Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, Об интерполяционных свойствах диагональных аппроксимаций
Паде эллиптических функций, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:58:06

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ДИАГОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. П. СУЕТИН

1. Пусть $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k/z^{k+1}$ – сходящийся в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ степенной ряд, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность его диагональных аппроксимаций Паде: $f_n = P_n/Q_n$, где $P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n, \deg Q_n \leq n$, $Q_n \neq 0$ и $R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) = O(1/z^{n+1})$ при $z \rightarrow \infty$, R_n – функция остатка. Наиболее общий результат о сходимости диагональных аппроксимаций Паде – теорема Шталя [1], из которой, в частности, следует, что *если ряд f представляет алгебраическую функцию, то последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится по емкости внутри области $D = \mathbb{C} \setminus S$, где $S = S(f)$ – компакт минимальной емкости [2], [3], соответствующий выбранной рядом f ветви алгебраической функции: f продолжается из окрестности точки $z = \infty$ в дополнение к S как мероморфная (т.е. однозначная аналитическая) функция, а из всех компактов, обладающих таким свойством, S имеет наименьшую емкость. При этом (см. [4]–[7]) в проколотой области $D' = D \setminus \{\text{полюсы } f\}$, где продолженная функция голоморфна, полюсы рациональных дробей f_n могут иметь предельные точки. Принято считать [4]–[7], что именно наличие у f_n при $n \in \Lambda$ таких полюсов, компактно принадлежащих D' , и является препятствием к равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ внутри D' . Для некоторых классов гиперэллиптических функций удалось показать [8], [9], что динамика этих полюсов подчиняется определенной закономерности. Известно [4]–[7], что таким полюсам сопутствуют близкие нули f_n . Тем самым, уместно говорить о парах полюс–нуль, называемых *дефектами* [4; гл. 2, §2.2]. Так как асимптотически нули и полюсы в этих парах взаимно сокращаются, то принято считать [4], что их появление носит случайный характер и никак не связано с природой функции f . Такой подход к этому явлению отразился и на соответствующей терминологии: подобные полюсы и нули аппроксимаций стали называть “ложными”. Особенно негативно сказывается их появление при использовании аппроксимаций Паде в приложениях [4], в связи с чем при $n \in \Lambda$ и сами аппроксимации Паде f_n предлагается считать дефектными и исключать из рассмотрения [4; гл. 2, §2.3] или использовать процедуры так называемого “очищения” от ложных полюсов [6].*

2. В [10] Дюма исследовал вопрос об асимптотическом поведении последовательности $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ для эллиптической функции вида

$$d(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + (e_1 + \cdots + e_4)z/2, \quad (1)$$

где точки $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{C}$ попарно различны и выбрана та ветвь корня, главный член которой в окрестности точки $z = \infty$ равен z^2 ; тем самым $d \in \mathcal{H}(\infty)$. Дюма, в частности, показал, что в “общем положении” множество полюсов дробей d_n всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$.

В [11] (см. также [12]) результат Дюма был распространен на некоторый класс эллиптических функций. При этом было отмечено [11; §1, п. 2] следующее явление: при каждом n , принадлежащем некоторой подпоследовательности Λ , всегда существует точка $\beta = \beta_n \in D = \mathbb{C} \setminus S$, для которой $d_n(\beta_n) = \tilde{d}(\beta_n)$, где $\tilde{d}(z) = -\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + (e_1 + \cdots + e_4)z/2$ – другая ветвь эллиптической функции (1) в D . Таким образом, для каждого n из некоторой подпоследовательности Λ диагональные аппроксимации Паде d_n интерполируют в некоторой подполюс области D другую ветвь функции d . При этом, в случае общего положения такие точки “неправильной” интерполяции $\{\beta_n\}_{n \in \Lambda}$ всюду плотны в $\overline{\mathbb{C}}$.

В настоящей заметке приводятся более общие результаты в этом направлении.

3. Рассмотрим класс эллиптических функций вида

$$f(z) = w(z)/q(z) - r(z), \quad (2)$$

где $w(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}$, $q \in \mathbb{C}[z]$ – произвольный полином, который на S может иметь лишь простые нули в точках $e_1, \dots, e_4$, а $r \in \mathbb{C}(z)$ есть сумма главных частей мероморфной в области $D = \mathbb{C} \setminus S$ функции $w(z)/q(z)$; тем самым, $f \in \mathcal{H}(D)$ (при $q(z) \equiv 1$ получаем функцию

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 03-51-6637) и программы поддержки ведущих научных школ России (грант № НШ-1551.2003.1).

Дюма (1)). Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность диагональных аппроксимаций Паде функции f , $\tilde{f}(z) = -w(z)/q(z) - r(z)$ – другая ветвь функции (2) в D .

ТЕОРЕМА 1. В “общем положении” для произвольной функции f вида (2) имеем: $\mathbb{N} = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 \sqcup \Lambda_3$, где плотности последовательностей $\Lambda_1 = \Lambda_1(f)$ и $\Lambda_2 = \Lambda_2(f)$ равны $1/2$, при каждом $n \in \Lambda_1$ существует точка $\alpha_n \in D$, а при каждом $n \in \Lambda_2$ точка $\beta_n \in D$ такие, что:

- 1) $f_n(\alpha_n) = f(\alpha_n)$ при $n \in \Lambda_1$ и $\{\alpha_n\}'_{n \in \Lambda_1} = \overline{\mathbb{C}}$;
- 2) $f_n(\beta_n) = \tilde{f}(\beta_n)$ при $n \in \Lambda_2$ и $\{\beta_n\}'_{n \in \Lambda_2} = \overline{\mathbb{C}}$.

(При этом $f_n \rightarrow f$ равномерно внутри D при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda_1$.)

В условиях теоремы 1 для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ через Λ_2^ε обозначим множество $n \in \Lambda_2$ таких, что $\beta_n \in D^\varepsilon$, где $D^\varepsilon = \mathbb{C} \setminus S^\varepsilon$, а $S^\varepsilon - 2\varepsilon$ -окрестность множества S .

ТЕОРЕМА 2. Пусть в условиях теоремы 1 $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число, $K_n^\varepsilon = \{z \in D: |z - \beta_n| < \varepsilon\}$ при $n \in \Lambda_2^\varepsilon$. Тогда для всех достаточно больших $n \in \Lambda_2^\varepsilon$ имеем: $f_n(K_n^\varepsilon) = \overline{\mathbb{C}}$.

Таким образом, из теоремы 2 вытекает, что существование ложных полюсов и нулей диагональных аппроксимаций Паде f_n функций вида (2) является непосредственным следствием наличия в области D точек, в которых эти диагональные аппроксимации *интерполируют другую ветвь $\tilde{f}$ функции f* (и, тем самым, существование таких полюсов и нулей напрямую связано с природой аппроксимируемой функции). Естественно назвать такие точки ложными точками интерполяции для диагональных аппроксимаций Паде или просто *ложными точками* для диагональных аппроксимаций Паде.

4. Приведем формальное определение для общего случая гиперэллиптических функций. Пусть $f(z) = r_1(z) + r_2(z)w(z)$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$, $w(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_{2g+2})}$, $g \in \mathbb{N}$, точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ попарно различны и выбрана такая ветвь корня, что $w(z)/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Область $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$, где S – компакт минимальной емкости, соответствующий функции $w(z)$, $\tilde{f}$ – другая ветвь гиперэллиптической функции f в D : $\tilde{f}(z) = r_1(z) - r_2(z)w(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для произвольного фиксированного $n \in \mathbb{N}$ точку $\beta = \beta_n \in D$ назовем *ложной точкой* для диагональной аппроксимации Паде f_n гиперэллиптической функции f , если $r_2(\beta) \neq 0$ и $f_n(\beta) = \tilde{f}(\beta)$.

Отметим, что впервые *явно* на это явление ложной интерполяции указано в работе Буслаева [13]: именно на этом свойстве f_n основан его контрпример к известной гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса (соответствующая функция Буслаева – гиперэллиптическая рода $g = 2$; см. также [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Stahl // Constr. Approx. 1986. V. 2. P. 225–240; 241–251. [2] J. Nuttall // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. P. 299–386. [3] H. Stahl // Complex Variables. 1985. V. 4. P. 311–324; 325–338; 339–354. [4] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. [5] A. Baker George, Jr. // Acta Appl. Math. 2000. V. 61. № 1–3. P. 37–52. [6] H. Stahl // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math. (6). Spec. Iss. 1996. P. 121–193. [7] H. Stahl // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 287–292. [8] Е. А. Рахманов // Матем. сб. 1977. Т. 104 (146). № 2. С. 271–291. [9] С. П. Суетин // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 81–114. [10] S. Dumas. Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues. Thesis. Zürich, 1908. [11] С. П. Суетин // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 12. С. 63–92. [12] С. П. Суетин // УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 199–200. [13] В. И. Буслаев // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 6. С. 25–38. [14] С. П. Суетин // УМН. 2003. Т. 58. № 4. С. 159–160.