Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Богачев, Е. Б. Яровая, Предельная теорема для надкритического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с одним источником, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 229–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:47:57

**ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НАДКРИТИЧЕСКОГО
ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ НА $\mathbb{Z}^d$
С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ**

Л. В. БОГАЧЕВ, Е. Б. ЯРОВАЯ

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем на решетке $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$), предполагая, что в начальный момент в системе имела одна частица в точке x , а ветвление (т.е. размножение и гибель частиц) происходит в единственном источнике x_0 . Такая модель была впервые рассмотрена в [1] для простого случайного блуждания с чистым размножением частиц (делением пополам). Более общий случай симметричного блуждания с конечной дисперсией скачков и с произвольным источником изучался в [2]. В настоящей заметке предполагается, что случайное блуждание не обязательно симметрично, но имеет нулевой снос. Целью работы является доказательство предельной теоремы для надкритического случая, согласно которой имеет место экспоненциальный рост численностей частиц в каждом узле решетки, а также общего числа частиц в системе.

Пусть $A := (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ — матрица переходных интенсивностей блуждания, $a(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$, $a(x, x) < 0$ и $\sum_y a(x, y) = 0$, причем $a(x, y) = a(0, y - x)$, $\sum_y a(0, y) y = 0$ и $\sum_y a(0, y) |y|^2 < \infty$. Предположим также, что матрица A неприводима. Механизм ветвления в источнике $x_0 = 0$ не зависит от блуждания и задается производящей функцией $f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$, где $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_n b_n = 0$ (см. [3]). Как обычно, предполагается, что каждая из частиц эволюционирует независимо от остальных частиц. Будем считать, что существуют все производные $\beta_r := f^{(r)}(1)$, $r \in \mathbb{N}$, т.е. конечны все моменты числа непосредственных потомков частицы, и обозначим для краткости $\beta := \beta_1$. Отметим, что при $\beta > 0$ среднее число потомков больше 1.

Пусть $\mu_t(y)$ — численность частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, а $\mu_t := \sum_y \mu_t(y)$ — полное число частиц в момент времени $t \geq 0$. Можно показать (см. [2]), что функции $m_n(t, x, y) := \mathbb{E}_x \mu_t^n(y)$ и $m_n(t, x) := \mathbb{E}_x \mu_t^n$ ($n \in \mathbb{N}$), где $\mathbb{E}_x$ — математическое ожидание при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$, удовлетворяют обратным уравнениям Колмогорова

$$(1) \quad \frac{\partial m_1}{\partial t} = A m_1 + \beta \delta_0(x) m_1,$$

$$(2) \quad \frac{\partial m_n}{\partial t} = A m_n + \beta \delta_0(x) m_n + \delta_0(x) g_n(m_1, \dots, m_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

с начальными условиями $m_n(0, \cdot, y) = \delta_y(\cdot)$, $m_n(0, \cdot) \equiv 1$ соответственно. Здесь

$$(3) \quad g_n(m_1, \dots, m_{n-1}) := \sum_{r=2}^n \frac{\beta_r}{r!} \sum_{(i_1, \dots, i_r)} \frac{n!}{i_1! \dots i_r!} m_{i_1} \dots m_{i_r},$$

где суммирование во внутренней сумме ведется по упорядоченным целым наборам $(i_1, \dots, i_r)$ таким, что $i_1, \dots, i_r > 0$, $i_1 + \dots + i_r = n$.

Согласно локальной предельной теореме (см. [4, §7]), для переходной вероятности случайного блуждания существует предел

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{d/2} p(t, x, y) > 0.$$

Рассмотрим функцию Грина $G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt$ и обозначим $\beta_c := 1/G_0(0, 0)$. В силу (4) $\beta_c = 0$ при $d = 1, 2$ и $\beta_c > 0$ при $d \geq 3$. Наконец, при $\beta > \beta_c$ обозначим через λ_0 единственный (положительный) корень уравнения $\beta G_\lambda(0, 0) = 1$. Нетрудно проверить, что оператор $H := A + \beta \delta_0(x)$ является ограниченным (вообще говоря, несамосопряженным) оператором на $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Отметим (см. [2]), что существенный спектр H совпадает с множеством значений функции $\phi(\theta) := \sum_x a(x, 0) e^{i(x, \theta)}$, $\theta \in [-\pi, \pi]^d$, а параметр $\lambda_0 > 0$ является собственным значением H с наибольшей действительной частью. При этом функция $\psi_0(y) := \lambda_0 G_{\lambda_0}(0, y) > 0$, фигурирующая ниже в теореме 2, есть соответствующая собственная функция сопряженного оператора $H^* = A^* + \beta \delta_0(y)$, нормированная условием $\sum_y \psi_0(y) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\beta > \beta_c$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-n\lambda_0 t} m_n(t, x, y) = C_n(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-n\lambda_0 t} m_n(t, x) = C_n(x).$$

Константы $C_n(x, y), C_n(x) > 0$ определяются рекуррентно:

$$(6) \quad C_1(x, y) = \frac{G_{\lambda_0}(x, 0) G_{\lambda_0}(0, y)}{G_{\lambda_0}^{(2)}(0, 0)}, \quad C_1(x) = \frac{G_{\lambda_0}(x, 0)}{\lambda_0 G_{\lambda_0}^{(2)}(0, 0)},$$

$$(7) \quad C_n = g_n(C_1, \dots, C_{n-1})|_{x=0} \cdot \frac{G_{n\lambda_0}(x, 0) G_{\lambda_0}(0, 0)}{G_{\lambda_0}(0, 0) - G_{n\lambda_0}(0, 0)}, \quad n \geq 2,$$

где $G_{\lambda_0}^{(2)}(0, 0) := \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} t p(t, 0, 0) dt = \sum_y G_{\lambda_0}(0, y) G_{\lambda_0}(y, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем неоднородные уравнения [2] с помощью вариации постоянных в интегральном виде [2]

$$(8) \quad m_n(t, x) = m_1(t, x) + \int_0^t m_1(t-s, x, 0) g_n(s, 0) ds,$$

где $g_n(s, 0) := g_n(m_1(s, 0), \dots, m_{n-1}(s, 0))$. Для $m_n(t, x, y)$ интегральное уравнение записывается аналогично. Отсюда видно, что доказательство по существу сводится к рассмотрению случая $n = 1$, поскольку асимптотику старших моментов можно затем найти индуктивно. При $n = 1$ основным является случай, когда $x = 0, y = 0$ (см. [2]). Из [1] получаем уравнение восстановления

$$m_1(t, 0) = 1 + \beta \int_0^t m_1(t-s, 0) p(s, 0, 0) dt.$$

Для $m_1(t, 0, 0)$ уравнение аналогично, но в правой части 1 заменяется на $p(t, 0, 0)$. Отсюда по теории восстановления (см., например, [3, §IV.4]) с учетом (4) получаем (5) (при $n = 1$) и (6). Наконец, рекуррентное уравнение (7) вытекает по индукции из (8).

ТЕОРЕМА 2. Если $\beta > \beta_c$, то в смысле сходимости моментов

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(y) e^{-\lambda_0 t} = \xi \psi_0(y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\lambda_0 t} = \xi,$$

где $\psi_0(y) = \lambda_0 G_{\lambda_0}(0, y)$, ξ — невырожденная случайная величина, такая, что $E_x \xi^n = C_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$), а $C_n(x)$ определены в (6), (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе из соотношений (9) сразу следует из (5). Далее, функция g_n , определенная формулой (3), является квазиоднородной, т.е. $g_n(\alpha C_1, \dots, \alpha^{n-1} C_{n-1}) = \alpha^n g_n(C_1, \dots, C_{n-1})$. В силу (6) имеем $C_1(x, y) = \psi_0(y) C_1(x)$, откуда по индукции получаем первую из формул (9).

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что $\beta_r \leq \text{const} \cdot r! r^{r-1}$ при всех $r \in \mathbb{N}$. Тогда моменты $C_n(x)$ однозначно определяют распределение случайной величины ξ и, таким образом, соотношения (9) справедливы в смысле сходимости по распределению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью (7) можно показать по индукции, что $C_n(x) \leq \gamma^n n! n^n$, где $\gamma = \text{const}$, так что $\sum_n C_n^{-1/(2n)} = \infty$ и, таким образом, проблема моментов Стильеса (на полуоси) для последовательности $\{C_n\}$ однозначно разрешима (5, Th.1.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яровая Е. В. // ТМФ. 1991. Т. 88. № 1. С. 25–30. [2] Alberverio S., Bogachev L. V., Yarovaia E. B. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1998. V. 326. P. 975–980. [3] Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972. [4] Спирер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969. [5] Shohat J. A., Tamarkin J. D. The Problem of Moments. New York: Amer. Math. Soc., 1950.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: lvb@mech.math.msu.su yarov@aha.ru

Принято редколлегией
19.08.1998