Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, О представлении дзета-функции Римана в критической полосе через бесконечное произведение матриц второго порядка и об одной динамической системе, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:46:12

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ ЧЕРЕЗ БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

Хорошо известно, что дзета-функция Римана $\zeta(s)$ представляется в виде бесконечного произведения Эйлера только в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ (Re – вещественная часть s). В настоящей работе доказано, что в критической полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ функция $\zeta(s)$ представляется через бесконечное произведение конкретных матриц второго порядка (теорема 1). Это представление впервые было получено в [1], однако существенная часть доказательства, которая сформулирована и доказана ниже в лемме, не была до сих пор опубликована. Эта лемма – не тривиальная, так как ее утверждение несправедливо, например, при $s = 0$ и при любом натуральном числе $k \geq 2$, а доказательство существенно использует условие $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Теорема 1 вместе с основным результатом работы [1] позволяет построить динамическую систему, которая оказывается связанной с гипотезой Римана о нулях так, что каждому комплексному нулю функции $\zeta(s)$, не лежащему на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, соответствует периодическая траектория второго порядка специального вида (теорема 2 и ее следствие).

ЛЕММА. При целом $k \geq 2$ рассмотрим функции

$$h_k(s) = 1/k^s - (k^{1-s} - (k-1)^{1-s})/(1-s). \quad (1)$$

Тогда в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$ справедливы неравенства $h_k(s) \neq 0$, $k = 2, 3, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $h_k(s) = 0$, $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Тогда в силу (1) получаем: $1-s = k(1 - (1 - 1/k)^{1-s})$,

$$\operatorname{Re}(1-s) = \operatorname{Re}(k(1 - (1 - 1/k)^{1-s})). \quad (2)$$

Пусть $s = \sigma + it$, где σ и t – вещественные числа, $0 < \sigma < 1$. Имеем:

$$(1 - 1/k)^{1-s} = (1 - 1/k)^{1-\sigma} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

где θ – вещественное число. Поэтому

$$\beta_s \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re}(k(1 - (1 - 1/k)^{1-s})) = k(1 - (1 - 1/k)^{1-\sigma} \cos \theta). \quad (3)$$

Рассмотрим два случая, случай 1): $\cos \theta \leq 0$, и случай 2): $\cos \theta > 0$. В первом случае в силу неравенств $0 < \operatorname{Re} s < 1$ при $k \geq 2$ получаем неравенство $\operatorname{Re}(1-s) = 1-\sigma < k \leq \beta_s$, и, следовательно, в силу определения β_s в (3) равенство (2) несправедливо. Во втором случае, используя неравенства $\cos \theta > 0$, $0 < \sigma < 1$, имеем:

$$0 < (1 - 1/k)^{1-\sigma} \cos \theta \leq (1 - 1/k)^{1-\sigma} = 1 - (1-\sigma)/k - \sum_{\nu=2}^{\infty} \gamma_{\nu}/k^{\nu}, \quad (4)$$

где $\gamma_{\nu} > 0$, $\nu = 2, 3, \dots$, – константы, не зависящие от k . Подставляя (4) в (3), получаем неравенство $\beta_s \geq k((1-\sigma)/k + \sum_{\nu=2}^{\infty} \gamma_{\nu}/k^{\nu}) > 1-\sigma$, которое также противоречит (2). Лемма доказана.

Лемма позволяет дать следующее определение.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01067).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При $k = 1, 2, \dots$ в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$ рассмотрим функции $p_k(s) = h_k(s)/h_{k-1}(s)$, где $h_1(s) = (s-1)^{-1}$, $h_0(s) = 1$ и при целом $k \geq 2$ функции $h_k(s)$ введены в (1), и определим матрицы

$$Q_k = Q_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_k(s) & -1 - p_k(s) \end{pmatrix},$$

зависящие от s .

ТЕОРЕМА 1. Бесконечные произведения $Q'_\infty(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{2k}(s)Q_{2k-1}(s) \cdots Q_1(s)$ и $Q''_\infty(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{2k-1}(s)Q_{2k-2}(s) \cdots Q_1(s)$ определены в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$ и имеют следующий вид:

$$Q'_\infty(s) = \begin{pmatrix} -\zeta(s) + 1 & -\zeta(s) \\ \zeta(s) - 1 & \zeta(s) \end{pmatrix}, \quad Q''_\infty(s) = \begin{pmatrix} \zeta(s) - 1 & \zeta(s) \\ -\zeta(s) + 1 & -\zeta(s) \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 1 содержится в доказательстве теоремы 2 из работы [1].

Обозначим через $\Pi = \{s : 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ критическую полосу, а через l гильбертово пространство, элементами которого являются односторонние последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$ комплексных чисел, удовлетворяющие условию $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2 < \infty$.

Введем оператор $A(s)$, зависящий от комплексного числа $s \in \Pi$ и действующий на l следующим образом: если $x = (x_1, x_2, \dots) \in l$, то $A(s)x = x' = (x'_1, x'_2, \dots)$, где $x'_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}(s)x_j$,

$$a_{kj}(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } k - j = -1, \\ p_k(s), & \text{если } 0 \leq k - j \leq 1, \\ 0, & \text{если } |k - j| > 1, \end{cases}$$

$p_k(s)$ — функции, введенные в определении 1, $k = 1, 2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Введем пространство $\Omega = \Pi \times l \times l$, являющееся прямым произведением Π , l и l , и преобразование T пространства Ω такое, что если $(s, x, y) \in \Omega$ ($s \in \Pi$, $x \in l$, $y \in l$), то $T(s, x, y) = (s', x', y')$, где $s' = 1 - s$, $x' = A(s')y$, $y' = A(s)x$.

ТЕОРЕМА 2. Функция $\zeta(s)$ тогда и только тогда имеет нуль $s_* \in \Pi$ ($\zeta(s_*) = 0$), удовлетворяющий условию $\operatorname{Re} s_* \neq 1/2$, когда существует точка $(s_*, e, \delta) \in \Omega$ ($e \in l$, $\delta \in l$) такая, что $\|e\| + \|\delta\| \neq 0$, и если $(s'_*, e', \delta') = T(s_*, e, \delta)$, то $e' = -\delta$, $\delta' = -e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 2 преобразования T , без ограничения общности достаточно рассмотреть случай $1/2 < \operatorname{Re} s_* < 1$. Если $\zeta(s_*) = 0$, то в качестве δ возьмем последовательность, состоящую из одних нулей, а в качестве e возьмем собственный вектор оператора $A(s_*)$ с собственным значением $\lambda = -1$, который существует в силу теоремы 1 из работы [1].

СЛЕДСТВИЕ. Если $\zeta(s_*) = 0$, $s_* \in \Pi$, $\operatorname{Re} s_* \neq 1/2$, то отображение T^2 имеет неподвижную точку $(s_*, e, \delta) \in \Omega$ такую, что $\|e\| + \|\delta\| \neq 0$: $T^2(s_*, e, \delta) = (s_*, e, \delta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Пустыльников // УМН. 1991. Т. 46. № 2. С. 227–228.