Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Богоявленский, Скрытая структура симметрий, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 06:35:32

СКРЫТАЯ СТРУКТУРА СИММЕТРИЙ

О. И. Богоявленский

1. В работе представлена скрытая инвариантная флаг-структура в алгебре Ли A симметрий любой динамической системы

$$\dot{x}^i = V^i(x^1, \dots, x^N) \quad (1)$$

на некотором гладком многообразии M^N . Аналогичные инвариантные флаг-структуры существуют также в кольцах R первых интегралов, в комплексах V -инвариантных дифференциальных форм и в собственных подпространствах любых линейных операторов. Алгебра Ли симметрий системы (1) состоит из векторных полей U на M^N , коммутирующих с V : $[V, U] = 0$, или $L_V U = 0$, где L_V – оператор производной Ли.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой динамической системы (1) алгебра Ли симметрий A имеет инвариантную флаг-структуру*

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots, \quad (2)$$

где подалгебры Ли A_p являются идеалами в A . Имеют место включения

$$[A_p, A_q] \subset A_{p+q}. \quad (3)$$

Подалгебры Ли A_p являются модулями над кольцом R первых интегралов. Кольцо R имеет инвариантную флаг-структуру $R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$, где все подкольца R_p являются идеалами в R . Справедливы включения $R_p \cdot R_q \subset R_{p+q}$. Подалгебры Ли A_k (2) определяют дифференцирования колец R_ℓ , удовлетворяющие соотношениям

$$A(R_\ell) \subset R_\ell, \quad A_k(R) \subset R_k, \quad A_k(R_\ell) \subset R_{k+\ell}. \quad (4)$$

Подкольца $R_\ell \subset R$ определяют структуру R_ℓ -подмодуля в A_k , для которой $R_\ell \cdot A \subset A_\ell$ и $R_\ell \cdot A_k \subset A_{k+\ell}$.

По определению подалгебра Ли A_p состоит из симметрий $U_p \in A$, имеющих вид $U_p = L_V^p X_p$, где X_p – некоторое векторное поле на M^N . Очевидно, $A_{p+1} \subseteq A_p$. Подкольцо $R_p \subset R$ состоит из первых интегралов системы (1) вида $a_p(x) = L_V^p f_p(x)$, где $f_p(x)$ – некоторая гладкая функция на M^N ; поэтому $R_{p+1} \subseteq R_p$. Для доказательства включений (3) рассмотрим две симметрии $U_p = L_V^p X_p \in A_p$ и $U_q = L_V^q X_q \in A_q$ и применим обобщенную формулу Лейбница [1]

$$L_V^n [X_p, X_q] = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} [L_V^k X_p, L_V^{n-k} X_q]. \quad (5)$$

При $n = p + q$ формула (5) дает

$$[U_p, U_q] = \frac{p! q!}{(p+q)!} L_V^{p+q} [X_p, X_q] \in A_{p+q}.$$

Включения $R_p \cdot R_q \subset R_{p+q}$ и (4) следуют из обобщенных формул Лейбница [1] для $L_V^n(fg)$ и $L_V^n(X(f))$, где X – векторное поле и f, g – гладкие функции на M^N .

СЛЕДСТВИЕ. *Фактор-алгебры Ли A_p/A_{p+q} являются нильпотентными при $p, q \geq 1$ и абелевыми при $q \leq p$. Если $A_N = 0$ для некоторого N , то все алгебры Ли $A_1, \dots, A_{N-1}$ нильпотентны и при $q \geq [(N+1)/2]$ алгебры Ли A_q абелевы. Если алгебра Ли A_1 содержит некоторую простую алгебру Ли $\mathcal{G}$, то все алгебры Ли A_p содержат $\mathcal{G}$ и флаг (2) бесконечен.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [2] введены *мастер-симметрии* Z_2 , удовлетворяющие уравнениям $[V, [V, Z_2]] = 0$, $[V, Z_2] \neq 0$, и векторные поля Z_k , удовлетворяющие уравнениям $L_V^k Z_k = 0$, $L_V^{k-1} Z_k \neq 0$. Эти векторные поля не принадлежат алгебре Ли симметрий A . Их можно рассматривать как обобщенные собственные векторы оператора производной Ли L_V , удовлетворяющие уравнениям $L_V^k Z = 0$ для всех целых $k \geq 2$.

ПРИМЕР 1. Покажем, что флаг (2) и флаг $R \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$ могут быть бесконечны. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + \Phi(q_i), \quad (6)$$

где потенциал $\Phi(q_i)$ — однородная функция степени -2 . Функция $F = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$, очевидно, удовлетворяет уравнениям $L_V F = 2H$, $L_V^2 F = 0$, где V — векторное поле системы (6). Следовательно, гамильтониан $H \in R_1 \neq 0$ и $H^k \in R_k \neq 0$. Очевидно, $H^k V$ является симметрией системы (6) и $H^k V = (2^k k!)^{-1} L_V^k (F^k V) \in A_k \neq 0$ для всех $k \geq 1$. Следовательно, флаг (2) бесконечен. Например, это так для интегрируемой системы Калоджеро–Мозера (6) с потенциалом $\Phi(q_k) = \sum_{i \neq j} (q_i - q_j)^{-2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любой интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$, $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ с компактными инвариантными подмногообразиями флаг (2) имеет вид $A \supseteq A_1$, $A_2 = 0$. Интегрируемая система тогда и только тогда всюду невырождена по Колмогорову [3] (в каждой тороидальной области $\Theta = C_r \times \mathbb{T}^k$ определенной координатами “действие-угол”, где C_r — шар радиуса r в координатах $I_1, \dots, I_k$ и $\mathbb{T}^k$ — k -мерный тор с угловыми координатами $\varphi_1, \dots, \varphi_k$), когда $A = A_1$.

Доказательство использует теорему о симметриях и теорему 10 работы [4].

2. Для любого линейного оператора L в линейном пространстве B над некоторым полем K мы рассмотрим собственные подпространства $B_{\lambda,0}$, отвечающие собственному числу λ : $x \in B_{\lambda,0}$, если $Lx = \lambda x$. Для любого натурального k мы определяем линейные подпространства $B_{\lambda,k} = B_{\lambda,0} \cap (L - \lambda)^k B \subseteq B_{\lambda,0}$. Поскольку $(L - \lambda)^{k+1} B \subseteq (L - \lambda)^k B$, мы получаем каноническую флаг-структуру в каждом собственном подпространстве $B_{\lambda,0}$:

$$B_{\lambda,0} \supseteq B_{\lambda,1} \supseteq B_{\lambda,2} \supseteq \dots \quad (7)$$

Пусть $B_{\lambda_i} \supseteq B_{\lambda_i,0}$ — пространство обобщенных собственных векторов x , удовлетворяющих уравнению $(L - \lambda_i)^k x = 0$ для некоторого k . Пусть $B_{\lambda_i,-p} \subseteq B_{\lambda_i}$ — подпространство, аннулируемое оператором $(L - \lambda_i)^{p+1}$. Очевидно, что $B_{\lambda_i,-p-1} \supset B_{\lambda_i,-p}$. Учитывая включения (7), получаем флаг-структуру

$$B_{\lambda_i} \supset \dots \supset B_{\lambda_i,-1} \supset B_{\lambda_i,0} \supseteq B_{\lambda_i,1} \supseteq \dots \supseteq B_{\lambda_i,k(i)}, \quad (8)$$

где $B_{\lambda_i,k(i)}$ — последнее ненулевое подпространство. Легко проверить, что оператор $(L - \lambda_i)^p$ устанавливает изоморфизм

$$B_{\lambda_i,p} = B_{\lambda_i,0} \cap (L - \lambda_i)^p B_{\lambda_i} = B_{\lambda_i,-p} / B_{\lambda_i,-(p-1)}. \quad (9)$$

ПРИНЦИП СИММЕТРИИ ДЛЯ ФЛАГА (8). Число различных подпространств $B_{\lambda_i,-k}$ слева от $B_{\lambda_i,0}$ равно числу ненулевых подпространств $B_{\lambda_i,k}$ справа от $B_{\lambda_i,0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. E. Marsden, T. S. Ratiu. Introduction to Mechanics and Symmetry. New York: Springer-Verlag, 1999. [2] B. Fuchssteiner // Progr. Theoret. Phys. 1983. V. 70. №6. P. 1508–1522. [3] А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. №4. С. 527–530. [4] О. И. Богоуавленский // Comm. Math. Phys. 1997. V. 184. №2. P. 301–365.