Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кустарев, Циклы особенностей и характеристические классы в кобордизмах, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:14:05

Циклы особенностей и характеристические классы в кобордизмах

А. А. Кустарев

В классической работе Л. С. Понтрягина [1] были даны два определения целочисленных характеристических классов ориентированного многообразия M^m . В одном из них рассматривались циклы точек, в которых $n \leq m$ общих сечений касательно-го расслоения TM имеют ранг k , $k < n$. Во втором рассматривалось произвольное общее отображение $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и характеристический цикл определялся как цикл особенностей $[\Sigma_f^r]$, $r > m - n$, — множество точек, в которых $\dim \ker df \geq r$.

С другой стороны, когомологические классы Штифеля–Уитни и Черна векторных расслоений полностью характеризуются четырьмя аксиомами (см. [2]). Как известно, существуют классы Черна в комплексных кобордизмах $c_r^U(\xi)$, удовлетворяющие этим же аксиомам [3], хотя известные конструкции их не используют методы теории особенностей.

Настоящая работа посвящена построению характеристических классов комплексных расслоений в кобордизмах при помощи циклов особенностей и исследованию их связи с классами Черна. Строятся новые геометрические реализации когомологических классов Черна $c_r(\xi)$ (теорема 1) и новые классы $P_r(\xi)$ и $Q_r(\xi)$ комплексного расслоения ξ в кобордизмах. Устанавливается, что классы $P_r(\xi)$ и $Q_r(\xi)$ удовлетворяют аксиомам размерности, функториальности и нормировки, не удовлетворяют классической формуле суммы Уитни и поэтому не совпадают с $c_r^U(\xi)$ (теорема 2 и следствия).

Пусть $f: M^{2m} \rightarrow N^{2m-2r+2}$ — общее отображение из комплексного многообразия M в параллелизуемое комплексное многообразие N , дифференциал df которого комплексно-линеен, $p: \text{Gr}_r(TM) \rightarrow M$ — каноническая проекция из r -й грассманизации TM на M и γ — каноническое расслоение над $\text{Gr}_r(TM)$. Тогда, согласно формуле Джамбелли–Тома–Портеуса [4], верна формула $[\Sigma^r] = p_!^H e(\text{Hom}(\gamma, \mathbb{C}^{m-r+1})) = c_r(\overline{TM})$, где $p_!^H: H^*(\text{Gr}_r(TM)) \rightarrow H^*(M)$ — гомоморфизм Гизина.

У этой формулы есть геометрическая интерпретация. Если мы рассмотрим цикл $c_r(\overline{TM})$ как множество точек $X_r(\overline{TM})$, где общие $m - r + 1$ сечений расслоения $\overline{TM}$ линейно зависимы, то $X_r(\overline{TM})$ является особым подмногообразием в M , особенности которого имеют вещественную коразмерность не менее двух.

Множество нулей сечения расслоения $\text{Hom}(\gamma, \mathbb{C}^{m-r+1})$ над $\text{Gr}_r(TM)$, задаваемое дифференциалом df , является неособым многообразием, разрешающим $X_r(\overline{TM})$. Если $X_r(\overline{TM})$ само неособо, то разрешение является взаимнооднозначным.

Теперь заметим, что доказательство того, что для произвольного векторного расслоения ξ над M верно $c_r(\xi) = p_!^H e(\text{Hom}(\gamma, \mathbb{C}^{m-r+1}))$, где $m = \dim \xi$, γ — каноническое расслоение над $\text{Gr}_r(\xi)$ и $p_!^H: H^*(\text{Gr}_r(\xi)) \rightarrow H^*(M)$ — гомоморфизм Гизина, полностью аналогично случаю, когда $\xi = \overline{TM}$.

Таким образом, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного расслоения ξ над M класс $c_r(\xi) \in H^{2r}(M)$ может быть определен как $p_!^H e(\text{Hom}(\gamma, \mathbb{C}^{\dim \xi - r + 1}))$, где $\gamma \rightarrow \text{Gr}_r(\xi)$ — каноническое расслоение, p — каноническая проекция.*

Мы получаем геометрическую реализацию классов Черна комплексных векторных расслоений.

Известно другое геометрическое определение когомологических классов $c_r(\xi)$ [5]: если $\tau: H^*(\text{Gr}_r(\xi)) \rightarrow H^*(M)$ — гомоморфизм трансфера [6], то $c_r(\xi) = \tau(e(\gamma))$.

Эти определения, как можно увидеть, обобщаются на комплексные кобордизмы $U^*(M)$, поскольку могут быть переформулированы с использованием только понятий класса Эйлера и гомоморфизма Гизина. В [5] доказано, что определению характеристических классов при помощи трансфера соответствуют классы $c_r^U(\xi)$ расслоения ξ в комплексных кобордизмах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть ξ – комплексное векторное расслоение размерности m . Определим класс $P_r(\xi) \in U^{2r}$ по формуле $P_r(\xi) = p_1^U e(\text{Hom}(\gamma, \mathbb{C}^{m-r+1}))$, где $p_1^U: U^*(\text{Gr}_r(\xi)) \rightarrow U^*(M)$ – гомоморфизм Гизина.

Приведем конструкцию классов $Q_r(\xi)$ (М.Э. Казарян), схожих с классами $P_r(\xi)$.

Рассмотрим проективизацию P тривиального комплексного $(m-r+1)$ -мерного векторного расслоения над M , и пусть $p: P \rightarrow M$ – каноническая проекция. Тогда над P возникает расслоение $\text{Hom}(\gamma, p^*\xi)$ (γ – каноническое линейное расслоение над P), и общие $m-r+1$ сечений ξ над M задают сечение $\text{Hom}(\gamma, p^*\xi)$.

Из построения ясно, что точки, где это сечение обращается в нуль, лежат над точками цикла $X_r(\xi)$, причем если степень вырождения $m-r+1$ сечения равна $k > 0$, то в соответствующую точку проектируется пространство $\mathbb{C}P^{k-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Характеристический класс $Q_r(\xi) \in U^{2r}(M)$ определяется по формуле $Q_r(\xi) = p_1^U e(\text{Hom}(\gamma, p^*\xi))$, где $p_1^U: U^*(P) \rightarrow U^*(M)$ – гомоморфизм Гизина.

ТЕОРЕМА 2. 1. Классы $P_r(\xi)$ и $Q_r(\xi)$ функториальны и удовлетворяют аксиомам размерности и нормировки.

2. Если цикл $X_r(\xi)$ является неособым, то $P_r(\xi) = Q_r(\xi) = [X_r(\xi)]$.

3. Для классов $P_r(\xi)$ и $Q_r(\xi)$ не выполняется формула суммы Уитни.

Первые два утверждения теоремы следуют прямо из определения. Для доказательства третьего достаточно привести пример, когда формула суммы не имеет места. Пусть $M = \mathbb{C}P^2$, $\xi = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$. Тогда $P_1(\mathcal{O}(1)) + P_1(\mathcal{O}(1)) = 2t$, где $t = c_1^U(\mathcal{O}(1))$. С другой стороны, класс $P_1(\xi)$ совпадает с классом кобордизмов неособой кривой степени 2 в $\mathbb{C}P^2$, равным $2t - [\mathbb{C}P^1]t^2$. Для класса $Q_1(\xi)$ доказательство аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $X_r(\xi)$ является неособым подмногообразием в M , то его класс кобордизмов не обязан совпадать с $c_r^U(\xi)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Классы $P_r(\xi)$ и $Q_r(\xi)$ не обязаны совпадать с $c_r^U(\xi)$.

Возникает задача – найти аналог формулы суммы Уитни для $P_r(\xi)$ и $Q_r(\xi)$, который вместе с тремя остальными аксиомами уже позволял бы установить их единственность в своем классе. Для классов $Q_r(\xi)$ формула может быть найдена явно.

Автор благодарен В.М. Бухштаберу за постановку задачи и внимание к работе, а также М.Э. Казаряну за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] Л.С. Понtryгин, *Матем. сб.*, **24(66):2** (1949), 129–162. [2] Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979. [3] П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969. [4] I.R. Porteous, “Simple singularities of maps”, *Proceedings of Liverpool singularity symposium*, I (Liverpool, 1969–1970), *Lecture Notes in Math.*, **192**, ed. C.T.C. Wall, Springer, New York, 1971, 286–307. [5] В.М. Бухштабер, “Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп”, *Современные проблемы математики*, **10**, ВИНТИ, М., 1978, 5–178. [6] J.C. Becker, D.H. Gottlieb, *Topology*, **14:1** (1975), 1–12. [7] В.М. Бухштабер, *Матем. сб.*, **83:4** (1970), 576–595.

А. А. Кустарев (А. А. Kustarev)
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: kustarev@gmail.com

Представлено В.М. Бухштабером
Принято редколлегией
03.08.2007