Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Чечкин, Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:58:12

**РАСЩЕПЛЕНИЕ КРАТНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ
В ЗАДАЧЕ О КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ МАССАХ**

Г. А. ЧЕЧКИН

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^2$, лежащая в верхней полуплоскости, граница которой является кусочно гладкой и состоит из нескольких частей: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, при этом $\Gamma_4 = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, где Γ_4 – интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на оси абсцисс, а Γ_2 и Γ_3 принадлежат прямым $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_1 = \frac{\pi}{2}$ соответственно. Здесь $\varepsilon = \frac{1}{2\mathcal{N}+1}$ – малый параметр, $\mathcal{N}$ – натуральное число, $\mathcal{N} \gg 1$. Опишем подробнее мелкомасштабную структуру Γ_4 . Пусть $\gamma = \{\xi : -a < \xi_1 < a, \xi_2 = 0\}$, $\Gamma = \{\xi : -\frac{\pi}{2} < \xi_1 < -a, a < \xi_1 < \frac{\pi}{2}, \xi_2 = 0\}$ в переменных $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, при этом $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma_4 : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, 0) \in \gamma, j \in \mathbb{Z}\}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_4 \setminus \gamma_\varepsilon$. Обозначим $\Pi = \{\xi : -\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \frac{\pi}{2}, \xi_2 > 0\}$, $B = \{\xi : \xi_1^2 + \xi_2^2 < a^2, \xi_2 > 0\}$, $B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \bigcup B_\varepsilon^j$.

Рассмотрим задачу

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon \text{ при } x \in \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ при } x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \quad (1)$$

где $\rho_\varepsilon(x)$ равна 1 в $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ и равна $(a\varepsilon)^{-m}$ в B_ε , $0 < m < 2$. Будем называть множества B_ε^j *концентрированными массами*.

Можно показать (см., например, [1], а также [2]), что задача

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 \text{ при } x \in \Omega, \quad u_0 = 0 \text{ при } x \in \Gamma_4, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \quad (2)$$

является предельной для задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, к собственному значению λ_0 кратности N задачи (2) сходятся N собственных значений (с учетом совокупной кратности) задачи (1). Целью настоящей работы является построение асимптотики собственных значений задачи (1), сходящихся к двукратному собственному значению λ_0 задачи (2).

Для построения асимптотики воспользуемся методом согласования асимптотических разложений (см. [3], [4]).

Обозначим две собственные функции задачи (2), соответствующие собственному значению λ_0 , через $u_0^{(1)}$ и $u_0^{(2)}$. Считаем, что они нормированы в $L_2(\Omega)$. Обозначим $\alpha_0^{(\theta)}(x_1) = \frac{\partial u_0^{(\theta)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}$. Здесь и далее $\theta = 1, 2$. Легко видеть, что эти функции можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли дополнительному условию ортогональности $(\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)})_{L_2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$. Для простоты изложения считаем, что $\|\alpha_0^{(1)}\|_{L_2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \neq \|\alpha_0^{(2)}\|_{L_2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.

Внешнее разложение (вне малой окрестности Γ_4) строится в виде

$$u_\varepsilon^{(\theta)}(x) = u_0^{(\theta)}(x) + \varepsilon u_1^{(\theta)}(x) + \dots, \quad (3)$$

внутреннее разложение (в малой окрестности Γ_4) строится в виде

$$u_\varepsilon^{(\theta)}(x) = \varepsilon v_1^{(\theta)}\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right) + \dots, \quad (4)$$

а разложение собственных значений –

$$\lambda_\varepsilon^{(\theta)} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(\theta)} \dots \quad (5)$$

Краевая задача для коэффициента $v_1^{(\theta)}(\xi; x_1)$ имеет вид

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_1^{(\theta)} = 0 \text{ в } \Pi, \\ v_1^{(\theta)} = 0 \text{ на } \gamma, \\ \frac{\partial v_1^{(\theta)}}{\partial \xi_2} = 0 \text{ на } \Gamma, \\ \frac{\partial v_1^{(\theta)}}{\partial \xi_1}(\xi; \pm \frac{\pi}{2}) = 0 \text{ при } \xi_1 = \pm \frac{\pi}{2}, \\ v_1^{(\theta)} \sim \alpha_0^{(\theta)} \xi_2 \text{ при } \xi_2 \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (6)$$

Решение задачи (6) существует и имеет асимптотику при $\xi_2 \rightarrow +\infty$:

$$v_1^{(\theta)}(\xi) = \alpha_0^{(\theta)}(x_1)(\xi_2 - \ln \sin a) + O(e^{-2\xi_2}). \quad (7)$$

Перепишывая асимптотику $\varepsilon v_1^{(\theta)}$ во внешних переменных, в силу согласования асимптотических разложений получаем краевую задачу для $u_1^{(\theta)}$:

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{(\theta)} = \lambda_0 u_1^{(\theta)} + \lambda_1^{(\theta)} u_0^{(\theta)} \text{ в } \Omega, \\ u_1^{(\theta)} = -\alpha_0^{(\theta)} \ln \sin a \text{ на } \Gamma_4, \\ \frac{\partial u_1^{(\theta)}}{\partial \nu}(x) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \end{cases} \quad (8)$$

Из условия разрешимости задачи (8) определяется поправочный член $\lambda_1^{(\theta)}$ в разложении (5) по формуле

$$\lambda_1^{(\theta)} = \ln \sin a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\alpha_0^{(\theta)}(x_1))^2 dx_1. \quad (9)$$

Случай простого собственного значения см. в [5]. Отметим также, что дополнительное условие ортогональности ранее возникало в [6] для задачи с частой сменой типа граничного условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Чечкин // Краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1989. С. 197–200. [2] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. [3] А. М. Ильин. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. [4] Р. Р. Гадильшин // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. №1. С. 3–19. [5] G. A. Chechkin. On vibration of partially fastened membrane with many “light” concentrated masses on the boundary // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb. 2004. V. 332 (to appear). [6] Д. И. Борисов. Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 6. С. 23–70.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
24.05.2004