Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Об уровне представимости относительно свободных ассоциативных алгебр, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm763>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:24:18

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОБ УРОВНЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО
СВОБОДНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

А. В. Гришин

Пусть $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над полем нулевой характеристики k , S – некоторая унитарно замкнутая конечная система многочленов в F , содержащая многочлен Капелли, $\overline{F} = k\langle \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots \rangle$ – относительно свободная алгебра многообразия $\text{Var}(S)$, заданного системой тождеств S . В PI-теории достаточно актуален (см. [1], [2]) вопрос об эффективном вложении алгебры $\overline{F}$ в алгебру матриц над некоторым расширением поля k . Например, если S – конечная система, порождающая все тождества алгебры $(l \times l)$ -матриц k_l , то хорошо известно представление алгебры $\overline{F}$, как алгебры общих $(l \times l)$ -матриц. Пусть

$$X(l) = \{x_i^{(\alpha, \beta)} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha, \beta \leq l\}$$

– множество коммутирующих переменных, $k[X(l)]$ – алгебра коммутативных многочленов, $e_{\alpha\beta}$ – матричные единицы алгебры k_l ,

$$g_i = \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq l} x_i^{(\alpha, \beta)} e_{\alpha\beta}$$

– общие $(l \times l)$ -матрицы, рассмотренные в алгебре $(l \times l)$ -матриц над алгеброй $k[X(l)]$. Тогда $\overline{F} \cong k\langle g_1, \dots, g_i, \dots \rangle$ – k -алгебра, порожденная матрицами g_i (алгебра общих матриц).

На коммутативной алгебре $k[X(l)]$ следующим естественным образом вводится структура T -пространства (в смысле [3]). Пусть $\tau: x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{d_i})$ – произвольная подстановка (эндоморфизм алгебры F). Обозначим через $f(g_1, \dots, g_{d_i})^{(\alpha, \beta)}$ компоненту с номером (α, β) общей матрицы $f(g_1, \dots, g_{d_i})$ и положим

$$(x_i^{(\alpha, \beta)})^\tau = f(g_1, \dots, g_{d_i})^{(\alpha, \beta)}.$$

Нетрудно проверить, что такое действие подстановок τ на алгебре $k[X(l)]$, а вместе с ней и на алгебре $(l \times l)$ -матриц $k[X(l)]_l$, задает структуру T -пространства, согласованную со структурой T -пространства на относительно свободной алгебре $\overline{F} \cong k\langle g_1, \dots, g_i, \dots \rangle$. Таким образом, на алгебрах $k[X(l)]$ и $k[X(l)]_l$ можно ввести понятие T -идеала, как идеала, являющегося одновременно и T -пространством.

Для любого идеала I алгебры $k[X(l)]$ можно рассмотреть приведенные по модулю идеала I общие $(l \times l)$ -матрицы (из алгебры $(k[X(l)]/I)_l$)

$$\overline{g}_i = \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq l} \overline{x}_i^{(\alpha, \beta)} e_{\alpha\beta},$$

где $\overline{x}_i^{(\alpha, \beta)}$ – образ переменной $x_i^{(\alpha, \beta)}$ в алгебре $k[X(l)]/I$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть S – рассмотренная выше система многочленов из алгебры F . Тогда для всех l , начиная с некоторого L , в алгебре $k[X(l)]$ существует такой простой идеал $I(S)$, содержащий T -идеал $I_1(S)$, что соответствие $\overline{x}_i \mapsto \overline{g}_i$ задает изоморфизм между алгеброй $\overline{F}$ и алгеброй $k\langle \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_i, \dots \rangle$ приведенных общих $(l \times l)$ -матриц, как по модулю $I(S)$, так и по модулю $I_1(S)$.

Доказательство теоремы не использует известных результатов о локальной шпехтовости и представимости, что дает несколько иной взгляд на эти вопросы.

Число L (уровень представимости) можно оценить через сложность многообразия $\text{Var}(S)$ (наибольшее натуральное число r , для которого $k_r \in \text{Var}(S)$), наибольшую степень n многочленов из S и кратность $\mu(\text{Var}(S))$ этого многообразия (индекс нильпотентности радикала алгебры $\overline{F}$).

ТЕОРЕМА 2. $L < r\mu(\text{Var}(S))2^{n!}$.

Числа r и n находятся прямо по системе S . Однако оценка кратности $\mu(\text{Var}(S))$ сама является трудной задачей, решенной автором лишь в некоторых частных случаях.

Данная оценка уровня представимости, по-видимому, достаточно завышена. Тем не менее она все же проясняет встречающийся в конкретных примерах эффект “немонотонности”, когда у меньшего многообразия иногда может быть больший уровень представимости (и связанный с ним показатель представимости, см. [1]). В самом деле, добавляя к системе многочленов S новые многочлены, можно уменьшить многообразие и при этом увеличить число n , а вместе с ним и границу для уровня представимости. Этот же эффект отражает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Любая цепочка вложенных многообразий уровня представимости $\leq L$ имеет длину, ограниченную некоторым числом, зависящим только от L .

Из теоремы 3 следует, что “слишком длинные” убывающие цепочки многообразий могут давать “скачки” уровня представимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Гришин // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 1. С. 3–20. [2] J. Lewin // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 188. № 2. P. 293–317. [3] А. В. Гришин // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 3. С. 669–700.

Принято редколлегией
24.05.2004