Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Метод вырождения и нерациональность трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:09:43

МЕТОД ВЫРОЖДЕНИЯ И НЕРАЦИОНАЛЬНОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ПУЧКОМ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕЛЬ ПЕЦЦО

И. А. ЧЕЛЬЦОВ

Проблема рациональности алгебраических многообразий является одной из наиболее глубоких и интересных проблем алгебраической геометрии. Глобальные голоморфные дифференциальные формы являются естественными бирациональными инвариантами гладкого многообразия, которые полностью решают проблему рациональности алгебраических кривых и поверхностей (см. [1]). Однако уже в трехмерном случае существуют нерациональные многообразия, которые во многом очень близки к рациональным, и имеющих дискретных инвариантов уже не хватает для определения рациональности. Например, существуют трехмерные нерациональные, но унирациональные многообразия (см. [1] и [2]). Тем не менее, получить подобные примеры нелегко. На данный момент существует четыре способа доказательства нерациональности рационально связанных многообразий (см. [2]). В настоящей работе мы дадим простое доказательство следующего хорошо известного результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ – подмногообразие, являющееся общим эффективным дивизором бистепени $(m, 3)$, а V – двулистное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с ветвлением в общем дивизоре бистепени $(m, 4)$. Тогда оба многообразия V и X нерациональны при $m \geq 2$.

Отметим, что многообразие X в теореме 1 представимо в виде расслоения на кубические поверхности, а V – в виде расслоения на поверхности дель Пеццо степени 2. Известно, что многообразия X и V унирациональны, а при $m \leq 1$ рациональны. Нерациональность V при $m = 2$ следует из [3]. Нерациональность X при $m \geq 2$ доказана в [4]. Бирациональная жесткость и нерациональность X и V при $m \geq 3$ доказана в [5]. Из [1] и [6] следует нерациональность X при $m \geq 5$ и нерациональность V при $m \geq 2$. Все структуры расслоений Мори на многообразии X описаны в [7] в случае $m = 2$, откуда также следует его нерациональность.

Для доказательства теоремы 1 мы воспользуемся следующим результатом в [8], современное доказательство которого содержится в [1] и который обобщает стандартную технику вырождения (см. [2]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\xi: Y \rightarrow Z$ – собственный плоский морфизм с неприводимыми и приведенными слоями. Тогда существует такое счетное множество замкнутых подмногообразий $Z_i \subset Z$, что для любой замкнутой точки $s \in Z$ слой $\xi^{-1}(s)$ является линейчатым многообразием, если и только если $s \in \bigcup Z_i$.

Возьмем прямую $L \subset \mathbb{P}^3$ и точку $O \in \mathbb{P}^2$. Рассмотрим гладкую поверхность $S = \alpha^{-1}(L)$ и гладкую кривую $C = \beta^{-1}(O)$, где $\alpha: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ и $\beta: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – проекции на второй множитель. Пусть $\hat{X} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ – общий эффективный дивизор бистепени $(m, 3)$, содержащий поверхность S , а $\pi: \hat{V} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ – двулистное накрытие с ветвлением в достаточно общем дивизоре D бистепени $(m, 4)$, имеющем особенность типа $A_1 \times \mathbb{C}$ в общей точке кривой C .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Многообразия $\hat{X}$ и $\hat{V}$ могут быть получены как плоские собственные деформации многообразий X и V соответственно. Более того, оба многообразия $\hat{X}$ и $\hat{V}$ рационально связны (см. [1]). С другой стороны, рационально связанное трехмерное многообразие линейчато, если и только если оно рационально. Таким образом, из теоремы 2 следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать нерациональность $\hat{X}$ и $\hat{V}$ при $m \geq 2$.

Геометрически построенное вырождение означает следующее. Общий слой естественной проекции X и V на $\mathbb{P}^1$ – гладкая поверхность дель Пеццо степени 3 и 2 соответственно, определенная

Автор очень признателен М. М. Гриненко, В. А. Исковских, С. А. Кудрявцеву, Ю. Г. Прохорову, А. В. Пухликкову и В. В. Шокурову за плодотворные беседы. Все рассматриваемые многообразия считаются проективными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

над полем $\mathbb{C}(x)$, которая имеет группу Пикара $\mathbb{Z}$ при $m \geq 1$. С другой стороны, общий слой проекции $\hat{X}$ на $\mathbb{P}^1$ является гладкой кубической поверхностью в $\mathbb{P}^3$, которая содержит прямую. Проекция из этой прямой задает на многообразии $\hat{X}$ структуру расслоения на коники. Общий слой проекции $\hat{V}$ на $\mathbb{P}^1$ является поверхностью дель Пеццо степени 2, которая имеет одну обыкновенную двойную точку. Пучок антиканонических кривых на этой поверхности, проходящих через двойную точку, задает на $\hat{V}$ структуру расслоения на коники.

Пусть $\gamma: U \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ – раздутие поверхности $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а $\chi: W \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ – раздутие кривой C . Положим $\tilde{X} = \gamma^{-1}(\hat{X})$ и $\tilde{D} = \chi^{-1}(D)$. Пусть $\tilde{\pi}: \tilde{V} \rightarrow W$ – двулистное накрытие с ветвлением в дивизоре $\tilde{D} \subset W$. Локальные вычисления показывают, что $\tilde{X}$ и $\tilde{V}$ неособы в силу общности выбора дивизоров $\hat{X}$ и D . Отметим, что по построению $\tilde{X}$ и $\tilde{V}$ являются разрешением особенностей многообразий $\hat{X}$ и $\hat{V}$ соответственно. Причем $\hat{X}$ обязательно особа при $m \geq 1$, но оно всегда нодально в силу общности выбора $\hat{X}$, а $\gamma|_{\tilde{X}}$ – малое разрешение.

Проекция из прямой L индуцирует морфизм $\tau: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а проекция из точки O индуцирует морфизмы $\eta: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. По построению, морфизмы τ и η являются расслоениями на коники. Причем $\text{Pic}(\tilde{X}) \cong \text{Pic}(\tilde{V}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ по теореме Лефшеца.

ЛЕММА 4. Пусть Λ и Ξ – дивизоры на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, являющиеся дивизорами вырождения расслоений τ и η соответственно. Тогда би-степени Λ и Ξ суть $(5, 3m)$ и $(6, 2m)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложные вычисления.

С другой стороны, в [10] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\omega: Y \rightarrow Z$ – расслоение на коники, Y – неособое трехмерное многообразие, $\text{Pic}(Y/Z) = \mathbb{Z}$, а поверхность Z есть $\mathbb{F}_r$ или $\mathbb{P}^2$. Тогда из рациональности трехмерного многообразия Y следует $|2K_Z + \Delta| = \emptyset$, где Δ – дивизор вырождения расслоения ω .

Таким образом, из леммы 4 и теоремы 5 следует, что многообразия $\tilde{X}$ и $\tilde{V}$ нерациональны при $m \geq 2$. Значит, теорема 1 доказана (см. замечание 3). Следует отметить, что описанный метод несложно обобщается на многие неособые трехмерные многообразия, расслоенные на поверхности дель Пеццо степени 1, 2 и 3. Для неособых трехмерных многообразий, расслоенных на поверхности дель Пеццо степени 4, вырождение не требуется, поскольку такие многообразия всегда представимы в виде расслоения на коники. В последнем случае вопрос рациональности исследован в [9]. Все трехмерные многообразия, расслоенные на поверхности дель Пеццо степени не меньше 5, рациональны (см. [10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Kollár. Rational Curves on Algebraic Varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [2] В. А. Исковских // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 190–232. [3] В. В. Шокуров // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 23. № 4. С. 785–855. [4] F. Bardelli // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1984. V. 137. P. 287–369. [5] А. В. Пухликов // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164. [6] J. Kollár // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2000. V. 281. P. 51–71.
- [7] И. В. Соболев // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 1. С. 203–224. [8] T. Matsusaka // Nagoya Math. J. 1968. V. 31. P. 185–245; corrections, ibid. V. 33. P. 137; V. 36. P. 119.
- [9] В. А. Алексеев // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 5. С. 724–730. [10] В. А. Исковских // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 3–72.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Принято редколлегией
24.05.2004