикл последнего локален и имеет вид (2.38).

Рассмотрим центральное расширение алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$, индуцированное ее вложением (как линейного пространства) в $\widehat{\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1}$. Коцикл этого расширения когомологичен $\mathcal{L}$ -инвариантному коциклу, а следовательно, и геометрическому коциклу вида (2.28) с подходящей инвариантной симметрической билинейной формой α (теорема 2.8). В частности, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ класс когомологий коцикла дается предложением 2.12.

Под допустимостью представления алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространстве V мы понимаем допустимость (в определенном выше смысле) соответствующего проективного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ и требование, чтобы центральный элемент t действовал как скаляр $c \cdot \text{id}$, $c \in \mathbb{C}$. Число c называется *уровнем* $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуля V . Из определений немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Представление алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространстве $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ является допустимым.

3.3. Представление Сугавары. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная редуктивная алгебра Ли. Зафиксируем инвариантную симметрическую билинейную форму α на $\mathfrak{g}$. Начиная с этого пункта мы предполагаем, что α невырождено. Через $\widehat{\mathfrak{g}}$ обозначим стандартное центральное расширение (зависящее от билинейной формы α), введенное в п. 2.6 (соотношения (2.28) и (2.29)), со структурой почти градуированной алгебры. Пусть V – произвольное допустимое представление уровня c .

Если $\mathfrak{g}$ – коммутативная или простая, то для каждого допустимого представления алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ некритического уровня (т.е. уровня, отличного от числа, противоположного дуальному числу Кокстера в простом случае или отличного от нуля в коммутативном случае) конструкция Сугавары дает проективное представление алгебры $\mathcal{L}$ векторных полей Кричевера–Новикова. Это представление называется *представлением Сугавары*. Для двухточечного случая абелева версия данной конструкции предложена в [11]. Неабелев случай позже рассмотрен в [2], [25]. В [25] была также дана многоточечная версия. Заметим, что положительные уровни не являются критическими. Для произвольной комплексной редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представление Сугавары определяется как некоторая линейная комбинация представлений Сугавары ее простых идеалов [7], [8; лекция 10].

Ввиду важности конструкции Сугавары в нашем контексте мы опишем ее подробнее. Для любых $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$ обозначим через $u(A)$ оператор в V , соответствующий

элементу $u \otimes A$. Мы также обозначаем элемент вида $u(A_{n,p})$ через $u(n, p)$. Выберем базис $u_i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, алгебры $\mathfrak{g}$ и двойственный к нему базис $u^i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, по отношению к форме α . Элемент Казимира $\Omega^0 = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} u_i u^i$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ не зависит от выбора базиса. Чтобы упростить обозначения, мы пишем $u(n, p)u(m, q)$ вместо $\sum_i u_i(n, p)u^i(m, q)$.

Введем оператор Сугавары высшего рода (также называемый оператором Сегала или тензором энергии-импульса):

$$T(P) := \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} :u(n, p)u(m, s): \omega^{n,p}(P) \omega^{m,s}(P). \quad (3.5)$$

С помощью $:\dots:$ мы обозначаем некоторое нормальное упорядочение. В этом пункте индексы суммирования n, m пробегает $\mathbb{Z}$, а p, s – множество $\{1, \dots, N\}$. Точная форма нормального упорядочения здесь не важна. Как пример, мы можем взять следующее “стандартное нормальное упорядочение” ($x, y \in \mathfrak{g}$):

$$:x(n, p)y(m, r): := \begin{cases} x(n, p)y(m, r), & n \leq m, \\ y(m, r)x(n, p), & n > m. \end{cases} \quad (3.6)$$

Выражение $T(P)$ можно рассматривать как формальный ряд квадратичных дифференциалов от переменной P с операторнозначными коэффициентами. Раскладывая его по базису $\Omega^{k,r}$ квадратичных дифференциалов, получим

$$T(P) = \sum_k \sum_r L_{k,r} \cdot \Omega^{k,r}(P), \quad (3.7)$$

где

$$L_{k,r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} T(P) e_{k,r}(P) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \sum_{p,s} :u(n, p)u(m, s): l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}, \quad (3.8)$$

$$l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)} := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} \omega^{n,p}(P) \omega^{m,s}(P) e_{k,r}(P).$$

Формально, операторы $L_{k,r}$ являются бесконечными двойными суммами. Однако для данных k и m коэффициент $l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}$ оказывается ненулевым только для конечного множества значений n . Это можно проверить с помощью рассмотрения вычетов подынтегральных выражений. После применения остающейся бесконечной суммы к некоторому фиксированному элементу $v \in V$, ввиду нормального упорядочения и допустимости представления, получаем лишь конечное число операторов, нетривиально действующих на данный элемент.

В [25] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная абелева или простая алгебра Ли и $2k$ – собственное значение ее оператора Казимира в присоединенном представлении. Пусть α – форма Картана–Киллинга в простом случае или любая невырожденная билинейная форма в абелевом случае и $\widehat{\mathfrak{g}}$ – соответствующее центральное расширение. Пусть V – допустимый почти градуированный $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуль уровня s . Если $s + k \neq 0$, то нормализованные “моды”

$$L_{k,r}^* = \frac{-1}{2(c+k)} \sum_{n,m} \sum_{p,s} :u(n, p)u(m, s): l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)} \quad (3.9)$$

оператора Сугавары являются корректно определенными операторами на V и определяют допустимое проективное представление алгебры $\mathcal{L}$. Соответствующий коцикл на алгебре $\mathcal{L}$ локален.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду локальности коцикла и теоремы 2.5, коцикл кратен (2.25), где $C = C_S$. В частности, центральное расширение $\widehat{\mathcal{L}}$, для которого представление Сугавары является настоящим (а не проективным), определено с точностью до изоморфизма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Представление Сугавары задает на V структуру почти градуированного $\widehat{\mathcal{L}}$ -модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что существуют постоянные M_1, M_2 такие, что для каждого фиксированного однородного элемента $\psi_s \in V$ степени s и каждого k имеем

$$k + s + M_1 \leq \deg(L_{k,r}^* \psi_s) \leq k + s + M_2. \quad (3.10)$$

Рассмотрим коэффициенты $l_{(k,r)}^{(n,p)(m,s)}$ в (3.9), заданные интегралами (3.8). Интеграл может быть ненулевым, только если подынтегральное выражение имеет полюсы в точках множества I и в точке P_∞ . Воспользовавшись явными формулами (2.8) и (2.9) для порядков в этих точках, получим

$$k \leq n + m \leq k + C(g, N) \quad (3.11)$$

с рациональной константой $C(g, N) \geq 0$, зависящей от рода g и числа отмеченных точек N . Ввиду почти градуированности V как $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуля, существуют константы c_1 и c_2 такие, что для всех m, r, s

$$m + s + c_1 \leq \deg(u(m, r) \psi_s) \leq m + s + c_2, \quad (3.12)$$

если $u(m, r) \psi_s \neq 0$. Следовательно,

$$n + m + s + 2c_1 \leq \deg(:u(n, p)u(m, r): \psi_s) \leq n + m + s + 2c_2, \quad (3.13)$$

если $:u(n, p)u(m, r): \psi_s \neq 0$. Используя (3.11), мы получим требуемое соотношение (3.10), если положим $M_1 = 2c_1$ и $M_2 = 2c_2 + C(g, N)$.

Операторы $L_{k,r}^*, L_{k,r}$ мы также называем операторами Сугавары. Для $e = \sum_{n,p} a_{n,p} e_{n,p} \in \mathcal{L}$ ($a_{n,p} \in \mathbb{C}$) мы полагаем $T[e] = \sum_{n,p} a_{n,p} L_{n,p}^*$ и получаем проективное представление T алгебры $\mathcal{L}$. Оно называется *представлением Сугавары* алгебры Ли $\mathcal{L}$, соответствующим данному допустимому представлению V алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Ввиду двойственности Кричевера–Новикова, оператор Сугавары $T[e]$, соответствующий векторному полю $e \in \mathcal{L}$, может быть эквивалентно определен как

$$T[e] = \frac{-1}{c+k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_S} T(P) e(P). \quad (3.14)$$

Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли, имеющая разложение (2.33). Элементы $x \in \mathfrak{g}$ можно представить в виде $x = \sum_{i=0}^n x_i$, где $x_i \in \mathfrak{g}_i$. Пусть α – симметрическая инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Из ее инвариантности следует, что $\alpha(x_i, x_j) = 0$

для $i \neq j$, т.е. разложение ортогонально по отношению к α . Ограничивая α на $\mathfrak{g}_i$, получим билинейную инвариантную симметрическую форму на $\mathfrak{g}_i$, кратную, следовательно, форме Картана–Киллинга (на $\mathfrak{g}_0$ получим некоторую симметрическую билинейную форму). Форма α называется *нормализованной*, если ее ограничения на простые идеалы алгебры $\mathfrak{g}$ равны соответствующим формам Картана–Киллинга.

Пусть γ – локальный коцикл на $\widehat{\mathfrak{g}}$ (где $\mathfrak{g}$ редуктивна), $A, B \in \mathcal{A}$ и $x, y \in \mathfrak{g}$. Из определения коцикла следует (см. [24; лемма 3.11]), что $\gamma(x_i A, y_j B) = 0$ для $i \neq j$ (для y предполагается такое же разложение, как выше для x). Отсюда следует

$$\gamma(xA, yB) = \sum_{i=0}^M \gamma(x_i A, y_i B). \quad (3.15)$$

Если дано допустимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространстве V , получим представления ее идеалов $\widehat{\mathfrak{g}}_i$ в том же пространстве. Для них мы можем определить (нормированные) операторы Сугавары $T_i[e]$, $i = 0, 1, \dots, M$. Мы полагаем

$$T[e] := \sum_{i=0}^M T_i[e]. \quad (3.16)$$

Следующая лемма выражает фундаментальное свойство представления Сугавары. Она была доказана в [25] для случая абелевых и простых алгебр. Здесь мы показываем, как обобщить результат на общий редуктивный случай.

ЛЕММА 3.7. Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли, на которой выбрана нормализованная форма α , и для произвольного $e \in \mathcal{L}$ пусть $T[e]$ – определенный выше оператор. Тогда T является представлением некоторого центрального расширения $\widehat{\mathcal{L}}$ алгебры векторных полей и для любых $x \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$ мы имеем

$$[T[e], x(A)] = x(e \cdot A). \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x, y \in \mathfrak{g}$ обозначим через x_i, y_j их компоненты, как и выше. Тогда $[x_i(A), y_j(B)] = [x_i, y_j](AB) + \gamma(x_i A, y_j B) c \cdot \text{id}$. В частности, если $i \neq j$, мы получаем, что x_i и x_j коммутируют, а коцикл обращается в нуль. Следовательно, элементы $x_i(A), y_j(B)$ также коммутируют. Пусть T_k – представление Сугавары, соответствующее представлению $\widehat{\mathfrak{g}}_k$ в V . Так как операторы представления T_i выражены через операторы $x_i(A)$, а операторы T_j – через $x_j(A)$, представления T_i и T_j при $i \neq j$ коммутируют. Значит, T – представление $\widehat{\mathcal{L}}$. Более того, для $x_i \in \mathfrak{g}_i$, $x_j \in \mathfrak{g}_j$, $A \in \mathcal{A}$, $e \in \mathcal{L}$ имеем $[T_j[e], x_i(A)] = 0$. Если $\mathfrak{g}$ – простая или коммутативная, то (3.17) доказано в [25] (см. также [26]). Следовательно,

$$[T_k[e], x_k(A)] = x_k(e \cdot A), \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

Отсюда имеем

$$[T[e], x(A)] = \left[\sum_{k=0}^M T_k[e], \sum_{i=0}^M x_i(A) \right] = \sum_{i=0}^M x_i(e \cdot A) = x(e \cdot A).$$

Отсюда получаем требуемое соотношение.

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, когда имеется только один простой идеал, выполнение условия, что форма α нормализована, всегда может быть достигнуто с помощью изменения уровня. Поэтому для допустимых (в частности, фермионных) представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}(n)}$ соотношение (3.17) справедливо.

4. Модули кривых с отмеченными точками, конформные блоки и проективно плоская связность

4.1. Пространство модулей $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ и пучок конформных блоков. В [26] мы описали пространства модулей кривых, обычно встречающиеся в 2-мерных конформных теориях поля. Здесь мы немного расширим класс этих пространств. Обозначим через $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ пространство модулей гладких проективных кривых рода g (над $\mathbb{C}$) с $N + 1$ различными упорядоченными отмеченными точками, фиксированными k -струями локальных координат в первых N точках и фиксированной p -струей локальной координаты в последней точке. Элементы пространства $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ задаются в виде

$$\tilde{b}^{(k,p)} = [\Sigma, P_1, \dots, P_N, P_\infty, z_1^{(k)}, \dots, z_N^{(k)}, z_\infty^{(p)}], \quad (4.1)$$

где Σ – гладкая проективная кривая рода g , P_i ($i = 1, \dots, N, \infty$) – различные точки на Σ , z_i – координата в точке P_i (где $z_i(P_i) = 0$) и $z_i^{(l)}$ – l -струя локальной координаты z_i ($l \in \mathbb{N}_0$). Здесь $[\dots]$ обозначает класс эквивалентности таких наборов в следующем смысле. Два набора, представляющие $\tilde{b}^{(k,p)}$ и $\tilde{b}^{(k,p)'}$, эквивалентны, если существует алгебраический изоморфизм $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ с $\phi(P_i) = P'_i$ для $i = 1, \dots, N, \infty$ такой, что после отождествления с помощью ϕ мы имеем

$$z'_i = z_i + O(z_i^{k+1}), \quad 1, \dots, N, \quad \text{и} \quad z'_\infty = z_\infty + O(z_\infty^{p+1}). \quad (4.2)$$

Для двух специальных случаев мы введем те же обозначения, что и в [26]: $\mathcal{M}_{g,N+1} = \mathcal{M}_{g,N+1}^{(0,0)}$ и $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)} = \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,1)}$. “Забывая” координаты, или струи высших порядков, мы получаем естественные проекции

$$\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,p)} \rightarrow \mathcal{M}_{g,N+1}, \quad \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)} \rightarrow \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k',p')} \quad (4.3)$$

для любых $k' \leq k$ и $p' \leq p$. В этой статье (как и в предыдущей статье [26]) мы имеем дело только с локальной ситуацией, в окрестности точки пространства модулей, отвечающей кривой и отмеченным точкам общего положения. Пусть $\tilde{W} \subseteq \mathcal{M}_{g,N+1}$ – открытое множество, содержащее такую точку общего положения $\tilde{b} = [\Sigma, P_1, P_2, \dots, P_N, P_\infty]$. Общая кривая рода $g \geq 2$ не имеет нетривиальных инфинитезимальных автоморфизмов, поэтому мы можем предполагать, что существует универсальное семейство кривых с отмеченными точками над $\tilde{W}$. Из этого, в частности, следует, что имеется собственное плоское семейство гладких кривых над $\tilde{W}$

$$\pi: \mathcal{U} \rightarrow \tilde{W} \quad (4.4)$$

такое, что для точек $\tilde{b} = [\Sigma, P_1, \dots, P_N, P_\infty] \in \tilde{W}$ имеем $\pi^{-1}(\tilde{b}) = \Sigma$ и сечения, определенные соотношением

$$\sigma_i: \tilde{W} \rightarrow \mathcal{U}, \quad \sigma_i(\tilde{b}) = P_i, \quad 1, \dots, N, \infty, \quad (4.5)$$

голоморфны. За дальнейшими объяснениями мы отсылаем к [35; разделы 1.2, 1.3], в частности, см. теорему 1.2.9 работы [35].

Если мы “забудем” точку P_∞ , мы получим отображения

$$\mathcal{M}_{g,N+1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,N}, \quad \mathcal{M}_{g,N+1}^{(0,p)} \rightarrow \mathcal{M}_{g,N}, \quad \mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)} \rightarrow \mathcal{M}_{g,N}^{(k)}. \quad (4.6)$$

Зафиксируем голоморфное сечение $\widehat{\sigma}_\infty$ универсального семейства кривых (без отмеченных точек). В частности, для каждой кривой можно выбрать точку, аналитически зависящую от модулей (напомним, что мы находимся в локальной ситуации общего положения). Аналитическое подмножество

$$W' := \{\tilde{b} = [\Sigma, P_1, \dots, P_N, P_\infty] \mid P_\infty = \widehat{\sigma}_\infty([\Sigma])\} \subseteq \widetilde{W} \quad (4.7)$$

можно отождествить с открытым подмножеством W пространства $\mathcal{M}_{g,N}$, полагая

$$\tilde{b} = [(\Sigma, P_1, \dots, P_N, \widehat{\sigma}_\infty([\Sigma]))] \rightarrow b = [(\Sigma, P_1, \dots, P_N)]. \quad (4.8)$$

Ввиду общности положения, отображение взаимно однозначно.

Выбирая не только сечение $\widehat{\sigma}_\infty$, но и его инфинитезимальную окрестность p -го порядка, мы можем получить отождествление открытого подмножества W пространства $\mathcal{M}_{g,N}$ с аналитическим подмножеством $W'^{(p)}$ множества $\widetilde{W}^{(0,p)}$ в пространстве $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(0,p)}$. Оно определяется аналогично W' .

Все эти рассуждения остаются справедливыми для случая струй бесконечного порядка (локальных координат в P_∞). Мы получим в этом случае пространство модулей $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,\infty)}$.

В точках общего положения пространства модулей $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(k,p)}$ являются гладкими. Обозначим через S дивизор $S = \sum_{i=1}^N P_i$ на Σ . Касательное пространство $T_{\tilde{b}^{(1,p)}} \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,p)}$ можно отождествить с пространством когомологий $H^1(M, T_M(-2S - (p+1)P_\infty))$. Как и в [26; предложение 4.4 и теорема 4.5], мы получаем, что существует сюръективное линейное отображение алгебры $\mathcal{L}$ векторных полей Кричевера–Новикова в пространство когомологий

$$\theta = \theta_p: \mathcal{L} \rightarrow H^1(M, T_M(-2S - (p+1)P_\infty)) \quad (4.9)$$

такое, что ограничение θ на следующие подпространства дает изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^{(p)} &\cong H^1(M, T_M(-2S - (p+1)P_\infty)) \cong T_{\tilde{b}^{(1,p)}} \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,p)}, \\ \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^{(p)} &\cong H^1(M, T_M(-S - (p+1)P_\infty)) \cong T_{\tilde{b}^{(0,p)}} \mathcal{M}_{g,N+1}, \\ \mathcal{L}_{(0)}^{(p)} &\cong H^1(M, T_M(-(p+1)P_\infty)) \cong T_{[\Sigma, P_\infty]} \mathcal{M}_{g,1}^{(p)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для струй бесконечного порядка получаем

$$T_{\tilde{b}^{(1,\infty)}} \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,\infty)} = \lim_{p \rightarrow \infty} H^1(M, T_M(-2S - pP_\infty)) \cong \mathcal{L}_{(0)} \oplus \mathcal{L}_-. \quad (4.11)$$

Отметим формулу размерности

$$\dim_{b^{(1,p)}}(\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,p)}) = \begin{cases} 3g - 2 + 2N + p, & g \geq 1, \\ \max(0, N - 2) + N + p, & g = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

При $N \geq 2$ первое выражение справедливо для любого рода.

Пусть $\tilde{b}^{(1,p)} \in \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,p)}$ – точка пространства модулей. Пусть $\nu^{(p)}: \mathcal{M}_{g,N+1}^{(1,p)} \rightarrow \mathcal{M}_{g,N+1}$ – отображение “забывания” координат, и пусть $\tilde{b} = \nu^{(p)}(\tilde{b}^{(1,p)})$ – точка общего положения, а $\widetilde{W}$ – ее окрестность. Для $\tilde{b} = [\Sigma, P_1, \dots, P_N, P_\infty]$ мы можем построить объекты Кричевера–Новикова

$$\mathcal{A}_{\tilde{b}}, \mathcal{L}_{\tilde{b}}, \hat{\mathcal{L}}_{\tilde{b}}, \bar{\mathfrak{g}}_{\tilde{b}}, \hat{\mathfrak{g}}_{\tilde{b}}, \mathcal{F}_{\tilde{b}}^\lambda \text{ и т. д.} \quad (4.13)$$

Напомним [26], что существуют соответствующие пучки

$$\mathcal{A}_{\widetilde{W}}, \mathcal{L}_{\widetilde{W}}, \hat{\mathcal{L}}_{\widetilde{W}}, \bar{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}}, \hat{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}}, \mathcal{F}_{\widetilde{W}}^\lambda. \quad (4.14)$$

Аналогично, мы можем рассмотреть пучки объектов, введенных в разделах 2 и 3 настоящей статьи: например, $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}, \widetilde{W}}^1$ – пучок алгебр дифференциальных операторов Кричевера–Новикова порядка не выше 1 и $V_{\widetilde{W}}$ – пучок фермионных модулей.

Введем *регулярные подалгебры* алгебр $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathcal{L}$ следующим образом. Пусть $\mathcal{A}^r \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{L}^r \subset \mathcal{L}$ состоят из всех элементов соответствующих алгебр, обращающихся в нуль в точке P_∞ . Пусть $\bar{\mathfrak{g}}^r = \bar{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{A}^r$. Заметим, что $\bar{\mathfrak{g}}^r$ – подалгебра Ли как алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, так и $\hat{\mathfrak{g}}$, а $\mathcal{L}^r$ является также подалгеброй Ли алгебры $\hat{\mathcal{L}}$. Обозначим через $\bar{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}}^r, \mathcal{L}_{\widetilde{W}}^r$ и т. д. соответствующие пучки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $\mathcal{V}_{\widetilde{W}}$ – пучок (послойных) представлений пучка алгебр $\hat{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}}$. Пучок *конформных блоков* (ассоциированный с пучком представлений $\mathcal{V}_{\widetilde{W}}$) определяется как пучок коинвариантов

$$C_{\widetilde{W}} = \mathcal{V}_{\widetilde{W}} / \bar{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}}^r \mathcal{V}_{\widetilde{W}}. \quad (4.15)$$

Для $p \in \mathbb{N}$ или $p = \infty$ пусть $\widetilde{W}^{(p)} = (\nu^{(p)})^{-1}(\widetilde{W})$. Поднимая вышеперечисленные пучки на $\widetilde{W}$ с помощью отображения $\nu^{(p)}$, мы получим пучки на открытом подмножестве $\widetilde{W}^{(p)}$ пространства $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(p)}$. По пучку представлений $\mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(p)}}$ пучок конформных блоков определяется аналогично (4.15):

$$C_{\widetilde{W}^{(p)}} = \mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(p)}} / \bar{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}^{(p)}}^r \mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(p)}}. \quad (4.16)$$

Очевидно, $\nu^{(p)*}(C_{\widetilde{W}^{(p)}}) = C_{\nu^{(p)*}\widetilde{W}^{(p)}}$.

Особо важен для нас подъем на $\widetilde{W}^{(1)}$. Напомним: это означает, что мы фиксируем набор 1-струй координат. Как показано в [26; лемма 4.3], этим однозначно определены элементы базисов Кричевера–Новикова. В частности, мы можем в каждом из вышеприведенных векторных пространств выбрать базис, состоящий из этих элементов. Из явного вида последних, данного в [18], очевидно, что они аналитически зависят от модулей. Таким образом, мы видим, что над $\widetilde{W}^{(1)}$ пучки

$$\mathcal{A}_{\widetilde{W}^{(1)}}, \mathcal{L}_{\widetilde{W}^{(1)}}, \hat{\mathcal{L}}_{\widetilde{W}^{(1)}}, \bar{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}^{(1)}}, \hat{\mathfrak{g}}_{\widetilde{W}^{(1)}}, \mathcal{F}_{\widetilde{W}^{(1)}}^\lambda \quad (4.17)$$

являются свободными пучками (сечений) тривиальных бесконечномерных векторных расслоений с фиксированными тривиализациями, заданными базисами Кричевера–Новикова. Разумеется, все остается верным, если заменить $\widetilde{W}^{(1)}$ на $\widetilde{W}^{(p)}$.

Ниже мы берем в качестве пучка представлений пучок фермионных модулей $\mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(1)}}$. Это модельная ситуация. В нашем описании базисные фермионы не зависят от модулей и только действие алгебр Ли зависит от них через свои структурные константы. Мы тривиализуем пучок $\mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(1)}}$, пользуясь этими базисами, и получаем соответствующее тривиальное векторное расслоение $V \times \widetilde{W}^{(1)}$, где V – стандартное фермионное пространство $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ (раздел 3). Над точкой общего положения пространства модулей пространство $\bar{\mathfrak{g}}^r V$ также не зависит от модулей (зависимость от структурных констант исчезает при переходе к линейной оболочке образов базисных фермионов под действием $\bar{\mathfrak{g}}^r$). Следовательно, локально пучок конформных блоков является свободным и определяет векторное расслоение. Более того, мы возьмем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ и ее стандартное представление в n -мерном пространстве в качестве τ , см. раздел 3. Этим гарантируется конечномерность коинвариантов². Другими словами, в этом случае векторное расслоение конформных блоков имеет конечный ранг. Заметим также, что в этом случае представление $\mathcal{H}_{F,\tau}^{(m)}$ неприводимо³.

Заметим, что все утверждения и доказательства следующего п. 4.2 остаются справедливыми при достаточно широких предположениях относительно пучка представлений $\mathcal{V}$, не сводящихся к одним лишь фермионным модулям. В частности, они справедливы для класса представлений, рассмотренного в [26]. Относительно пучка алгебр $\widehat{\mathfrak{g}}$ можно было бы предполагать, что $\mathfrak{g}$ – произвольная редуктивная алгебра Ли.

4.2. Проективно плоская связность и обобщенные уравнения Книжника–Замолодчикова. Обозначим для краткости через $\mathcal{V}$ пучок $\mathcal{V}_{\widetilde{W}^{(1)}}$, введенный в конце предыдущего пункта, т.е. пучок фермионных представлений, и зафиксируем его на протяжении данного пункта.

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ – локальные координаты (модули, модулярные параметры) в окрестности некоторой фиксированной точки в $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}$. Обозначим через $\Sigma(\tau)$ риманову поверхность с соответствующей конформной структурой.

Выберем точку общего положения $\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}$ с модулярными параметрами τ_0 . Пусть эта точка представлена набором геометрических данных $(\Sigma(\tau_0), P_1, \dots, P_N, P_\infty, z_1^{(1)}, \dots, z_N^{(1)}, z_\infty^{(1)})$, см. (4.1). В частности, $\Sigma(\tau_0)$ имеет фиксированную конформную структуру, представляющую алгебраическую кривую с модулярными параметрами τ_0 . Для τ из достаточно малой окрестности точки τ_0 конформная структура на $\Sigma(\tau)$ может быть следующим образом получена с помощью деформации конформной структуры на $\Sigma(\tau_0)$.

На римановой поверхности $\Sigma(\tau_0)$ выберем локальную координату w в окрестности точки P_∞ . Строго говоря, это означает (временный) переход к пространству модулей $\widetilde{W}^{(\infty)}$. Будем предполагать, что w пробегает диск радиуса 2 с центром в точке $w = 0$. Пусть $U_\infty \subset \mathbb{C}$ – единичный диск с естественной координатой z . Отождествляя z и w , мы можем представлять себе U_∞ как подмножество координатной карты в точке P_∞ . Пусть $v \in \mathcal{L}$ – векторное поле Кричевера–Новикова. Его ограничение на U_∞ дает мероморфное векторное поле на этом диске. В свою очередь, это векторное поле определяет семейство локальных диффеоморфизмов ϕ_t – соответствующий

²Мы благодарны Б. Л. Фейгину за это замечание.

³Его неприводимость подробно изучена в градуированном случае [8; лекция 9]. Доказательство для почти градуированного случая аналогично. Мы дадим его в другом месте.

локальный поток. Для достаточно малых t эти диффеоморфизмы отображают кольцо $U_v \subset U_\infty$, ограниченное снаружи единичной окружностью, в деформированное кольцо, лежащее внутри диска радиуса 2. Из диска радиуса 2 (соответственно, координатной карты в точке P_∞) вырежем подмножество $\phi_t(U_\infty \setminus U_v)$ (которое совпадает с “внутренним дополнением” к $\phi_t(U_v)$) и склеим U_∞ с оставшейся частью диска радиуса 2, отождествив U_v и $\phi_t(U_v)$ с помощью отображения $w = \phi_t(z)$. Таким образом, для каждого t мы получим новую конформную структуру. Эквивалентна эта конформная структура исходной или нет, зависит от векторного поля (и соответствующих диффеоморфизмов). В любом случае с помощью этого процесса мы получаем все близкие к данной конформные структуры (подробности см. в [5]). Более того, таким образом может быть реализована деформация в направлении любого касательного вектора к пространствам модулей $\widetilde{W}^{(1)}$ и $\widetilde{W}^{(\infty)}$.

Сопоставим набору τ диффеоморфизм d_τ описанного выше типа, определенный на кольце $U_\tau \subset U_\infty$, так, чтобы функция склейки $w = d_\tau(z)$ задавала соответствующую конформную структуру, помня при этом, что τ не определяет однозначно ни d_τ , ни U_τ .

Пусть в этом пункте $\mathcal{A}$ обозначает пучок алгебр функций Кричевера–Новикова на $\widetilde{W}^{(1)}$, а также соответствующее бесконечномерное векторное расслоение. Обозначим слой этого расслоения над точкой $\tau \in \widetilde{W}^{(1)}$ через $\mathcal{A}_\tau$. Если A – сечение расслоения, мы записываем его как $A(\tau) = A_\tau$, где $A_\tau \in \mathcal{A}_\tau$. Аналогично, пусть $\mathcal{A}^r, \mathcal{L}, \mathcal{L}^r, \mathcal{L}^r, \widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}^r$ обозначают пучки (соответственно, расслоения) соответствующих алгебр.

Пусть $\mathcal{A}_\tau^{\text{ann}}$ – алгебра регулярных функций на кольце U_τ . Вложим $\mathcal{A}_\tau$ в $\mathcal{A}_\tau^{\text{ann}}$, ограничивая каждую из функций A_τ на образ кольца U_τ в $\Sigma(\tau)$ и рассматривая ограничение как функцию переменной w . Обозначим результат через $A_\tau(w)$. С другой стороны, ограничим A_τ на координатную окрестность в точке $P_\infty \in \Sigma(\tau)$ и обозначим результат через $\tilde{A}_\tau(z)$. Таким образом, мы сопоставляем каждой паре $(A_\tau, \Sigma(\tau))$, не единственным образом, пару $(\tilde{A}_\tau, d_\tau)$, где $\tilde{A}_\tau(z) = A_\tau(d_\tau(z))$ на U_τ . Для $0 < s < 1$ пусть $\mathcal{A}_s$ – алгебра регулярных функций в кольце $U_s \subset U_\infty$, ограниченном окружностями радиусов 1 и s соответственно. Мы полагаем $\tilde{\mathcal{A}} = \text{inj} \lim_{s \rightarrow 1} \mathcal{A}_s$ по отношению к естественному вложению. Очевидно, $\tilde{\mathcal{A}}_\tau \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ в окрестности точки τ_0 (более того, $\tilde{\mathcal{A}}_\tau$ дает элемент пучка ростков мероморфных функций от z в точке $z = 0$). Таким образом, соответствие $A_\tau \rightarrow \tilde{A}_\tau$ задает вложение $\mathcal{A}$ в $\tilde{\mathcal{A}}$. Обозначим подпучок сечений пучка $\tilde{\mathcal{A}}$, соответствующих росткам аналитических функций, обращающихся в нуль на P_∞ , через $\tilde{\mathcal{A}}^r$. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}^r$ обозначает то же самое, но для алгебры $\mathcal{L}$.

Для данного векторного поля X на $\widetilde{W}^{(1)}$ под $\partial_X A_\tau$ мы понимаем полную производную по τ от $\tilde{A}_\tau(d_\tau^{-1}(w))$ вдоль векторного поля X . Мы интерпретируем это как дифференцирование (по τ) функции Кричевера–Новикова переменной z с учетом непосредственной зависимости от параметра τ и зависимости от τ локальной координаты z . После подстановки $w = d_\tau(z)$ мы рассматриваем $\partial_X A_\tau$ как элемент пучка $\mathcal{A}$.

Рассмотрим семейство локальных диффеоморфизмов d_τ , где τ пробегает диск в пространстве модулярных параметров. Напомним, что для каждого τ соответствующее d_τ есть не что иное, как функция склейки $w = d_\tau(z)$ на римановой поверхности $\Sigma(\tau)$. С этой точки зрения семейство d_τ – это не что иное, как семейство (локальных) функций, зависящих от параметров. Чтобы подчеркнуть эту интерпретацию, определим функцию $d(z, \tau) = d_\tau(z)$. Определим $\partial_X d_\tau$ следующим образом:

$$(\partial_X d_\tau)(z) = \sum_i X_i(\tau) \frac{\partial d(z, \tau)}{\partial \tau_i}. \quad (4.18)$$

Каждому векторному полю X на $\widetilde{W}^{(1)}$ мы можем сопоставить локальное векторное поле $\rho(X) := d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau$ на $\Sigma(\tau)$, представляющее класс когомологий Кодаиры–Спенсера соответствующего 1-параметрического семейства деформаций. Добавлением подходящих кограницных членов (что сводится к композиции диффеоморфизмов d_τ с диффеоморфизмами диска) можно добиться того, чтобы

$$\rho(X) = d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau \in \mathcal{L}. \quad (4.19)$$

Данному векторному полю X мы можем также сопоставить с помощью изоморфизма (4.11) векторное поле Кричевера–Новикова e_X . Заметим, что мы рассматриваем X как векторное поле на $\widetilde{W}^{(1)}$. Следовательно, e_X определено только с точностью до прибавления элементов алгебры $\mathcal{L}_-^{(1)}$. За определением $\mathcal{L}_-^{(1)}$ мы отсылаем к п. 2.4; ее элементы соответствуют инфинитезимальным заменам координат в P_∞ . Мы называем каждый такой элемент e_X *подъемом* векторного поля X . Независимо от подъема (e_X) и выбора $\rho(X)$ (удовлетворяющего (4.19)) мы имеем $e_X - \rho(X) \in \mathcal{L}^r$, следовательно,

$$e_X = \rho(X) + e^r, \quad (4.20)$$

где $e^r \in \mathcal{L}^r$ (e^r зависит и от e_X , и от $\rho(X)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Для любого сечения A пучка $\mathcal{A}$ и любого локального векторного поля X определим A^X соотношением*

$$\partial_X A = -(e_X) \cdot A + A^X. \quad (4.21)$$

Тогда $A^X \in \widetilde{\mathcal{A}}$ и, более того, если $A \in \mathcal{A}^r$, то $A^X \in \widetilde{\mathcal{A}}^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно данному выше определению $\partial_X A_\tau$ – это полная производная вдоль X от $A_\tau = \widetilde{A}_\tau \cdot d_\tau^{-1}$, где $\cdot$ обозначает композицию отображений. По формуле дифференцирования композиции отображений (сложной функции)

$$\partial_X A_\tau = \widetilde{\partial}_X \widetilde{A}_\tau + \partial_z \widetilde{A}_\tau \cdot \partial_X d_\tau^{-1} = \widetilde{\partial}_X \widetilde{A}_\tau + \left(-\widetilde{\rho(X)} \frac{\partial}{\partial z} \widetilde{A}_\tau \right) \cdot d_\tau^{-1}, \quad (4.22)$$

где $\widetilde{\partial}_X \widetilde{A}_\tau$ – производная вдоль X в предположении независимости локальной координаты z от τ , $\partial_z \widetilde{A}_\tau$ – дифференциал $\widetilde{A}_\tau$ (по переменной z), а $\widetilde{\rho(X)} \frac{\partial}{\partial z}$ – дифференциальный оператор первого порядка, соответствующий векторному полю $\rho(X) = d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau$. Более подробно, $\partial_X d_\tau^{-1} = -d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau \cdot d_\tau^{-1}$, следовательно, $\partial_z \widetilde{A}_\tau \cdot \partial_X d_\tau^{-1} = \partial_z \widetilde{A}_\tau \cdot (-d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau) \cdot d_\tau^{-1}$. Ввиду (4.19) для каждого τ векторное поле $\rho(X) = d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau$ принадлежит $\mathcal{L}_\tau$. Обозначим соответствующий дифференциальный оператор первого порядка (по переменной z) через $\widetilde{\rho(X)} \frac{\partial}{\partial z}$. Заметим, что $\partial_z \widetilde{A}_\tau \cdot (d_\tau^{-1} \cdot \partial_X d_\tau) = \widetilde{\rho(X)} \frac{\partial}{\partial z} \widetilde{A}_\tau$.

Пользуясь соотношением (4.20), заменяем $\widetilde{\rho(X)} \frac{\partial}{\partial z}$ в (4.22) дифференциальным оператором, соответствующим векторному полю $e_X - e^r$, и получаем (4.21), где $A_\tau^X = \widetilde{\partial}_X \widetilde{A}_\tau + e^r A_\tau \in \mathcal{A}$.

Предположим, что $A_\tau \in \mathcal{A}^r$ для любого τ , т.е. $A_\tau(P_\infty) = 0$ для $P_\infty \in \Sigma(\tau)$. Имеем $e^r \in \mathcal{L}^r$ по определению, следовательно, и $e^r(P_\infty) = 0$. Так как $z(P_\infty) = 0$, то из $A_\tau(P_\infty) = 0$ вытекает, что $\tilde{A}_\tau(0) = 0$, причем для всех τ , и, далее, $\partial_X \tilde{A}_\tau(0) = 0$. Следовательно, $A_\tau^X(P_\infty) = 0$ и $A_\tau^X \in (\tilde{\mathcal{A}}^r)_\tau$ для любого τ , что завершает доказательство.

Пусть $\mathcal{L}$ – пучок алгебр векторных полей Кричевера–Новикова и e – его мероморфное сечение. Обращаясь к определению $\partial_X e$, мы видим, что и к нему нет общепринятого подхода. По аналогии с функциями мы могли бы определить $\partial_X e$, используя локальные векторные поля на U_τ . Другой возможностью, которую мы выбираем здесь, является определение с помощью правила Лейбница, т.е. для каждого $A \in \mathcal{A}$ по определению

$$(\partial_X e).A = \partial_X(e.A) - e.\partial_X A.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Для каждого сечения e пучка $\mathcal{L}$ и каждого локального векторного поля X определим e^X соотношением*

$$\partial_X e = -[e_X, e] + e^X. \quad (4.23)$$

Тогда $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}$ и, более того, $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}^r$, если $e \in \mathcal{L}^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду предложения 4.2, имеем $\partial_X(e.A) = -e_X.(e.A) + (e.A)^X$, где $(e.A)^X = \tilde{\partial}_X(\widetilde{e.A}) + e^r.(e.A)$. Последнее следует из доказательства предложения 4.2. Аналогично, $e.(\partial_X A) = e.(-e_X.A + \tilde{\partial}_X \tilde{A} + e^r.A)$. Все вместе дает

$$(\partial_X e).A = -[e_X, e].A + \tilde{\partial}_X(\widetilde{e.A}) - e.\tilde{\partial}_X \tilde{A} + [e^r, e].A. \quad (4.24)$$

Так как объекты e и A глобальны, имеем $\widetilde{e.A} = \tilde{e}.\tilde{A}$. Снова применяя правило Лейбница, мы получаем $\tilde{\partial}_X(\widetilde{e.A}) - e.\tilde{\partial}_X \tilde{A} = (\tilde{\partial}_X \tilde{e})\tilde{A}$. Так как (4.24) – соотношение в пучке $\tilde{\mathcal{A}}$, мы не делаем различия между A и $\tilde{A}$. Следовательно, из (4.24) вытекает (4.23), где $e^X = \tilde{\partial}_X \tilde{e} + [e^r, e] \in \tilde{\mathcal{L}}$.

Если $e \in \mathcal{L}^r$, то $[e^r, e] \in \mathcal{L}^r$, так как $e^r \in \mathcal{L}^r$ и $\mathcal{L}^r$ – подалгебра. Далее, $\tilde{\partial}_X \tilde{e}(0) = 0$ по той же причине, по которой $\partial_X \tilde{A}(0) = 0$ в доказательстве предложения 4.2. Следовательно, $e^X \in \tilde{\mathcal{L}}^r$, что завершает доказательство.

Рассмотрим пучок операторов на локальных сечениях пучка $\mathcal{V}$. Предположим, что B – его локальное сечение. По определению $\partial_X B = [\partial_X, B]$, где в правой части ∂_X – дифференцирование сечений пучка $\mathcal{V}$. Встречаются следующие случаи: $B = u(A)$, где $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$, и $B = T(e)$ – оператор Сугавары, определенный соотношениями (3.14), (3.16), который раньше обозначался $T[e]$.⁴

Для каждого подъема e_X векторного поля X мы вводим следующий дифференциальный оператор первого порядка на сечениях тривиального пучка $\mathcal{V}$:

$$\nabla_X = \partial_X + T(e_X), \quad (4.25)$$

где $\partial_X = \sum_i X_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau_i}$.

⁴В этом пункте нет опасности перепутать $T(e)$ с (3.5), поэтому мы выбираем обозначение $T(e)$, чтобы в дальнейшем избежать путаницы с обозначением скобки Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. ∇_X корректно определено на конформных блоках и не зависит от произвола в подъеме векторного поля X .

Перед тем как доказать это предложение, необходимо расширить операторы $u(A)$ и $T(e)$ на случай, когда объекты A и e локальны. Локальные векторные поля (функции, токи и т. д.) образуют пополнения соответствующих алгебр, так как они имеют бесконечные разложения по соответствующим базисам Кричевера–Новикова [10]. Ввиду (4.10) и предложения 4.3, мы можем ограничиться разложениями с конечным порядком в точке P_∞ (полюсом), т.е. конечным числом компонент положительной степени. Определим $\tilde{V}$ как пространство бесконечных в отрицательном направлении (по отношению к степени фермионов (3.4)) формальных линейных комбинаций базисных фермионов. Благодаря почти градуированности действие вышеупомянутых операторов может быть продолжено на $\tilde{V}$, причем это продолжение существует также для локальных объектов A и e . Действительно, только конечное число членов разложения (как оператора, так и соответствующего элемента $\tilde{V}$) дает вклад в компоненту результата, имеющую заданную степень. Пусть $\mathfrak{g}^r$ – пополненная таким образом регулярная подалгебра. Очевидно, $V/\mathfrak{g}^r V = \tilde{V}/\mathfrak{g}^r \tilde{V}$, т.е. конформные блоки (определение 4.1) могут быть определены через пополненные объекты.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4.5. Для фермионного представления

$$\partial_X u(A) = u(\partial_X A). \quad (4.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$ и каждого базисного фермиона $\Psi = \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots$ имеем $u(A)\Psi = (uA)\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots + \psi_{i_1} \wedge (uA)\psi_{i_2} \wedge \dots + \lambda_1 \cdot \Psi$, где последний член возникает ввиду регуляризации и по той же причине в каждом из выражений $(uA)\psi_{i_k}$ член с ψ_{i_k} (если таковой имеется) игнорируется. Поскольку базисные фермионы не зависят от модулей, имеем

$$\begin{aligned} (\partial_X u(A))\Psi &= \partial_X (u(A)\Psi) \\ &= (u\partial_X A)\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots + \psi_{i_1} \wedge (u\partial_X A)\psi_{i_2} \wedge \dots + (\partial_X \lambda_1) \cdot \Psi \\ &= u(\partial_X A)\Psi + (\partial_X \lambda_1) \cdot \Psi - \lambda_2 \cdot \Psi, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $\lambda_2 \cdot \Psi$ появляется ввиду регуляризации $u(\partial_X A)$. Если необходимости в регуляризации не возникает, соотношение (4.26) получается немедленно. Регуляризация просто вычисляется в терминах матрицы оператора uA в пространстве сечений того голоморфного расслоения, с которым связано наше фермионное представление. Пусть $uA = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} a_{ij} E_{ij}$, где $\{E_{ij} | i, j \in \mathbb{Z}\}$ – естественный базис в пространстве матриц. Согласно процедуре регуляризации [8]

$$\lambda_1 = \sum_{i \in N_-} a_{ii} - \sum_{i \in N_+} a_{ii},$$

где N_+ – множество незанятых позиций, или дырок, положительной степени монома Ψ , т.е. $N_+ = \mathbb{N} \setminus \{i_1, i_2, \dots\}$, а N_- – множество занятых позиций отрицательной

или нулевой степени.⁵ Аналогично, $\lambda_2 = \sum_{i \in N_-} \partial_X a_{ii} - \sum_{i \in N_+} \partial_X a_{ii}$. Следовательно, $\partial_X \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, и утверждение справедливо и в этом случае.

Для более общих представлений мы рассматриваем соотношение (4.26) как дополнительное требование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.4. Используя леммы 4.5 и 3.7, находим

$$[\nabla_X, u(A)] = [\partial_X + T(e_X), u(A)] = [\partial_X, u(A)] + [T(e_X), u(A)] = u(\partial_X A) + u(e_X \cdot A).$$

Предположим, что $A \in \mathcal{A}^r$. Тогда, согласно предложению 4.2, мы имеем

$$u(\partial_X A) = -u(e_X \cdot A) + u(A^X),$$

где $A^X \in \widetilde{\mathcal{A}}^r$. Следовательно, $[\nabla_X, u(A)] = u(A^X)$, откуда $[\nabla_X, u(\mathcal{A}^r)] \subseteq u(\widetilde{\mathcal{A}}^r)$, и далее

$$[\nabla_X, u(\widetilde{\mathcal{A}}^r)] \subseteq u(\widetilde{\mathcal{A}}^r).$$

Следовательно, $\widetilde{\mathfrak{g}}^r \widetilde{\mathcal{V}}$ является ∇_X -инвариантным подпространством и ∇_X корректно определено на $\widetilde{\mathcal{V}}/\widetilde{\mathfrak{g}}^r \widetilde{\mathcal{V}}$.

ЛЕММА 4.6. Для любых $X \in T\mathcal{M}_{g,N+1}^{(1)}$ мы имеем

$$\partial_X T(e) = T(\partial_X e) + \lambda \cdot \text{id},$$

где $\lambda = \lambda(X, e) \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду фундаментального соотношения леммы 3.7, для любых $e \in \mathcal{L}$, $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$

$$[T(e), u(A)] = u(e \cdot A). \quad (4.28)$$

Возьмем производную обеих частей соотношения (4.28) вдоль векторного поля $X \in T\widetilde{W}^{(1)}$. По лемме 4.5 получаем

$$[\partial_X T(e), u(A)] + [T(e), \partial_X u(A)] = u((\partial_X e) \cdot A) + u(e \cdot (\partial_X A)). \quad (4.29)$$

Вновь по формуле (4.28) и лемме 4.5 вторые члены в обеих частях соотношения (4.29) равны. Следовательно,

$$[\partial_X T(e), u(A)] = u((\partial_X e) \cdot A).$$

Применяя (4.28) еще раз, заменим правую часть последнего соотношения выражением $[T(\partial_X e), u(A)]$ (см. замечание ниже). Следовательно,

$$[\partial_X T(e) - T(\partial_X e), u(A)] = 0 \quad (4.30)$$

для всех $X \in T\widetilde{W}^{(1)}$, $u \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{A}$.

По стандартным соображениям теории представлений старшего веса (неприводимость представления, или единственность вакуумного вектора) утверждение леммы немедленно вытекает из коммутационных соотношений (4.30).

⁵ Возможны и другие описания, но они эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ. $\partial_X e$ является локальным векторным полем на деформированном кольце (точнее, сечением пучка $\tilde{\mathcal{L}}$). Следовательно, для доказательства (4.30) нам нужно соотношение (4.28) для локальных векторных полей. По определению, данному после формулировки предложения 4.3, представления $T(e)$ и $u(A)$ корректно определены также на локальных векторных полях и функциях соответственно, с сохранением соотношения (4.28). Действительно, для $A \in \mathcal{A}$, однородного элемента $v \in V$ и произвольного n существует частичная сумма $\tilde{e}$ разложения векторного поля $\partial_X e$ такая, что $(u((\partial_X e).A)v)_n = (u(\tilde{e}.A)v)_n$ и $([T(\partial_X e), u(A)]v)_n = ([T(\tilde{e}), u(A)]v)_n$, где $(\cdot)_n$ обозначает проекцию на компоненту степени n в $\bar{V}$. Ввиду (4.28) правые части двух последних соотношений равны, следовательно, их левые части также равны. Отсюда следует соотношение (4.28) с $\partial_X e$ вместо e .

Цель оставшейся части статьи – доказать проективную плоскостность связности (4.25) и ввести соответствующий аналог уравнений Книжника–Замолотчикова.

ЛЕММА 4.7. *Для любых подъёмов e_X, e_Y локальных векторных полей X, Y в $\mathcal{L}$ существует такой подъём $e_{[X,Y]}$ из коммутатора $[X, Y]$, что*

$$e_{[X,Y]} = [e_X, e_Y] + \partial_X e_Y - \partial_Y e_X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [34; лемма 1.3.8]

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] + \partial_X \rho(Y) - \partial_Y \rho(X). \quad (4.31)$$

Заметим, что для любых подъёмов e_X, e_Y мы имеем $e_X = \rho(X) + e_1^r$, $e_Y = \rho(Y) + e_2^r$, где $e_1^r, e_2^r \in \mathcal{L}^r$ (см. (4.20)). В терминах e_X, e_Y (4.31) выглядит так:

$$\rho([X, Y]) = [e_X, e_Y] + \partial_X e_Y - \partial_Y e_X + e_3^r, \quad (4.32)$$

где $e_3^r = [e_1^r, e_2^r] - (\partial_X e_2^r + [e_X, e_2^r]) + (\partial_Y e_1^r + [e_Y, e_1^r])$.

Так как $\mathcal{L}^r$ является подалгеброй Ли, имеем $[e_1^r, e_2^r] \in \mathcal{L}^r$. Согласно предложению 4.3, элементы $\partial_X e_2^r + [e_X, e_2^r]$ и $\partial_Y e_1^r + [e_Y, e_1^r]$ также регулярны, следовательно, $e_3^r \in \mathcal{L}^r$. Таким образом, $e_{[X,Y]} = \rho([X, Y]) - e_3^r$ является подъёмом коммутатора $[X, Y]$, и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.8. ∇_X является проективно плоской связностью на расслоении конформных блоков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя коммутатор ковариантных производных вдоль векторных полей X и Y , имеем

$$\begin{aligned} [\nabla_X, \nabla_Y] &= [\partial_X + T(e_X), \partial_Y + T(e_Y)] \\ &= [\partial_X, \partial_Y] + [\partial_X, T(e_Y)] - [\partial_Y, T(e_X)] + [T(e_X), T(e_Y)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Так как T – проективное представление алгебры $\mathcal{L}$, а также ввиду соотношений $[\partial_X, T(e_Y)] = \partial_X T(e_Y)$, $[\partial_Y, T(e_X)] = \partial_Y T(e_X)$, мы можем переписать (4.33) в следующей форме:

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \partial_{[X,Y]} + T(\partial_X e_Y - \partial_Y e_X + [e_X, e_Y]) + \lambda \cdot \text{id}. \quad (4.34)$$

Здесь мы пользовались также леммой 4.6. По лемме 4.7 из этого следует

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \partial_{[X, Y]} + T(e_{[X, Y]}) + \lambda \cdot \text{id} = \nabla_{[X, Y]} + \lambda \cdot \text{id}. \quad (4.35)$$

Следующие уравнения горизонтальных сечений связности ∇_X мы рассматриваем как обобщение уравнений Книжника–Замолодчикова:

$$\nabla_X \Psi = 0, \quad X \in H^0(\mathcal{U}, T\mathcal{M}_{g, N+1}^{(1)}), \quad (4.36)$$

где Ψ – сечение пучка конформных блоков. Эти уравнения предложены в [26], где, в частности, оператор ∇_X был явно вычислен для $g = 0$, $g = 1$ и несколько иного выбора представлений аффинной алгебры (вычисление сохраняет силу и в рассматриваемом здесь случае).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Bernard. On the Wess–Zumino–Witten models on Riemann surfaces // Nuclear Phys. B. 1988. V. 309. № 1. P. 145–174.
- [2] L. Bonora, M. Rinaldi, J. Russo, K. Wu. The Sugawara construction on genus- g Riemann surfaces // Phys. Lett. B. 1988. V. 208. № 3–4. P. 440–446.
- [3] B. Enriquez, G. Felder. Solutions of the KZB equations in genus ≥ 1 // math.QA/9912198.
- [4] G. Felder, Ch. Wierczkowski. Conformal blocks on elliptic curves and the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations // Comm. Math. Phys. 1996. V. 176. № 1. P. 133–161.
- [5] J. Harris, I. Morrison. Moduli of Curves. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [6] N. J. Hitchin. Flat connections and geometric quantization // Comm. Math. Phys. 1990. V. 131. № 2. P. 347–380.
- [7] В. Кац. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
- [8] V. G. Kac, A. K. Raina. Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite-Dimensional Lie Algebras. Teaneck: World Scientific, 1987.
- [9] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov. Current algebra and Wess–Zumino model in two dimensions // Nuclear Phys. B. 1984. V. 247. № 1. P. 83–103.
- [10] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 2. С. 46–63.
- [11] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 4. С. 47–61.
- [12] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 23. № 1. С. 24–40.
- [13] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции // УМН. 2000. Т. 55. № 3. С. 181–182.
- [14] A. Ruffing, T. Deck, M. Schlichenmaier. String branchings on complex tori and algebraic representations of generalized Krichever–Novikov algebras // Lett. Math. Phys. 1992. V. 26. № 1. P. 23–32.
- [15] V. A. Sadov. Bases on multipunctured Riemann surfaces and interacting strings amplitudes // Comm. Math. Phys. 1991. V. 136. № 3. P. 585–597.
- [16] M. Schlichenmaier. An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Phys. V. 322.)
- [17] M. Schlichenmaier. Krichever–Novikov algebras for more than two points // Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. № 2. P. 151–165.
- [18] M. Schlichenmaier. Krichever–Novikov algebras for more than two points: explicit generators // Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. № 4. P. 327–336.

- [19] M. Schlichenmaier. Central extensions and semi-infinite wedge representations of Krichever–Novikov algebras for more than two points // *Lett. Math. Phys.* 1990. V. 20. № 1. P. 33–46.
- [20] M. Schlichenmaier. Verallgemeinerte Krichever–Novikov Algebren und deren Darstellungen // Ph.D. Thesis. Mannheim: Universität Mannheim, 1990.
- [21] M. Schlichenmaier. Degenerations of generalized Krichever–Novikov algebras on tori // *J. Math. Phys.* 1993. V. 34. № 8. P. 3809–3824.
- [22] M. Schlichenmaier. Differential operator algebras on compact Riemann surfaces // *Generalized Symmetries in Physics* (Clausthal, Germany, 1993) / ed. H.-D. Doebner, V. K. Dobrev, A. G. Ushveridze. River Edge: World Scientific, 1994. P. 425–434.
- [23] M. Schlichenmaier. Local cocycles and central extensions for multipoint algebras of Krichever–Novikov type // *J. Reine Angew. Math.* 2003. V. 559. P. 53–94.
- [24] M. Schlichenmaier. Higher genus affine algebras of Krichever–Novikov type // *Mosc. Math. J.* (to appear); math/0210360.
- [25] M. Schlichenmaier, O. K. Sheinman. The Sugawara construction and Casimir operators for Krichever–Novikov algebras // *J. Math. Sci. (New York)*. 1998. V. 92. № 2. P. 3807–3834; q-alg/9512016.
- [26] М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман. Теория Весса–Зумино–Виттена–Новикова, уравнения Книжника–Замолодчикова и алгебры Кричевера–Новикова // *УМН*. 1999. Т. 54. № 1. С. 213–249.
- [27] О. К. Шейнман. Эллиптические аффинные алгебры Ли // *Функц. анализ и его прил.* 1990. Т. 24. № 3. С. 51–61.
- [28] О. К. Шейнман. Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях // *Функц. анализ и его прил.* 1993. Т. 27. № 4. С. 54–62.
- [29] O. K. Sheinman. Representations of Krichever–Novikov algebras // *Topics in Topology and Mathematical Physics* / ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 185–197.
- [30] О. К. Шейнман. Фермионная модель представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова // *Функц. анализ и его прил.* 2001. Т. 35. № 3. С. 60–72.
- [31] O. K. Sheinman. Second order Casimirs for the affine Krichever–Novikov algebras $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ and $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ // *Mosc. Math. J.* 2001. V. 1. № 4. P. 605–628; mathRT/0109001.
- [32] О. К. Шейнман. Казимиры второго порядка для аффинных алгебр Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{gl}}_{g,2}$ и $\widehat{\mathfrak{sl}}_{g,2}$ // *УМН*. 2001. Т. 56. № 5. С. 189–190.
- [33] O. K. Sheinman. Krichever–Novikov algebras, their representations and applications // mathRT/0304020.
- [34] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries // *Adv. Stud. Pure Math.* 1989. V. 19. P. 459–566.
- [35] K. Ueno. Introduction to conformal field theory with gauge symmetries // *Geometry and Physics* (Aarhus, 1995) / ed. J. E. Andersen et al. New York: Dekker, 1997. P. 603–745.

Лаборатория математики Люксембургского университета;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

Независимый московский университет

E-mail: schlichenmaier@cu.lu, oleg@sheinman.mccme.ru

Поступила в редакцию

15.03.2004