Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, Гипергеометрические функции над произвольным полем, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 29–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:41:01

УДК 517.58

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ

И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах

Статья посвящена определению и исследованию гипергеометрических функций над произвольным непрерывным локально компактным полем и конечным полем. В основу положено определение обобщенной гипергеометрической функции над полем $\mathbb{R}$, введенной ранее авторами.

Библиография: 13 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	30
Глава I. Гипергеометрические функции над локально компактным полем	33
§ 1. Предварительные определения	33
§ 2. Обобщенные гипергеометрические функции над произвольным локально компактным полем K	40
§ 3. Гипергеометрические функции, ассоциированные с N -векторами ...	47
§ 4. Структура гипергеометрических функций при произвольных n и N ..	53
§ 5. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианами	60
§ 6. Гипергеометрические функции гауссова типа	66
Глава II. Гипергеометрические функции над конечным полем	75
§ 7. Исходные определения и формулы	75
§ 8. Общие гипергеометрические функции	77
§ 9. Общие гипергеометрические функции для случая $n = 1$	81
§ 10. Общие гипергеометрические функции для случая $N = n + 1$	83
§ 11. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианами над конечными полями	85
§ 12. Гипергеометрическая функция гауссова типа	90
Дополнение. Гипергеометрические функции над полем рациональных чисел	96
Список литературы	100

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-04-00363).

Введение

В [3] были введены общие гипергеометрические системы дифференциальных уравнений, связанные с грассманианами. В большом цикле работ (см. библиографию в [8], [4], [6]) исследованы решения этих систем и их обобщений – гипергеометрических $\mathcal{A}$ -систем и GG -систем в классе аналитических функций. В [6] изучены решения GG -систем в классе обобщенных функций, т.е. линейных функционалов на некотором пространстве основных функций.

В этой статье строится теория гипергеометрических функций над любыми непрерывными локально компактными и конечными полями K . За основу взято определение обобщенных GG -функций над полем $K = \mathbb{R}$ из [6]. Формально обобщенные гипергеометрические функции задаются интегралами, вообще говоря, расходящимися. Гипергеометрические функции определяются как различные регуляризации этих интегралов. Тем самым, с каждой обобщенной гипергеометрической функцией связан набор гипергеометрических функций.

1. Сначала приведем определения $\mathcal{A}$ -систем из [9] и [11] и GG -систем из [4]. Каждая $\mathcal{A}$ -система задается парой натуральных чисел n и $N \geq n$, целочисленной невырожденной матрицей $\omega = \|\omega_{ij}\|$ размера $n \times N$ и вектором $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Она определена в пространстве функций $f(x)$ на $\mathbb{C}^N$ и состоит из следующих дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + z_i f = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{l'_j} f = \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{l''_j} f \quad (2)$$

для любых $l'_j \geq 0$ и $l''_j \geq 0$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} l'_j = \sum_{j=1}^N \omega_{ij} l''_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Решения такой системы в классе аналитических функций называются $\mathcal{A}$ -гипергеометрическими функциями, ассоциированными с матрицей ω и вектором z .

Почти все известные классические гипергеометрические функции одного и многих переменных являются решениями $\mathcal{A}$ -гипергеометрических систем, отвечающих подходящим матрицам ω . Например, гипергеометрическая функция Гаусса является решением гипергеометрической $\mathcal{A}$ -системы, ассоциированной с (3×4) -матрицей $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Переход от $\mathcal{A}$ -систем к GG -системам состоит в том, что параметры $z_1, \dots, z_n$ в определении $\mathcal{A}$ -системы рассматриваются как равноправные с x переменные, а система дифференциальных уравнений (2) заменяется системой дифференциально-разностных уравнений:

$$\frac{\partial f(z, x)}{\partial x_j} = f(z + \omega_j, x), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где векторы ω_j — столбцы матрицы ω . Исходная система уравнений (2) является простым следствием (3). Отметим, что с учетом (3) система (1) эквивалентна следующей разностной системе:

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j f(z + \omega_j, x) + z_i f(z, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Система (3)–(4) называется GG -системой, а ее решения в классе аналитических функций от z и x — GG -функциями.

В определении GG -системы элементы матрицы ω могут принимать не только целые, но и любые комплексные значения. Такая система уже не сводится к гипергеометрической $\mathcal{A}$ -системе, однако структура ее решений по существу не меняется. В [1] эти решения названы квазигипергеометрическими функциями.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобный переход от дифференциальных уравнений к уравнениям дифференциально-разностным возможен уже в случае классической гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b, c, x)$. Известно, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{dF(a, b, c, x)}{dx} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, x), \quad (5)$$

а ее сдвиги $F(a \pm 1, b \pm 1, c \pm 1, x)$ по параметрам связаны линейными относительно a, b, c соотношениями (соотношения Гаусса). Уравнение (5) и соотношения Гаусса можно принять в качестве определения функции Гаусса F . Исходное дифференциальное уравнение для F является следствием из этих соотношений.

3. В [6] построены решения GG -систем в пространстве обобщенных функций. В постановке задачи переменные z и x меняются ролями: решения строятся в пространстве обобщенных функций от z , а x играет роль параметра. В качестве пространства основных функций взято пространство $\tilde{\mathcal{D}}$ преобразований Фурье финитных C^∞ -функций на $\mathbb{R}^n$, структура которого описывается классической теоремой Пэли–Винера.

Оказалось, что для каждой матрицы ω это решение единственно с точностью до множителя. Оно является преобразованием Фурье по $s \in \mathbb{R}^n$ следующей функции $F(s, x)$, рассматриваемой как обобщенная функция:

$$F(s, x) = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j e^{\sum_{i=1}^n s_i \omega_{ij}}\right).$$

(Вектор $x \in \mathbb{C}^N$ играет здесь роль параметра.) Таким образом, формально это решение задается интегралом

$$\Phi(z, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j e^{\sum_{i=1}^n s_i \omega_{ij}}\right) \prod_{i=1}^n e^{z_i s_i} ds_i, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

или, по-другому (замена переменных s_i на $t_i = e^{s_i}$), интегралом

$$\Phi(z, x) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}}\right) \prod_{i=1}^n t_i^{z_i-1} dt_i, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (6)$$

Это представление обобщенной GG -функции можно принять в качестве ее определения.

4. Сформулируем определение обобщенной гипергеометрической функции, принятое в этой статье. Рассматриваются любое локально компактное поле K и любое его конечное расширение $\tilde{K}$. Пусть $K^* = K \setminus \{0\}$ – мультипликативная группа поля K , Π – группа мультипликативных характеров на K , т.е. гомоморфизмов $K^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Для каждого натурального числа n вводится пространство $\mathcal{D}$ основных функций на $(K^*)^n$. В случае $K = \mathbb{R}$ и $K = \mathbb{C}$ оно определяется как пространство финитных C^∞ -функций на $(K^*)^n$, а в случае неархимедова поля K – как пространство финитных кусочно-постоянных функций. Через $\tilde{\mathcal{D}}$ обозначается пространство преобразований Меллина $\mathcal{M}$ функций $f \in \mathcal{D}$, т.е. функций на Π^n вида

$$\varphi(\pi) = \int_{(K^*)^n} f(t) \pi(t) d^*t, \quad f \in \mathcal{D}, \quad \pi \in \Pi^n,$$

где d^*t – инвариантная мера на $(K^*)^n$.

С каждой целочисленной матрицей ω размера $n \times N$ мы связываем следующую функцию от $t \in (K^*)^n$, зависящую от параметра $x \in \tilde{K}^N$:

$$F(t, x) = \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \cdots t_n^{\omega_{nj}} \right), \quad (7)$$

где $\chi \neq 1$ – фиксированный аддитивный характер на $\tilde{K}$. Ее можно интерпретировать как обобщенную функцию на пространстве $\mathcal{D}$, зависящую от параметра $x \in \mathbb{C}^N$.

Определим $\Phi(z, x)$ как преобразование Меллина по $t \in \mathbb{R}^n$ этой обобщенной функции, т.е. как линейный функционал на $\tilde{\mathcal{D}}$, заданный равенством

$$\langle \Phi, \mathcal{M}f \rangle = \int_{(K^*)^n} F(t, x) f(t^{-1}) d^*t \quad \text{для любой функции } f \in \mathcal{D}.$$

Мы называем Φ обобщенной гипергеометрической функцией, ассоциированной с матрицей ω .

ЗАМЕЧАНИЕ. Это определение можно обобщить, заменив группу K^* любой ее подгруппой $P \subset K^*$, а Π – группой характеров подгруппы P . В частности, обобщенные гипергеометрические функции, введенные в [6], соответствуют случаю $K = \mathbb{R}$, $\tilde{K} = \mathbb{C}$ и $P = K_+^*$ (подгруппа положительных чисел).

Формально Φ есть комплекснозначная функция от $(\pi_1, \dots, \pi_n) \in \Pi^n$ и $(x_1, \dots, x_N) \in \tilde{K}^N$, заданная следующим расходящимся интегралом:

$$\Phi(\pi, x) = \int_{(K^*)^n} \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \cdots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{i=1}^n \pi_i(t_i) dt_i. \quad (8)$$

Мы называем гипергеометрическими функциями над локально компактным полем K , ассоциированными с матрицей ω , различные регуляризации этого расходящегося интеграла. Их явное описание и исследование для различных полей K и

различных матриц ω приведено в первой главе. Для простоты мы ограничились случаем $\tilde{K} = K$.

Определение обобщенных гипергеометрических функций естественно переносится и на конечные поля K . Их описанию и исследованию посвящена вторая глава. Краткое изложение результатов главы II дано в [5]. В добавлении обсуждается понятие обобщенной гипергеометрической функции для бесконечных дискретных полей.

Глава I. Гипергеометрические функции над локально компактным полем

§ 1. Предварительные определения

1.1. Основные обозначения. K – произвольное локально компактное поле.

dx – инвариантная относительно сложения мера на K ; нормировка dx будет определена позднее.

$K^* = K \setminus 0$ – мультипликативная группа.

$d^*x = |x|^{-1} dx$ – инвариантная мера на K^* .

Норма $|\lambda|$ – вещественнозначная функция на K , определенная равенством:

$$|\lambda| = \frac{d(\lambda x)}{dx}, \quad \lambda \in K.$$

При $K = \mathbb{R}$ норма $|\lambda|$ равна модулю вещественного числа λ ; при $K = \mathbb{C}$ — квадрату модуля комплексного числа λ . В случае неархимедова поля K норма принимает дискретное множество значений: q^n , $n \in \mathbb{Z}$. Здесь q – число элементов фактор-группы O/O_1 , где O и O_1 – соответственно аддитивные подгруппы элементов $x \in K$ с нормой $|x| \leq 1$ и нормой $|x| < 1$.

Π – группа мультипликативных характеров $\pi(x)$ на K .

$\Pi_0 \subset \Pi$ – подгруппа унитарных характеров.

Характеры $\pi(x)$, $x \in K$, будут также обозначаться через (π, x) , а операция на группе характеров записываться в аддитивной форме:

$$(\pi_1 + \pi_2, x) = (\pi_1, x)(\pi_2, x).$$

Характеры $\pi_a(x) = |x|^a$, $a \in \mathbb{C}$, будут обозначаться через (a, x) , и вместо $\pi(x)|x|^a$ мы будем писать $(\pi + a, x)$.

$\mathcal{O}^*$ – мультипликативная группа элементов с нормой 1 неархимедова поля K .

Θ – группа характеров группы $\mathcal{O}^*$.

Отметим, что группа $\mathcal{O}^*$ компактна, а группа Θ дискретна.

1.2. Мультипликативные характеры.

1.2.1. Случай $K = \mathbb{R}$. Характеры $\pi \in \Pi$ имеют вид $\pi(x) = |x|^{i\rho} \text{sign}^\varepsilon(x)$, где $\rho \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Они унитарны, если $\rho \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\Pi \cong \mathbb{C} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\Pi_0 \cong \mathbb{R} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1.2.2. Случай $K = \mathbb{C}$. Характеры $\pi \in \Pi$ имеют вид $\pi(x) = x^{(i\rho+n)/2} \bar{x}^{(i\rho-n)/2}$, где $\rho \in \mathbb{C}$, а $n \in \mathbb{Z}$. Они унитарны, если $\rho \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\Pi \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{Z}$, $\Pi_0 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$.

1.2.3. *Случай неархимедова поля K .* Каждый элемент $x \in K^*$ однозначно представим в виде

$$x = \wp^n y,$$

где $\wp$ — фиксированный элемент с нормой q^{-1} , $n \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathcal{O}^*$. Таким образом, $K^* \cong \mathbb{Z} \oplus \mathcal{O}^*$.

Соответственно, характеры $\pi \in \Pi$ имеют вид

$$\pi(\wp^k y) = \lambda^k \theta(y), \quad |y| = 1,$$

где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а $\theta \in \Theta$. Они унитарны, если $|\lambda| = 1$. Таким образом, $\Pi \cong \mathbb{C} \oplus \Theta$ и $\Pi_0 \cong S^1 \oplus \Theta$.

1.3. Преобразование Фурье. Фиксируем на K неединичный аддитивный унитарный характер χ . При $K = \mathbb{R}$ полагаем $\chi(x) = e^{ix}$; при $K = \mathbb{C}$ — $\chi(x) = e^{i(x+\bar{x})}$; в случае неархимедова поля K фиксируется характер χ такой, что $\chi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\chi(x)$ не равен тождественно 1 при $|x| = q$.

Преобразование Фурье финитных функций f на K определяется равенством

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_K f(x) \chi(\xi x) dx.$$

Справедлива формула обращения:

$$f(x) = c \int_K \mathcal{F}f(\xi) \chi(-\xi x) d\xi,$$

где коэффициент c зависит от нормировки меры dx . В дальнейшем эта нормировка выбирается так, что $c = 1$. В случае неархимедова поля K нормировка определяется условием

$$\int_{|x| \leq 1} dx = 1.$$

Определение преобразования Фурье стандартным образом переносится с пространства финитных функций на обобщенные функции.

1.4. Гамма-функция. Известно [7], что преобразование Фурье мультипликативного характера $(\pi - 1, x)$, рассматриваемого как обобщенная однородная функция на K , отличается только постоянным множителем $\Gamma(\pi)$ от характера $(-\pi, x)$:

$$\int_K (\pi - 1, x) \chi(\xi x) dx = \Gamma(\pi) (-\pi, \xi).$$

Множитель $\Gamma(\pi)$ называется гамма-функцией на группе характеров Π . Подставив $\xi = 1$, получаем

$$\Gamma(\pi) = \int_K (\pi - 1, x) \chi(x) dx = \int_{K^*} \chi(x) (\pi, x) d^* x. \quad (1.1)$$

Функция $\Gamma(\pi)$ удовлетворяет функциональному соотношению

$$\Gamma(\pi)\Gamma(1-\pi) = \pi(-1).$$

Кроме того,

$$\overline{\Gamma(\pi+a)} = \Gamma(-\pi+a) \quad \text{при } \pi \in \Pi_0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

При $K = \mathbb{R}$ характеры π имеют вид $\pi(x) = |x|^\lambda \text{sign}^\varepsilon(x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и мы пишем $\Gamma(\lambda, \varepsilon)$ вместо $\Gamma(\pi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [7]. *Гамма-функция $\Gamma(\lambda, \varepsilon)$, связанная с полем $\mathbb{R}$, удовлетворяет функциональному соотношению*

$$\Gamma(\lambda+1, \varepsilon+1) = i\lambda\Gamma(\lambda, \varepsilon) \quad (1.2)$$

и выражается через гамма-функцию Эйлера $\Gamma(\lambda)$ по формулам

$$\Gamma(\lambda, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \Gamma(\lambda), \quad (1.3)$$

$$\Gamma(\lambda, 1) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \Gamma(\lambda). \quad (1.4)$$

В самом деле, формула (1.2) получается из равенства

$$\Gamma(\lambda+1, \varepsilon+1) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} |x|^\lambda \text{sign}^{\varepsilon+1}(x) dx$$

интегрированием по частям (поскольку $\frac{d}{dx}(|x|^\lambda \text{sign}^{\varepsilon+1}(x)) = |x|^{\lambda-1} \text{sign}^\varepsilon(x)$). Имеем далее:

$$\Gamma(\lambda, 1) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} 2i \int_0^\infty x^{\lambda-1} \sin x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \Gamma(\lambda).$$

Формула (1.3) следует из (1.2) и (1.4).

При $K = \mathbb{C}$ характеры π имеют вид $\pi(x) = x^\lambda \bar{x}^\mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$, и мы пишем $\Gamma(\lambda, \mu)$ вместо $\Gamma(\pi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Гамма-функция $\Gamma(\lambda, \mu)$, связанная с полем $\mathbb{C}$, удовлетворяет функциональным соотношениям*

$$\Gamma(\lambda, \mu) = \Gamma(\mu, \lambda), \quad (1.5)$$

$$\Gamma(\lambda+1, \mu) = i\lambda\Gamma(\lambda, \mu), \quad \Gamma(\lambda, \mu+1) = i\mu\Gamma(\lambda, \mu) \quad (1.6)$$

и выражается через гамма-функцию Эйлера по формуле

$$\Gamma(\lambda, \mu) = i^{\lambda-\mu} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1-\mu)}. \quad (1.7)$$

В самом деле, положив $\lambda + \mu = \nu$, $\lambda - \mu = n$ и перейдя к полярным координатам, получаем:

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda, \mu) &= \pi^{-1} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi r^{\nu-1} e^{i(n\varphi + 2r \cos \varphi)} dr d\varphi \\ &= \pi^{-1} i^n \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi r^{\nu-1} e^{i(-n\varphi + 2r \sin \varphi)} dr d\varphi \\ &= 2i^n \int_0^\infty r^{\nu-1} J_n(2r) dr = i^n \frac{\Gamma(\frac{n+\nu}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n-\nu}{2})} = i^{\lambda-\mu} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1-\mu)},\end{aligned}$$

где J_n — функция Бесселя (см. формулы (8.411.1) и (6.561.14) в [12]).

Формулы (1.5) и (1.6) следуют из (1.7).

1.5. Гамма-функция, связанная с неархимедовым полем. В случае неархимедова поля характеры $\pi \in \Pi$ задаются формулой $\pi(\wp^k y) = \lambda^k \theta(y)$, где $y \in \mathcal{O}^*$, а Θ — группа характеров группы $\mathcal{O}^*$, и мы будем писать $\varphi(\lambda, \theta)$ вместо $\varphi(\pi)$.

Назовем рангом характера $\theta \in \Theta$ и обозначим через $\text{rank } \theta$ наименьшее из чисел $n = 0, 1, 2, \dots$, для которых $\theta(1 + \wp^n t) \equiv 1$ при $|t| \leq 1$. В частности, характер ранга 0 есть единичный характер.

Введем функции $\gamma_k(\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \Theta$, где Θ — группа характеров группы $\mathcal{O}^*$:

$$\gamma_k(\theta) = \int_{|t|=1} \chi(\wp^k t) \theta(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Имеем [7]:

- 1) если $\text{rank } \theta = n > 0$, то $\gamma_k(\theta) = 0$ при $k \neq -n$ и $|\gamma_{-n}(\theta)| = q^{-n/2}$;
- 2) если $\theta \equiv 1$, то

$$\gamma_k(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } k < -1, \\ -q^{-1} & \text{при } k = -1, \\ 1 - q^{-1} & \text{при } k > -1. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Гамма-функция $\Gamma(\lambda, \theta)$ для неархимедова поля выражается через функции $\gamma_k(\theta)$ по формуле

$$\Gamma(\lambda, \theta) = \begin{cases} \lambda^{-n} \gamma_{-n}(\theta), & \text{если } \text{rank } \theta = n > 0, \\ \frac{1 - (q\lambda)^{-1}}{1 - \lambda}, & \text{если } \theta \equiv 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

В самом деле, (1.9) следует из представления функции $\Gamma(\lambda, \theta)$ в виде лорановского ряда:

$$\Gamma(\lambda, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \gamma_k(\theta). \quad (1.10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Любой лорановский ряд вида*

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^n \gamma_n(\theta_n), \quad \theta_n \in \Theta,$$

сходится в интервале $q^{-1/2} < \lambda < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|\gamma_n(\theta_n)| < 1$ при $n > 0$, то ряд $\sum_{n>0} \lambda^n \gamma_n(\theta_n)$ абсолютно сходится при $\lambda < 1$. Так как $|\gamma_n(\theta_n)|$ равно 0 или $q^{n/2}$ при $n < -1$, то ряд $\sum_{n<-1} \lambda^n \gamma_n(\theta_n)$ абсолютно сходится при $\lambda > q^{-1/2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Аддитивный характер χ следующим образом выражается через функцию $\gamma_k(\theta)$:*

$$\chi(\wp^{-n}y) = (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{\theta \in \Theta^n} \gamma_{-n}(\theta) \theta^{-1}(y) \quad \text{для любых } n \in \mathbb{Z}, \quad y \in \Theta^*, \quad (1.11)$$

где $\Theta^n = \{\theta \in \Theta \mid \text{rank } \theta = 0, n\}$. Таким образом, $\chi(\wp^{-n}y) = 1$ при $n \leq 0$ и

$$\chi(\wp^{-n}y) = (1 - q^{-1})^{-1} \left(\gamma_{-n} + \sum_{\text{rank } \theta = n} \gamma_{-n}(\theta) \theta^{-1}(y) \right) \quad \text{при } n > 0, \quad (1.12)$$

где $\gamma_{-1} = -q^{-1}$ и $\gamma_{-n} = 1 - q^{-1}$ при $n > 1$.

В самом деле, из (1.8) следует равенство (1.11), в котором суммирование ведется по всем $\theta \in \Theta$. То, что эта сумма сводится к сумме только по $\theta \in \Theta^n$, следует из явных выражений для $\gamma_{-n}(y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сумма (1.11) конечна, поскольку множества Θ^n конечны при любых n .

1.6. Бета-функция. Бета-функция на группе Π определяется равенством

$$B(\pi_1, \pi_2) = \int_K (\pi_1 - 1, x)(\pi_2 - 1, 1 - x) dx.$$

Интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения, см. [10].

Из определения следует:

$$\begin{aligned} B(\pi_1, \pi_2) &= B(\pi_2, \pi_1) = (\pi_1, -1)B(\pi_2, 1 - \pi_1 - \pi_2); \\ \overline{B(\pi_1 + a_1, \pi_2 + a_2)} &= B(-\pi_1 + a_1, -\pi_2 + a_2) \quad (\pi_1, \pi_2 \in \Pi_0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Функции $B(\pi_1, \pi_2)$ и $\Gamma(\pi)$ связаны соотношением

$$B(\pi_1, \pi_2) = \frac{\Gamma(\pi_1)\Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_1 + \pi_2)}.$$

В частности, при $K = \mathbb{C}$ функция $B(\pi_1, \pi_2) = B(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2)$ следующим образом выражается через классическую бета-функцию:

$$B(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2) = \frac{\sin(\pi\mu_1)\sin(\pi\mu_2)}{\pi \sin(\pi(\mu_1 + \mu_2))} B(\lambda_1, \lambda_2) B(\mu_1, \mu_2).$$

Обобщение на случай n характеров π . Определение:

$$\begin{aligned} B(\pi_1, \dots, \pi_n) &= \int_{K^{n-1}} (\pi_1 - 1, x_1) \cdots (\pi_{n-1} - 1, x_{n-1}) \\ &\quad \times (\pi_n - 1, 1 - x_1 - \dots - x_{n-1}) dx_1 \cdots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Выражение через функцию $\Gamma(\pi)$:

$$B(\pi_1, \dots, \pi_n) = \frac{\Gamma(\pi_1) \cdots \Gamma(\pi_n)}{\Gamma(\pi_1 + \dots + \pi_n)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В теории конечных полей аналоги гамма-функции $\Gamma(\pi)$ и бета-функции $B(\pi_1, \pi_2)$ называют соответственно суммами Гаусса и суммами Якоби.

1.7. Преобразование Меллина основных и обобщенных функций на $(K^*)^n$. Примем в качестве основного пространства на $K^* = K \setminus 0$ пространство $\mathcal{D}$ всех C^∞ -функций с компактными носителями; в случае неархимедова поля K под C^∞ -функциями следует понимать кусочно постоянные функции.

Назовем преобразованием Меллина функции $f \in \mathcal{D}$ функцию $\mathcal{M}f$ на группе Π , определенную равенством

$$\mathcal{M}f(\pi) = \int_{K^*} f(t) \pi(t) d^*t. \quad (1.13)$$

Имеет место формула обращения

$$f(t) = \int_{\Pi_0} \mathcal{M}f(\pi) \pi^{-1}(t) d\pi, \quad (1.14)$$

где $d\pi$ – подходяще нормированная инвариантная мера на Π_0 , и формула Планшереля

$$\int_{K^*} \overline{f_1(t)} f_2(t) d^*t = \int_{\Pi_0} \overline{\mathcal{M}f_1(\pi)} \mathcal{M}f_2(\pi) d\pi, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{D}. \quad (1.15)$$

Заметим, что равенство (1.15) эквивалентно равенству

$$\int_{\Pi_0} \mathcal{M}f_1(\pi) \mathcal{M}f_2(\pi) d\pi = \int_{K^*} f_1(t) f_2(t^{-1}) d^*t. \quad (1.16)$$

Примем в качестве основного пространства на Π пространство $\tilde{\mathcal{D}}$ преобразований Меллина $\mathcal{M}f$ функций $f \in \mathcal{D}$. Обозначим через $\mathcal{D}'$ и $\tilde{\mathcal{D}}'$ пространства, двойственные к $\mathcal{D}$ и $\tilde{\mathcal{D}}$ соответственно (пространства обобщенных функций).

Определим, в соответствии с (1.16), преобразование Меллина $\mathcal{M}F$ обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'$ равенством

$$\langle \mathcal{M}F, \mathcal{M}f \rangle = \langle F, f(t^{-1}) \rangle \quad \text{для любой функции } f \in \mathcal{D},$$

где угловые скобки обозначают спаривание функций из двойственных пространств.

Любая непрерывная функция F на K^* задает элемент пространства $\mathcal{D}'$:

$$\langle F, f \rangle = \int_{K^*} F(t) f(t) d^*t,$$

а потому определено ее преобразование Меллина $\mathcal{M}F \in \tilde{\mathcal{D}}'$:

$$\langle \mathcal{M}F, \mathcal{M}f \rangle = \int_{K^*} F(t) f(t^{-1}) d^*t.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Для любого мультипликативного характера $\pi \in \Pi$ имеем:

$$\langle \mathcal{M}\pi, \varphi \rangle = \varphi(-\pi) \quad \text{для любой функции } \varphi \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad (1.17)$$

т.е. $\mathcal{M}\pi$ есть дельта-функция на Π , сосредоточенная в точке $-\pi$.

В самом деле, положив $\varphi = \mathcal{M}f$, имеем:

$$\langle \mathcal{M}\pi, \varphi \rangle = \int_{K^*} \pi(t) f(t^{-1}) d^*t = \varphi(-\pi).$$

Заметим, что, согласно (1.1), преобразование Меллина аддитивного характера $\chi(t)$ есть гамма-функция $\Gamma(\pi)$, трактуемая как обобщенная функция:

$$\langle \Gamma, \mathcal{M}f \rangle = \int_{K^*} \chi(t) f(t^{-1}) d^*t \quad \text{для любой функции } f \in \mathcal{D}.$$

Определения пространств $\mathcal{D}$, $\tilde{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}'$ и $\tilde{\mathcal{D}}'$ естественно переносятся на случай многих переменных. Условимся через $\mathcal{D}_n$ обозначать пространство C^∞ -функций с компактным носителем на $(K^*)^n$, через $\tilde{\mathcal{D}}_n$ – пространство преобразований Меллина функций $f \in \mathcal{D}_n$ и через $\mathcal{D}'_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}'_n$ – пространства, двойственные $\mathcal{D}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n$ соответственно. Подобно случаю $n = 1$ определение преобразования Меллина переносится с пространства $\mathcal{D}_n$ основных функций на пространство $\mathcal{D}'_n$ обобщенных функций.

1.8. Структура пространств $\tilde{\mathcal{D}}_n$ основных функций.

1.8.1. Случай $K = \mathbb{R}$ и $K = \mathbb{C}$. Заметим, что преобразование Меллина финитной функции на $\mathbb{R}^*$ сводится к преобразованию Лапласа финитной функции на $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}^*} f(t) |t|^z \operatorname{sign}^\varepsilon(t) d^*t = \int_{\mathbb{R}} F(s) e^{zs} ds,$$

где $F(s) = f(e^s) + (-1)^\varepsilon f(-e^s)$. Отсюда и из теоремы Пэли–Винера о преобразовании Фурье C^∞ -функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$ вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. При $K = \mathbb{R}$ пространство $\tilde{\mathcal{D}}_n$ состоит из всех функций $\varphi(z, \varepsilon)$ на $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, целых аналитических относительно $z \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих оценкам

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i^{p_i} \varphi(z, \varepsilon) \right| \leq C_p e^{\alpha_1 |\operatorname{Re} z_1| + \dots + \alpha_n |\operatorname{Re} z_n|} \quad (1.18)$$

для любых $p_i \in \mathbb{N}$.

Аналогично имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. При $K = \mathbb{C}$ пространство $\tilde{\mathcal{D}}_n$ состоит из всех функций $\varphi(z, k)$ на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}^n$, целых аналитических относительно $z \in \mathbb{C}^n$ и удовлетворяющих оценкам

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i^{p_i} k_i^{q_i} \varphi(z, k) \right| \leq C_{p,q} e^{\alpha_1 |\operatorname{Re} z_1| + \dots + \alpha_n |\operatorname{Re} z_n|} \quad (1.19)$$

для любых $p_i, q_i \in \mathbb{N}$.

1.8.2. Случай неархимедова поля K . Обозначим через $f_{l_i, v_i, m_i}(x)$, где $l_i \in \mathbb{Z}$, $v_i \in \mathcal{O}^*$ и $m_i \in \mathbb{Z}_+$, характеристическую функцию множества точек $x \in K^*$ вида $x = \wp^{k_i} v_i (1 + \wp^{m_i} t)$, $|t| \leq 1$. Соответственно через $\varphi_{l_i, v_i, m_i}(\pi) = \varphi_{l_i, v_i, m_i}(\lambda, \theta)$ обозначим преобразование Меллина функции f_{l_i, v_i, m_i} . Очевидно, что

$$\varphi_{l_i, v_i, m_i}(\lambda, \theta) = \begin{cases} \wp^{-m_i} \theta(v_i), & \text{если } \operatorname{rank} \theta \leq m_i, \\ 0, & \text{если } \operatorname{rank} \theta > m_i. \end{cases} \quad (1.20)$$

Согласно определению, пространство $\mathcal{D}$ основных функций на K^* линейно порождено функциями $f_{l_i, v_i, m_i}(x)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пространство $\tilde{\mathcal{D}}_n$ основных функций на Π^n линейно порождено функциями вида

$$\varphi_{l, v, m}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \theta_1, \dots, \theta_n) = \prod_{i=1}^n \varphi_{l_i, v_i, m_i}(\lambda_i, \theta_i), \quad (1.21)$$

$l \in \mathbb{Z}^n$, $v \in (\mathcal{O}^*)^n$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, где $\varphi_{l_i, v_i, m_i}(\lambda_i, \theta_i)$ заданы формулами (1.20).

§ 2. Обобщенные гипергеометрические функции над произвольным локально компактным полем K

2.1. Определение. Фиксируем любые натуральные числа n и $N \geq n$ и целочисленную матрицу $\omega = \|\omega_{ij}\|$ размера $n \times N$. Поставим в соответствие матрице ω следующую функцию на $(K^*)^n$, зависящую от параметра $x \in K^N$:

$$F(t, x) = F(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_N) = \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \cdots t_n^{\omega_{nj}} \right),$$

где $\chi \neq 1$ — фиксированный аддитивный характер на K , определенный в § 1. Назовем обобщенной гипергеометрической функцией над полем K , ассоциированной с матрицей ω , преобразование Меллина по t функции F , т.е. обобщенную функцию $\Phi(\pi, x) = \Phi(\pi_1, \dots, \pi_n; x_1, \dots, x_N)$, заданную равенством

$$\langle \Phi, \mathcal{M}f \rangle = \int_{(K^*)^n} F(t, x) f(t^{-1}) \prod_{i=1}^n d^* t_i \quad \text{для любого } f \in \mathcal{D}_n, \quad (2.1)$$

где $t^{-1} = (t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1})$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Определение обобщенной гипергеометрической функции Φ можно обобщить, предположив, что χ – аддитивный характер на конечном расширении $\tilde{K}$ поля K и $x \in \tilde{K}^N$. При таком определении Φ является функцией от $\pi \in \Pi^n$ и $x \in \tilde{K}^N$.

В случае $K = \mathbb{R}$ и $\tilde{K} = \mathbb{C}$ существует простая связь между такими функциями и обобщенными гипергеометрическими функциями, введенными в [6]. Согласно [6], обобщенная гипергеометрическая функция, ассоциированная с матрицей ω , есть преобразование Фурье по $s \in \mathbb{R}^n$ функции

$$f(s, x) = \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j e^{\sum_{i=1}^n s_i \omega_{ij}} \right), \quad \text{где } x \in \mathbb{C}^N.$$

В предположении, что $F(t, x)$ в (2.1) задана как функция от t только на $\mathbb{R}_+^n$, ее преобразование Меллина по t равно преобразованию Фурье по s функции f .

2.2. Основные свойства функций $\Phi(\pi, x) = \Phi(\pi, \omega, x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Функция $\Phi(\pi, \omega, x)$ удовлетворяет условию однородности:

$$\Phi(\pi, \omega, s^{\omega_1} x_1, \dots, s^{\omega_N} x_N) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{-1}(s_i) \Phi(\pi, \omega, x_1, \dots, x_N) \quad (2.2)$$

для любого $s \in (K^*)^n$, где $s^{\omega_j} = s_1^{\omega_{1j}} \dots s_n^{\omega_{nj}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $K = \mathbb{R}$ если характеры π_i заданы равенствами $\pi_i(t) = |t|^\lambda \text{sign}^\varepsilon(t)$, то из (2.2) следует:

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \lambda_i \Phi = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

В случае $K = \mathbb{C}$ если характеры π_i заданы равенствами $\pi_i(t) = t^\lambda \bar{t}^\mu$, то из (2.2) следует соотношение (2.3) и соотношение

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} \bar{x}_j \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_j} + \mu_i \Phi = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для любой перестановки σ индексов $1, \dots, N$ имеем:

$$\Phi(\pi, \omega^\sigma x^\sigma) = \Phi(\pi, \omega, x), \quad (2.5)$$

где ω^σ и x^σ получаются из ω и x перестановкой σ соответственно столбцов ω_j матрицы ω и координат x_j .

Назовем соотношения (2.5) обобщенными соотношениями Куммера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для любой целочисленной квадратной матрицы $a = \|a_{ij}\|$ порядка n с определителем ± 1 имеем:

$$\Phi(a\pi, a\omega, x) = \Phi(\pi, \omega, x), \quad (2.6)$$

где $a\pi = (\prod_{i=1}^n \pi_i^{a_{1i}}, \dots, \prod_{i=1}^n \pi_i^{a_{ni}})$.

СЛЕДСТВИЕ. Композицией преобразований $(\omega, x) \mapsto (\omega^\sigma, x^\sigma)$ и $(\pi, \omega) \mapsto (a\pi, a\omega)$ любая обобщенная гипергеометрическая функция может быть переведена в функцию, ассоциированную с матрицей ω' , у которой $\omega'_{ij} = 0$ при $i > j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. При $K = \mathbb{R}$ функция Φ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений:

$$\frac{\partial \Phi(\pi_1, \dots, \pi_n, x, \omega)}{\partial x_j} = i \Phi(\pi_1 + \omega_{1j}, \dots, \pi_n + \omega_{nj}, x, \omega), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

где $(\pi_i + \omega_{ij}, t) = t^{\omega_{ij}} \pi_i(t)$.

СЛЕДСТВИЕ. При $K = \mathbb{R}$ функция Φ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\prod_{j=1}^N \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{l'_j} \Phi = \prod_{j=1}^N \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{l''_j} \Phi \quad (2.8)$$

для любых $l'_j \geq 0$ и $l''_j \geq 0$ таких, что $\sum_{j=1}^N \omega_{ij} l'_j = \sum_{j=1}^N \omega_{ij} l''_j$, $i = 1, \dots, n$.

При $K = \mathbb{C}$ к соотношениям (2.7) и (2.8) добавляются соотношения, полученные из них заменой x_j и $\frac{\partial}{\partial x_j}$ на $\bar{x}_j$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$.

2.3. Явное выражение для обобщенной гипергеометрической функции Φ .

2.3.1. Случай $K = \mathbb{R}$. Характеры π имеют вид

$$\pi(t) = |t|^\lambda \operatorname{sign}^\varepsilon(t), \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon = 0, 1,$$

и мы будем писать $(\lambda_i, \varepsilon_i, t_i)$ и $\varphi(\lambda, \varepsilon) = \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ вместо $\pi_i(t)$ и $\varphi(\pi)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. При $K = \mathbb{R}$ обобщенная гипергеометрическая функция Φ , ассоциированная с $(n \times N)$ -матрицей ω , имеет вид:

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \varphi(-\omega k, \omega k) \frac{(ix)^k}{k!}, \quad \varphi \in \tilde{\mathcal{D}}_n, \quad (2.9)$$

где обозначено: $\frac{(ix)^k}{k!} = \prod_{j=1}^N \frac{(ix_j)^{k_j}}{k_j!}$, ωk — n -вектор с координатами $(\omega k)_i = \omega_{i1}k_1 + \dots + \omega_{iN}k_N$; во втором аргументе функции φ числа $(\omega k)_i$ берутся по модулю 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $F(t, x) = \chi(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \cdots t_n^{\omega_{nj}})$, где $\chi(t) = e^{it}$, в виде суммы степенного ряда:

$$F(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \left(\prod_{s=1}^n ((\omega k)_s, t_s) \right) \frac{(ix)^k}{k!}.$$

Отсюда если

$$\varphi(\lambda, \varepsilon) = \mathcal{M}f(t) = \int_{(\mathbb{R}^*)^n} f(t) \prod_{s=1}^n (\lambda_s, \varepsilon_s, t_s) d^*t_s,$$

то

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \varphi \rangle &= \int_{(\mathbb{R}^*)^n} F(t, x) f(t^{-1}) \prod_{s=1}^n d^*t_s \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \left(\int_{\mathbb{R}^*} f(t) \prod_{i=1}^n (-\omega k)_i, t_i \right) d^*t_i \frac{(ix)^k}{k!} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \varphi(-\omega k, \omega k) \frac{(ix)^k}{k!}. \end{aligned}$$

2.3.2. Случай $K = \mathbb{C}$. Характеры π имеют вид

$$\pi(t) = t^\lambda \bar{t}^\mu, \quad \text{где } \lambda - \mu \in \mathbb{Z},$$

и мы пишем (λ_i, μ_i, t_i) и $\varphi(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ вместо $\pi_i(t)$ и $\varphi(\pi)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. При $K = \mathbb{C}$ обобщенная гипергеометрическая функция Φ , ассоциированная с $(n \times N)$ -матрицей ω , имеет вид:

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}_+^N} \varphi(-\omega k, -\omega l) \frac{(ix)^k}{k!} \frac{(i\bar{x})^l}{l!}, \quad \varphi \in \tilde{\mathcal{D}}_n; \quad (2.10)$$

обозначения те же, что и в предложении 2.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $F(t, x) = \chi(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \cdots t_n^{\omega_{nj}})$, где $\chi(t) = e^{it+i\bar{t}}$, в виде суммы степенного ряда:

$$F(t, x) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}_+^N} \left(\prod_{s=1}^n ((\omega k)_s, (\omega l)_s, t_s) \frac{(ix)^k}{k!} \frac{(i\bar{x})^l}{l!} \right).$$

Отсюда если

$$\varphi(\lambda, \mu) = \mathcal{M}f(\lambda, \mu) = \int_{(\mathbb{C}^*)^n} f(t) \prod_{s=1}^n (\lambda_s, \mu_s, t_s) d^*t_s,$$

то

$$\begin{aligned}\langle \Phi, \varphi \rangle &= \langle F, f(t^{-1}) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \left(\int_{\mathbb{C}^*} f(t) \prod_{s=1}^n (-(\omega k)_s, -(\omega l)_s, t_s) d^* t_s \right) \frac{(ix)^k}{k!} \frac{(i\bar{x})^l}{l!} \\ &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}_+^N} \varphi(-\omega k, -\omega l) \frac{(ix)^k}{k!} \frac{(i\bar{x})^l}{l!}.\end{aligned}$$

2.3.3. *Случай неархимедова поля K .* В этом случае характеры π имеют вид

$$\pi(\wp^{-k}y) = \lambda^k \theta(y), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad |y| = 1,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, θ – характер на подгруппе элементов с нормой 1, и мы будем писать $(\lambda_i, \theta_i, t_i)$ и $\varphi(\lambda, \theta) = \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ вместо $\pi_i(t)$ и $\varphi(\pi)$ соответственно. Кроме того, условимся использовать аддитивную форму записи для характеров θ , т.е. будем писать (θ, t) вместо $\theta(t)$ и $(\theta_1 + \theta_2, t)$ вместо $\theta_1(t)\theta_2(t)$.

Обозначим через $P(l, v, m)$, где $l \in \mathbb{Z}^n$, $v \in (\mathcal{O}^*)^n$ и $m \in \mathbb{N}^n$, подмножество точек $t \in (K^*)^n$ с координатами $t_i = \wp^{l_i} v_i (1 + \wp^{m_i} t'_i)$, где $|t'_i| \leq 1$.

Согласно п. 1.8, пространство $\tilde{\mathcal{D}}_n$ линейно порождено функциями $\varphi_{l,v,m} = \mathcal{M} f_{l,v,m}$, где $f_{l,v,m}$ – характеристическая функция области $P(l, v, m)$. Таким образом, для явного описания функционала Φ достаточно вычислить значение Φ на функциях $\varphi_{l,v,m}$.

Введем функцию $(\theta, t)^k$, $\theta \in \Theta$, $t \in \mathcal{O}^*$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$(\theta, t)^k = \begin{cases} (\theta, t), & \text{если } \text{rank } \theta \leq k, \\ 0, & \text{если } \text{rank } \theta > k. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *В случае неархимедова поля K для любого $x = (\wp^{r_1} y_1, \dots, \wp^{r_N} y_N)$, где $|y_i| = 1$, и любой основной функции $\varphi_{l,v,m}$ имеем:*

$$\langle \Phi, \varphi_{l,v,m} \rangle = (1 - q^{-1})^{-N} \sum_{\theta_j \in \Theta^{-n_j}} \left(\prod_{i=1}^n q^{-m_i} (-(\omega \theta)_i, v_i)^{m_i} \prod_{j=1}^N \gamma_{n_j}(\theta_j) \theta_j^{-1}(y_j) \right), \quad (2.11)$$

где $n_j = r_j + l_1 \omega_{1j} + \dots + l_n \omega_{nj}$, $(\omega \theta)_i = \omega_{i1} \theta_1 + \dots + \omega_{iN} \theta_N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сумма (2.11) конечна, так как конечны все множества Θ^{n_j} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $x_j = \wp^{r_j} y_j$, $|y_j| = 1$, и $t_i = \wp^{l_i} s_i$, $|s_i| = 1$. Используя равенство (1.11), представим $F(t, x)$ в виде суммы:

$$F(t, x) = (1 - q^{-1})^{-N} \sum_{\theta_j \in \Theta^{-n_j}} \left(\prod_{j=1}^N \gamma_{n_j}(\theta_j) \theta_j^{-1}(y_j) \prod_{i=1}^n (-(\omega \theta)_i, s_i) \right),$$

где $n_j = r_j + l_1 \omega_{1j} + \dots + l_n \omega_{nj}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\langle \Phi, \varphi_{l,v,m} \rangle &= \langle F(t^{-1}, x), f_{l,v,m} \rangle \\ &= (1 - q^{-1})^{-N} \sum_{\theta_j \in \Theta^{-n_j}} \left(\prod_{i=1}^n I_i(\theta, v_i, m_i) \prod_{j=1}^N \gamma_{n_j}(\theta_j) \theta_j^{-1}(y_j) \right),\end{aligned}$$

где

$$I_i(\theta, v_i, m_i) = \int_{|t_i| \leq 1} (-(\omega\theta)_i, v_i(1 + \wp^{m_i} t_i)) d(\wp^{m_i} t_i).$$

Остается заметить, что $I_i(\theta, v_i, m_i) = q^{-m_i} (-(\omega\theta)_i, v_i)^{m_i}$.

2.4. Регуляризация обобщенной функции Φ . Формально обобщенная функция Φ представима в форме расходящегося интеграла:

$$\Phi(\pi, x) = \int_{(K^*)^n} \chi\left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}}\right) \prod_{i=1}^n \pi_i(t_i) d^* t_i. \quad (2.12)$$

Интегралу (2.12) можно придать смысл, т.е. определить Φ как функцию. Это осуществляется различными способами, приводящими, вообще говоря, к различным функциям; мы назовем их регуляризациями интеграла (2.12). Все регуляризации интеграла (2.12) удовлетворяют тем же соотношениям, что и обобщенная функция Φ .

Опишем операцию регуляризации интеграла (2.12). Используется представление мультипликативных характеров любого локально компактного поля K в виде

$$\pi(t) = |t|^z \theta(t),$$

где $z \in \mathbb{C}$, а θ пробегает множество из двух (в случае $K = \mathbb{R}$) или счетного числа унитарных характеров. Таким образом,

$$\Phi(\pi, x) = \Phi(z, \theta, x),$$

где $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, а $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ пробегает дискретное не более чем счетное множество.

Если при фиксированном θ интеграл (2.12) сходится в некоторой области V переменных z и x , то его значение при любых z и x определяется как аналитическое продолжение по z и x функции на V . Определенная так функция зависит от выбора области V и, вообще говоря, является многозначной.

Если такой области V не существует, то (метод разбиения [10]) задается конечное разбиение пространства $(K^*)^n = \bigcup U_\alpha$ такое, что при фиксированном θ каждый из интегралов

$$\Phi_\alpha(\pi, x) = \int_{U_\alpha} \chi\left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}}\right) \prod_{i=1}^n \pi_i(t_i) d^* t_i \quad (2.13)$$

сходится в некоторой области V_α значений z и x и является аналитической функцией в этой области. Определим тогда Φ_α при любых z и x как аналитическое продолжение этой функции, а Φ — как сумму полученных так функций.

В частности, преобразование Меллина функции $f(t, x) = \chi(xt)$ есть функция $\Phi(\pi, x) = \Gamma(\pi) \pi^{-1}(x)$; явные формулы для $\Gamma(\pi)$ приведены в § 1.

В случае неархимедова поля K регуляризация интеграла (2.12) упрощается. Именно, пусть характеры π_i , $i = 1, \dots, n$, заданы равенствами

$$\pi_i(\wp^k y) = \lambda_i^k \theta_i(y), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad |y| = 1. \quad (2.14)$$

Разбивая K^* на области $\wp^k \mathcal{O}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, можно, подобно гамма-функции $\Gamma(\pi)$, представить Φ в виде суммы лорановского ряда:

$$\Phi(\lambda, \theta, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} \Phi_k(\theta, x), \quad (2.15)$$

где

$$\Phi_k(\theta, x) = \int_{(\mathcal{O}^*)^n} \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j \wp^{(k\omega)_j} t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{i=1}^n \theta_i(t_i) dt_i, \quad (2.16)$$

$$(k\omega)_j = k_1 \omega_{1j} + \dots + k_n \omega_{nj}.$$

Заметим, что интегралы (2.16) сходятся. Таким образом, регуляризация интеграла (2.12) сводится к регуляризации лорановского ряда (2.15).

ПРИМЕР. Для неархимедова поля K при $n = 1$, $N = 2$, $\omega = (-1, 1)$ имеем:

$$\Phi(\pi, x_1, x_2) = \int_{K^*} \chi(x_1 t^{-1} + x_2 t) \pi(t) d^*t = \pi^{-1}(x_1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \Phi_k(\theta, x), \quad (2.17)$$

где $x = x_1 x_2$ и

$$\Phi_k(\theta, x) = \int_{|t|=1} \chi(\wp^{-k} t^{-1} + \wp^{k+n} y t) \theta(t) dt \quad \text{при } x = \wp^n y, \quad |y| = 1.$$

Очевидно,

$$\Phi_k(\theta, x) = \begin{cases} \gamma_{-k}(\theta^{-1}) & \text{при } k > -n - k, \\ \theta^{-1}(y) \gamma_{k+n}(\theta) & \text{при } k < -n - k, \end{cases}$$

где $\gamma_k(\theta) = \int_{|t|=1} \chi(\wp^k t) \theta(t) dt$. Отсюда и из явных выражений для $\gamma_k(\theta)$ следует, что сумма в (2.17) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. В частности, если $\theta \neq 1$, то не более трех слагаемых.

2.5. Добавление. Для архимедовых полей $K = \mathbb{R}$ и $K = \mathbb{C}$ можно ввести более общий класс линейных функционалов. Именно, будем предполагать, что элементы матрицы ω – произвольные гомоморфизмы $K^* \rightarrow K^*$, т.е.

$$\begin{aligned} t_i^{\omega_{ij}} &= |t_i|^{\sigma_{ij}} \text{sign}^{\varepsilon_{ij}}(t_i), \quad \sigma_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon_{ij} = 0, 1, \quad \text{в случае } K = \mathbb{R}; \\ t_i^{\omega_{ij}} &= t_i^{\sigma_{ij}} \bar{t}_i^{\tau_{ij}}, \quad \sigma_{ij}, \tau_{ij} \in \mathbb{C}, \quad \sigma_{ij} - \tau_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad \text{в случае } K = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

По аналогии с предложениями 2.5 и 2.6 получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. 1) При $K = \mathbb{R}$ обобщенная гипергеометрическая функция Φ , ассоциированная с $(n \times N)$ -матрицей $\omega = (\sigma, \varepsilon)$, имеет вид:

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \varphi(-\sigma k, \varepsilon k) \frac{(ix)^k}{k!}, \quad \varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}_n. \quad (2.18)$$

2) При $K = \mathbb{C}$ обобщенная гипергеометрическая функция Φ , ассоциированная с $(n \times N)$ -матрицей $\omega = (\sigma, \tau)$, имеет вид:

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}_+^N} \varphi(-\sigma k - \tau l, -\tau k - \sigma l) \frac{(ix)^k}{k!} \frac{(i\bar{x})^l}{l!}. \quad (2.19)$$

§3. Гипергеометрические функции, ассоциированные с N -векторами

Рассмотрим случай $n = 1$, когда матрица ω есть вектор-строка

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N).$$

В этом случае обобщенная гипергеометрическая функция задается интегралом:

$$\Phi(\pi, x) = \int_{K^*} \chi\left(\sum_{j=1}^N x_j t^{\omega_j}\right) \pi(t) d^*t. \quad (3.1)$$

Будем предполагать, что ω_j попарно различны и отличны от 0; в противном случае функция Φ свелась бы к функции, ассоциированной с вектором меньшей размерности.

3.1. Функция $\Gamma_k(\pi, x)$. При $N = 1$ обобщенная гипергеометрическая функция задается целым числом $k \neq 0$, и мы условимся обозначать ее через $\Gamma_k(\pi, x)$:

$$\Gamma_k(\pi, x) = \int_{K^*} \chi(x t^k) \pi(t) d^*t. \quad (3.2)$$

В частности, при $k = 1$ будем писать $\Gamma(\pi, x)$ вместо $\Gamma_1(\pi, x)$. Из определения гамма-функции $\Gamma(\pi)$ следует, что

$$\Gamma(\pi, x) = \Gamma(\pi) \pi^{-1}(x). \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) определяет $\Gamma(\pi, x)$ как функцию на $\Pi \times \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Функция $\Gamma_k(\pi, x)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\Gamma_k(\pi, x) = \pi(-1) \Gamma_k(\pi, (-1)^k x); \quad \Gamma_{-k}(\pi, x) = \Gamma_k(-\pi, (-1)^k x).$$

Оба равенства получаются из определения $\Gamma_k(\pi, x)$ применением подстановок $t \mapsto -t$ и $t \mapsto t^{-1}$ в (3.2).

СЛЕДСТВИЕ. $\Gamma_k(\pi, x) = 0$ при четном k и $\pi(-1) \neq 1$. Если k нечетно, то $\Gamma_k(\pi, x)$ – четная функция от x при $\pi(-1) = 1$ и нечетная при $\pi(-1) \neq 1$.

Найдем выражения $\Gamma_k(\pi, x)$ через $\Gamma(\pi, x)$.

При $K = \mathbb{R}$ характеры π имеют вид $\pi(t) = (\lambda, \varepsilon, t) = |t|^\lambda \text{sign}^\varepsilon(t)$, и мы будем писать $\Gamma_k(\lambda, \varepsilon, x)$ и $\Gamma(\lambda, \varepsilon, x)$ вместо $\Gamma_k(\pi, x)$ и $\Gamma(\pi, x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *При $K = \mathbb{R}$ имеем:*

$$\Gamma_{2k}(\lambda, 0, x) = |2k|^{-1} (\Gamma(\lambda/(2k), 0, x) + \Gamma(\lambda/(2k), 1, x)); \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{2k}(\lambda, 1, x) \equiv 0; \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{2k+1}(\lambda, \varepsilon, x) = |2k+1|^{-1} \Gamma(\lambda/(2k+1), \varepsilon, x). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.5) следует из предложения 3.1. Далее, при четном k имеем:

$$\begin{aligned}\Gamma_k(\lambda, 0, x) &= 2 \int_0^\infty \chi(xt^k) t^{\lambda-1} dt = 2|k|^{-1} \int_0^\infty \chi(xs) s^{\lambda/k-1} ds \\ &= |k|^{-1} \left(\int_{-\infty}^\infty \chi(xs) |s|^{\lambda/k-1} ds + \int_{-\infty}^\infty \chi(xs) |s|^{\lambda/k-1} \operatorname{sign}(s) ds \right).\end{aligned}$$

Отсюда следует (3.4). Аналогично устанавливается (3.6).

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ имеем:

$$\Gamma_{kl}(\pi, x) = |k|^{-1} \sum_{\pi'^k = \pi} \Gamma_l(\pi', x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенства (3.4)–(3.6) можно представить единой формулой:

$$\Gamma_k(\pi, x) = |k|^{-1} \sum_{\pi'^k = \pi} \Gamma(\pi', x).$$

В случае $K = \mathbb{C}$ характеры π имеют вид $\pi(t) = t^\lambda \bar{t}^\mu$, где $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$, и мы будем писать $\Gamma_k(\lambda, \mu, x)$ и $\Gamma(\lambda, \mu, x)$ вместо $\Gamma_k(\pi, x)$ и $\Gamma(\pi, x)$. Заметим, что для каждого характера π имеется не более одного характера π' такого, что $\pi'^k = \pi$, и по аналогии с предложением 3.2 получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. При $K = \mathbb{C}$ имеем:

$$\Gamma_k(\lambda, \mu, x) = |k|^{-2} \Gamma(\lambda/k, \mu/k, x), \quad \text{если } \lambda - \mu \text{ делится на } k; \quad (3.7)$$

$\Gamma_k(\lambda, \mu, x) = 0$ в противном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3.3 удобно сформулировать в терминах переменных $\nu = \lambda + \mu$ и $n = \lambda - \mu$ ($n \in \mathbb{Z}$). Именно, если писать $\Gamma(\nu, n, x)$ и $\Gamma_k(\nu, n, x)$ вместо $\Gamma(\lambda, \mu, x)$ и $\Gamma_k(\lambda, \mu, x)$, то соотношения (3.7) принимают вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_k(\nu, n, x) &= 0, \quad \text{если } n \text{ не делится на } k; \\ \Gamma_k(\nu, kn, x) &= |k|^{-2} \Gamma(\nu/k, n, x).\end{aligned}$$

В случае неархимедова поля K характер π задается формулой $\pi(\wp^k t) = \lambda^k \theta(t)$, где $k \in \mathbb{Z}$, $|t| = 1$, и мы будем писать $\Gamma_k(\lambda, \theta, x)$ вместо $\Gamma_k(\pi, x)$.

Разбивая K^* на подмножества $\wp^k \theta^*$, получаем разложение обобщенной функции $\Gamma_k(\pi, x) = \Gamma_k(\lambda, \theta, x)$ в лорановский ряд относительно λ :

$$\Gamma_k(\lambda, \theta, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda^m \gamma_k(r + km, \theta, y), \quad (3.8)$$

где $x = \wp^r y$ и

$$\gamma_k(l, \theta, y) = \int_{|t|=1} \chi(\wp^l y t^k) \theta(t) dt. \quad (3.9)$$

При $k = 1$ условимся писать $\gamma(l, \theta, y)$ вместо $\gamma_1(l, \theta, y)$. Имеем:

$$\gamma(l, \theta, y) = \gamma_l(\theta) \theta^{-1}(y),$$

где $\gamma_l(\theta)$ — функция, введенная в § 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. При произвольном k имеем:

$$\gamma_k(l, \theta, y) = \sum_{\theta'^k = \theta} \gamma_l(l, \theta', y),$$

сумма берется по подмножеству характеров θ' таких, что $\theta'^k = \theta$; если это подмножество пусто, то $\gamma_k(l, \theta, y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\chi(\wp^l y t^k) = (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{\theta'} \gamma_l(\theta') \theta'^{-1}(y t^k),$$

то

$$\gamma_k(l, \theta, y) = (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{\theta'} \gamma_l(\theta') \theta'^{-1}(y) \int_{|t|=1} \theta'^{-k}(t) \theta(t) dt.$$

Остается заметить, что интеграл $\int_{|t|=1} \theta'^{-k}(t) \theta(t) dt$ равен $1 - q^{-1}$ при $\theta'^k = \theta$ и нулю в противном случае.

СЛЕДСТВИЕ. Функция $\Gamma_k(\lambda, \theta, x)$ представима в виде лорановского ряда:

$$\Gamma_k(\lambda, \theta, \wp^l y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\lambda^m \sum_{\theta'^k = \theta} \gamma(l + km, \theta', y) \right). \quad (3.10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. При $k > 0$ ряд (3.10) сходится в области $1 > |\lambda| > q^{-k/2}$, а при $k < 0$ – в области $1 < |\lambda| < q^{-k/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Gamma_{-k}(\lambda, \theta, x) = \Gamma_k(\lambda^{-1}, \theta^{-1}, x)$, достаточно рассмотреть случай $k > 0$. Представим ряд (3.10) в виде суммы двух рядов, где в первом суммирование ведется по всем m , для которых $l + km < -1$, а во втором – по остальным m . Из явных выражений для $\gamma(l, \theta, y) = \gamma_l(\theta) \theta^{-1}(y)$ следует, что $|\gamma(l + km, \theta', y)|$ равно q^{l+km} или 0 для всех членов первого ряда. Значит, имеет место оценка $|\sum_{\theta'^k = \theta} \gamma(l + km, \theta', y)| < C q^{km}$. Следовательно, первый ряд сходится при $|\lambda| > q^{-k/2}$. Для членов второго ряда $|\gamma(l + km, \theta', y)|$ может принимать только значения 0, $q^{-1/2}$, q^{-1} и $1 - q^{-1}$. Значит, второй ряд сходится при $|\lambda| < 1$. Предложение 3.5 доказано.

Определим регуляризацию обобщенной функции $\Gamma_k(\lambda, \theta, x)$ как аналитическое продолжение по λ сходящегося ряда (3.10).

3.2. Представление функции Φ в виде ряда – случай $K = \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Для каждого $j = 1, \dots, N$ обобщенная гипергеометрическая функция $\Phi(\pi, x) = \Phi(\lambda, \varepsilon, x)$, ассоциированная с $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, представима в виде сходящегося или расходящегося ряда:

$$\Phi(\lambda, \varepsilon, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^{N-1}} \left(\Gamma_{\omega_j}(\lambda + (\omega n)_j, \varepsilon + (\omega n)_j, x_j) \prod_{s \neq j} \frac{(ix_s)^{n_s}}{n_s!} \right), \quad (3.11)$$

где $(\omega n)_j = \sum_{s \neq j} \omega_s n_s$, а Γ_{ω_j} – функция, определенная в п. 3.1; сумма $\varepsilon + (\omega n)_j$ берется по модулю 2.

Если $\omega_s / \omega_j < 1$ для всех $s \neq j$, то ряд (3.11) сходится при любых $x \in \mathbb{R}^N$, где $x_j \neq 0$. Если $\omega_s / \omega_j > 1$ хотя бы для одного s , то ряд расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложение $\chi(t) = e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$, получаем:

$$\chi\left(\sum_{j=1}^N x_j t^{\omega_j}\right)(\lambda, \varepsilon, t) = \chi(x_j t^{\omega_j}) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^{N-1}} \left(\prod_{s \neq j} \frac{(ix_s)^{n_s}}{n_s!} (\lambda + (\omega n)_j, \varepsilon + (\omega n)_j, t) \right),$$

где $(\lambda, \varepsilon, t) = |t|^\lambda \text{sign}^\varepsilon(t)$. Интегрируя эту сумму по t , получаем (3.11).

Утверждение о сходимости ряда следует, учитывая выражение Γ_{ω_j} через гамма-функцию Эйлера $\Gamma(t)$, из асимптотики для $\Gamma(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие, что $\omega_s/\omega_j < 1$ для всех $s \neq j$, выполняется в точности для одного индекса j , если все числа ω_s одного знака, и в точности для двух индексов в противном случае. Таким образом, если все ω_j одного знака, то существует одно, а в противном случае – два представления обобщенной функции $\Phi(\lambda, \varepsilon, x)$ рядом, сходящимся для почти всех x . Функции, заданные этими двумя рядами, различны, поскольку имеют различные особенности по x . Однако они совпадают как обобщенные функции.

ПРИМЕР. $N = 2, \omega = (1, -1)$. В этом случае

$$\Phi(\lambda, \varepsilon, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_1 t + i x_2 t^{-1})} |t|^{\lambda-1} \text{sign}^\varepsilon(t) dt.$$

Согласно (3.11), разложения $\Phi(\lambda, \varepsilon, x)$ в ряд таковы:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \varepsilon, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda - n, \varepsilon - n)}{n!} (ix_2)^n |x_1|^{-\lambda+n} \text{sign}^{\varepsilon+n}(x_1) \\ &= |x_1|^{-\lambda} \text{sign}^\varepsilon(x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda - n, \varepsilon - n)}{n!} (ix_1 x_2)^n \quad \text{при } j = 1; \\ \Phi(\lambda, \varepsilon, x) &= |x_2|^\lambda \text{sign}^\varepsilon(x_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\lambda - n, \varepsilon - n)}{n!} (ix_1 x_2)^n \quad \text{при } j = 2. \end{aligned}$$

Оба ряда определены при $\lambda \notin \mathbb{Z}$ и сходятся при любых x_1, x_2 . Полученные функции не равны между собой, но они совпадают как обобщенные функции.

3.3. Представление функции Φ в виде ряда – случай $K = \mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Обобщенная гипергеометрическая функция $\Phi(\pi, x) = \Phi(\lambda, \mu, x)$, ассоциированная с $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, представима для каждого $j = 1, \dots, N$ в виде ряда:

$$\Phi(\lambda, \mu, x) = \sum_{m, n \in M(\lambda, \mu, \omega)} \left(\Gamma_{\omega_j}(\lambda + (\omega m)_j, \mu + (\omega n)_j, x_j) \prod_{s \neq j} \frac{(ix_s)^{m_s}}{m_s!} \frac{(i\bar{x}_s)^{n_s}}{n_s!} \right), \quad (3.12)$$

где $(\omega m)_j = \sum_{s \neq j} \omega_s m_s$, $(\omega n)_j = \sum_{s \neq j} \omega_s n_s$, а сумма берется по подмножеству $M(\lambda, \mu, \omega)$ тех $m, n \in \mathbb{Z}_+^{N-1}$, для которых разность $(\lambda + (\omega m)_j) - (\mu + (\omega n)_j)$ кратна ω_j .

Если $\omega_s/\omega_j < 1$ для всех $s \neq j$, то ряд (3.12) сходится при любых $x \in \mathbb{C}^N$, где $x_j \neq 0$. Если $\omega_s/\omega_j > 1$ хотя бы для одного $s \neq j$, то ряд (3.12) расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложение в двойной ряд

$$\chi(t) = e^{it+i\bar{t}} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{(i\bar{t})^l}{l!},$$

получаем:

$$\begin{aligned} & \chi\left(\sum_{j=1}^N x_j t^{\omega_j}\right)(\lambda, \mu, t) \\ &= \chi(x_j t^{\omega_j}) \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_+^{N-1}} \left((\lambda + (\omega m)_j, \mu + (\omega n)_j, t) \prod_{s \neq j}^N \frac{(ix_s)^{m_s}}{m_s!} \frac{(i\bar{x}_s)^{n_s}}{n_s!} \right). \end{aligned}$$

Проинтегрировав это выражение по t , получаем на основании предложения 3.3 равенство (3.12). Утверждения о сходимости ряда проверяются так же, как и в случае поля $K = \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\lambda - \mu$ не делится на НОД($\omega_1, \dots, \omega_N$), то множество $M(\lambda, \mu, \omega)$, по которому в (3.12) ведется суммирование, является пустым, и в этом случае $\Phi(\lambda, \mu, x) \equiv 0$.

ПРИМЕР. $N = 2$, $\omega = (1, -1)$. Соответствующая функция Φ представима в виде следующего двойного ряда ($j = 1$):

$$\Phi(\lambda, \mu, x) = x_1^{-\lambda} \bar{x}_1^{-\mu} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Gamma(\lambda - m, \mu - n) \frac{(ix_1 x_2)^m}{m!} \frac{(i\bar{x}_1 \bar{x}_2)^n}{n!}.$$

Подставив сюда выражение функции $\Gamma(\lambda, \mu)$ через эйлеровскую гамма-функцию,

$$\Gamma(\lambda, \mu) = i^{\lambda-\mu} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1-\mu)},$$

мы можем представить этот ряд как произведение двух рядов:

$$\Phi(\lambda, \mu, x) = i^{\lambda-\mu} x_1^{-\lambda} \bar{x}_1^{-\mu} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda - m)}{m!} (x_1 x_2)^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\bar{x}_1 \bar{x}_2)^n}{n! \Gamma(1 - \mu + n)} \right).$$

Другое представление Φ в виде ряда получается заменой (x_1, x_2) и (λ, μ) соответственно на (x_2, x_1) и $(-\lambda, -\mu)$. Эти два ряда равны как обобщенные функции.

3.4. Представление функции Φ в виде ряда – случай неархимедова поля K . Если характер π задан формулой $\pi(\wp^k t) = \lambda^k \theta(t)$, где $k \in \mathbb{Z}$, $|t| = 1$, то, разбивая K^* на подмножества $\wp^k \mathcal{O}^*$, получаем выражение обобщенной гипергеометрической функции $\Phi(\pi, x) = \Phi(\lambda, \theta, x)$ в форме лорановского ряда от λ :

$$\Phi(\lambda, \theta, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda^k \varphi(r + k\omega, \theta, y), \quad (3.13)$$

где $x_j = \wp^{r_j} y_j$, $j = 1, \dots, N$, и

$$\varphi(l, \theta, y) = \int_{|t|=1} \chi\left(\sum_{j=1}^N \wp^{l_j} y_j t^{\omega_j}\right) \theta(t) dt. \quad (3.14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Функция $\varphi(l, \theta, y)$ следующим образом выражается через функцию $\gamma(l, \theta, y) = \gamma_l(\theta)\theta^{-1}(y)$, введенную в п. 3.1:

$$\varphi(l, \theta, y) = (1 - q^{-1})^{-N+1} \sum_{\omega \theta' = \theta} \prod_{j=1}^N \gamma_{l_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}_j(y_j), \quad (3.15)$$

где $\omega \theta' = \omega_1 \theta'_1 + \dots + \omega_N \theta'_N$; суммирование — по множеству всех характеров $\theta'_1, \dots, \theta'_N$, удовлетворяющих условию $\omega \theta' = \theta$. Если это множество пусто, то $\varphi(l, \theta, y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\chi(\wp^l y) = (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{\theta} \gamma_l(\theta) \theta^{-1}(y)$ следует:

$$\chi\left(\sum_{j=1}^N \wp^{l_j} y_j t^{\omega_j}\right) \theta(t) = (1 - q^{-1})^{-N} \sum_{\theta'_1, \dots, \theta'_N} \left(\prod_{j=1}^N \gamma_{l_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}_j(y_j)\right) (\theta - \omega \theta', t).$$

Интегрируя по $t \in \theta^*$, получаем (3.15).

СЛЕДСТВИЕ. Обобщенная гипергеометрическая функция $\Phi(\lambda, \theta, x)$, ассоциированная с N -вектором ω , представима в виде ряда:

$$\Phi(\lambda, \theta, x) = (1 - q^{-1})^{-N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\lambda^k \sum_{\omega \theta' = \theta} \left(\prod_{j=1}^N \gamma_{r_j + k \omega_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}_j(y_j) \right) \right), \quad (3.16)$$

где $x_j = \wp^{r_j} y_j$, $j = 1, \dots, N$.

Обозначим через ω_+ и ω_- соответственно сумму положительных и сумму отрицательных координат вектора ω . Если положительные или отрицательные координаты отсутствуют, то положим соответственно $\omega_+ = +\infty$ и $\omega_- = -\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Ряд (3.16) или, что эквивалентно, ряд (3.13) сходится при любых r_j , y_j , $j = 1, \dots, N$, и любом $\lambda \neq 0$ из области $q^{-\omega_+/2} < |\lambda| < q^{-\omega_-/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим:

$$I_+ = \{j \mid \omega_j > 0\}, \quad I_- = \{j \mid \omega_j < 0\}$$

и определим k_+ и k_- равенствами

$$\begin{aligned} k_+ &= \min\{k \in \mathbb{Z} \mid r_j + k \omega_j \geq 0 \text{ при } j \in I_+; r_j + k \omega_j < -1 \text{ при } j \in I_-\}, \\ k_- &= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid r_j + k \omega_j \geq 0 \text{ при } j \in I_-; r_j + k \omega_j < -1 \text{ при } j \in I_+\}. \end{aligned}$$

Выберем любые числа k_1 и k_2 такие, что $k_1 > k_+$, $k_2 < k_-$ и $k_1 > k_2$.

Разобьем ряд (3.13) на три слагаемых:

$$\Phi(\lambda, \theta, x) = \sum_{k=-\infty}^{k_2} \lambda^k \varphi(r + k\omega, \theta, y) + \sum_{k=k_2+1}^{k_1-1} \lambda^k \varphi(r + k\omega, \theta, y) + \sum_{k=k_1}^{\infty} \lambda^k \varphi(r + k\omega, \theta, y)$$

и докажем, что первый и третий ряды в этой сумме сходятся соответственно при $|\lambda| > q^{-\omega_+/2}$ и $|\lambda| < q^{-\omega_-/2}$. Если $k \leq k_2$, то $r_j + k\omega_j \geq 0$ при $j \in I_-$, а потому

$$\varphi(r + k\omega, \theta, x) = \int_{|t|=1} \chi \left(\sum_{j \in I_+} \wp^{r_j + k\omega_j} y_j t^{\omega_j} \right) \theta(t) dt.$$

Отсюда и из равенства $\chi(\wp^l y) = (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{\theta} \gamma_l(\theta) \theta^{-1}(y)$ следует, что

$$\varphi(r + k\omega, \theta, y) = (1 - q^{-1})^{-\#I_+ + 1} \sum_{\omega \theta'_+ = \theta} \prod_{j \in I_+} \gamma_{r_j + k\omega_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}(y_j),$$

где $\omega \theta'_+ = \sum_{j \in I_+} \omega_j \theta'_j$.

Далее, из условия $k < k_2$ следует, что $|\gamma_{r_j + k\omega_j}(\theta'_j)|$ равно $q^{\frac{1}{2}(r_j + k\omega_j)}$ или 0 (последнее при $\theta \equiv 1$), и мы получаем следующую оценку для φ_k :

$$|\varphi(r + k\omega, \theta, x)| < C q^{k\omega_+/2} \quad \text{при } k < k_2.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{k_2} \lambda^k \varphi(r + k\omega, \theta, y)$ сходится при $|\lambda| > q^{-\omega_+/2}$.

Аналогично получаем оценку

$$|\varphi(r + k\omega, \theta, x)| < C q^{k\omega_-/2} \quad \text{при } k > k_1.$$

Из нее следует, что ряд $\sum_{k=k_1}^{\infty} \lambda^k \varphi(r + k\omega, \theta, y)$ сходится при $|\lambda| < q^{-\omega_-/2}$.

ПРИМЕР. $N = 2$, $\omega = (1, -1)$. Функция Φ представима в виде ряда:

$$\begin{aligned} \Phi(\pi, x) &= \Phi(\lambda, \theta; \wp^{r_1} y_1, \wp^{r_2} y_2) \\ &= (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\theta'_1 - \theta'_2 = \theta} \lambda^k (\gamma_{r_1 + k}(\theta'_1) \gamma_{r_2 - k}(\theta'_2) \theta'^{-1}_1(y_1) \theta'^{-1}_2(y_2)). \end{aligned}$$

Ряд сходится в области $q^{1/2} > |\lambda| > q^{-1/2}$.

§ 4. Структура гипергеометрических функций при произвольных n и N

4.1. Функция $\Gamma_{\omega}(\pi, x)$. Начнем со случая $N = n$, когда ω — квадратная матрица порядка n . Условимся обозначать ассоциированную с ω обобщенную гипергеометрическую функцию через $\Gamma_{\omega}(\pi, x) = \Gamma_{\omega}(\pi_1, \dots, \pi_n; x_1, \dots, x_n)$:

$$\Gamma_{\omega}(\pi, x) = \int_{(K^*)^n} \left(\chi \left(\sum_{j=1}^n x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{i=1}^n \pi_i(t_i) d^* t_i \right).$$

При $\omega = e$ (единичная матрица) будем писать $\Gamma(\pi, x)$ вместо $\Gamma_e(\pi, x)$. Очевидно, что

$$\Gamma(\pi, x) = \Gamma(\pi_1, \dots, \pi_n; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \Gamma(\pi_i, x_i), \quad (4.1)$$

где $\Gamma(\pi_i, x_i)$ — функция, введенная в п. 3.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. При $K = \mathbb{R}$ имеем для любой невырожденной матрицы ω :

$$\Gamma_{\omega}(\pi, x) = |\det \omega|^{-1} \sum_{\omega \pi' = \pi} \Gamma(\pi', x); \quad (4.2)$$

суммирование — по множеству $M_{\omega}(\pi)$ всех π' , удовлетворяющих условию $\omega \pi' = \pi$. Если это множество пусто, то $\Gamma_{\omega}(\pi, x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.3 следует, что

$$\Gamma_{\omega}(\pi, x) = \Gamma(\omega^{-1}\pi, x) \quad \text{для любой матрицы } \omega \in SL(n, \mathbb{Z}).$$

Далее, по аналогии с предложением 3.2 доказывается, что

$$\Gamma_{k\omega}(\pi, x) = |\det k|^{-1} \sum_{k\pi'=\pi} \Gamma_{\omega}(\pi', x)$$

для любой матрицы $k = \text{diag}(k_1, \dots, k_n) \in GL(n, \mathbb{Z})$; суммирование – по множеству $M_k(\pi)$ всех π' таких, что $\pi'^k = \pi$. Если это множество пусто, то $\Gamma_{k\omega}(\pi, x) = 0$.

В случае произвольной невырожденной целочисленной матрицы ω воспользуемся представлением ω в виде

$$\omega = a k b,$$

где $a, b \in SL(n, \mathbb{Z})$, а k – целочисленная диагональная матрица. Имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega}(\pi, x) &= \Gamma_{akb}(\pi, x) = \Gamma_{kb}(a^{-1}\pi, x) \\ &= |\det k|^{-1} \sum_{k\pi''=a^{-1}\pi} \Gamma_b(\pi'', x) = |\det k|^{-1} \sum_{k\pi''=a^{-1}\pi} \Gamma(b^{-1}\pi'', x). \end{aligned}$$

Положив $b^{-1}\pi'' = \pi'$, получаем равенство (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество $M_{\omega}(\pi)$ содержит не более 2^n элементов.

Удобно при $K = \mathbb{R}$ вместо $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ писать (λ, ε) , где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = 0, 1$. В этих обозначениях равенство (4.2) принимает вид

$$\Gamma_{\omega}(\lambda, \varepsilon, x) = |\det \omega|^{-1} \sum_{\omega\varepsilon'=\varepsilon} \Gamma(\omega^{-1}\lambda, \varepsilon'); \quad (4.3)$$

суммирование по всем $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ таким, что разность $\omega\varepsilon' - \varepsilon$ имеет только четные координаты.

При $K = \mathbb{C}$ для каждого характера $\pi \in \Pi^n$ имеется не более одного характера π' такого, что $\omega\pi' = \pi$, и мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. При $K = \mathbb{C}$ если $\pi = \omega\pi'$, то

$$\Gamma_{\omega}(\pi, x) = |\det \omega|^{-2} \Gamma(\pi', x). \quad (4.4)$$

В противном случае $\Gamma_{\omega}(\pi, x) = 0$.

Поскольку в случае $K = \mathbb{C}$ каждый характер π_i задается парой $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}$, где $\lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z}$, то удобно вместо $\Gamma_{\omega}(\pi, x)$ писать $\Gamma_{\omega}(\lambda, \mu, x)$ или $\Gamma_{\omega}(\nu, m, x)$, где $\nu = \lambda + \mu$, $m = \lambda - \mu$. В этих обозначениях соотношение (4.4) принимает вид

$$\Gamma_{\omega}(\lambda, \mu, x) = |\det \omega|^{-2} \Gamma(\omega^{-1}\lambda, \omega^{-1}\mu, x), \quad \text{если } \omega^{-1}(\lambda - \mu) \in \mathbb{Z}^n; \quad (4.5)$$

$$\Gamma_{\omega}(\nu, m, x) = |\det \omega|^{-2} \Gamma(\omega^{-1}\nu, \omega^{-1}m, x), \quad \text{если } \omega^{-1}m \in \mathbb{Z}^n; \quad (4.6)$$

$\Gamma_{\omega}(\lambda, \mu, x) = 0$ и $\Gamma_{\omega}(\nu, m, x) = 0$ в противных случаях.

Перейдем к случаю неархимедова поля K . Будем задавать характеры π формулой $\pi(\wp^m t) = \lambda^m \theta(t)$, где $m \in \mathbb{Z}$, $|t| = 1$, а θ – характер на подгруппе $\mathcal{O}^* \subset K$ элементов с нормой 1, и писать $\Gamma_\omega(\lambda, \theta, x) = \Gamma_\omega(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \theta_1, \dots, \theta_n; x)$ вместо $\Gamma_\omega(\pi, x)$.

Введем по аналогии со случаем $n = 1$ (см. п. 3.1) следующую функцию от $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, где $|y_i| = 1$, а θ_i – характеры на подгруппе $\mathcal{O}^*$ элементов с нормой 1:

$$\gamma_\omega(l, \theta, y) = \int_{(\mathcal{O}^*)^n} \chi \left(\sum_{j=1}^n \wp^{l_j} y_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{i=1}^n \theta_i(t_i) dt_i. \quad (4.7)$$

При $\omega = e$ условимся писать $\gamma(l, \theta, y)$ вместо $\gamma_e(l, \theta, y)$. Очевидно, что $\gamma(l, \theta, y)$ разлагается в произведение:

$$\gamma(l, \theta, y) = \prod_{i=1}^n \gamma(l_i, \theta_i, y_i), \quad (4.8)$$

где $\gamma(l_i, \theta_i, y_i) = \gamma_{l_i}(\theta_i) \theta_i^{-1}(y_i)$ – функция, введенная в п. 3.1.

В этих обозначениях обобщенная гипергеометрическая функция $\Gamma_\omega(\lambda, \theta, x)$ выражается через $\gamma_\omega(l, \theta, x)$ в форме лорановского ряда

$$\Gamma_\omega(\lambda, \theta, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n} \cdot \gamma_\omega(r + m\omega, \theta, y), \quad (4.9)$$

где положено: $x_i = \wp^{r_i} y_i$, $|y_i| = 1$, $i = 1, \dots, n$; $m\omega$ – вектор с координатами $m\omega_j = m_1 \omega_{1j} + \dots + m_n \omega_{nj}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *При произвольном ω имеем*

$$\gamma_\omega(l, \theta, y) = \sum_{\omega \theta' = \theta} \gamma(l, \theta', y); \quad (4.10)$$

суммирование по подмножеству наборов $\theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_n)$ таких, что $\omega \theta' = \theta$, т.е., в других обозначениях, $\theta_1^{\omega_{i1}} \dots \theta_n^{\omega_{in}} = \theta_i$, $i = 1, \dots, n$. Если это подмножество пусто, то $\gamma_\omega(l, \theta, y) = 0$.

В самом деле, из равенства $\chi(\wp^k t) = (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{\theta'} \gamma_k(\theta') \theta'^{-1}(t)$ следует, что

$$\gamma_\omega(l, \theta, y) = (1 - q^{-1})^{-n} \sum_{\theta'_1, \dots, \theta'_n} \left(\left(\prod_{j=1}^n \gamma_{l_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}_j(y_j) \right) \prod_{i=1}^n \int_{\mathcal{O}^*} (-\omega \theta')_i + \theta_i, t_i dt_i \right).$$

Интегрируя по t_i , получаем равенство (4.10).

СЛЕДСТВИЕ. *Функция $\Gamma_\omega(\lambda, \theta, x)$, где $x_i = \wp^{r_i} y_i$, $i = 1, \dots, n$, представима в виде лорановского ряда*

$$\Gamma_\omega(\lambda, \theta, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\lambda^m \sum_{\omega \theta' = \theta} \gamma(r + m\omega, \theta', y) \right), \quad x = \wp^r y, \quad (4.11)$$

где $\lambda^m = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Ряд (4.11) сходится в области значений λ , определенной неравенствами $q^{-1/2} < |\lambda_1^{u_{i1}} \dots \lambda_n^{u_{in}}| < 1$, $i = 1, \dots, n$, где $\|u_{ij}\|$ – матрица, обратная к ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r + m\omega = k$, $\mu_i = \lambda_1^{u_{i1}} \dots \lambda_n^{u_{in}}$, $i = 1, \dots, n$. В этих обозначениях ряд (4.11) принимает вид

$$\Gamma_\omega(\lambda, \theta, x) = \mu^{-r} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n}^* \left(\mu^k \sum_{\omega \theta' = \theta} \gamma(k, \theta', y) \right);$$

здесь $*$ означает, что суммирование ведется только по $k \in \mathbb{Z}^n$, представимым в виде $k = r + m\omega$. Поскольку $\gamma(k, \theta', y) = \prod_{i=1}^n \gamma(k_i, \theta'_i, y_i)$, утверждение следует непосредственно из предложения 3.5.

4.2. Представления в форме ряда; случай $K = \mathbb{R}$. Представим обобщенную гипергеометрическую функцию $\Phi(\pi, x)$, ассоциированную с произвольной невырожденной $(n \times N)$ -матрицей ω , в форме (сходящегося или расходящегося) ряда.

Для любого подмножества $I \subset [1, N]$ обозначим через ω_I матрицу, составленную из столбцов ω_j , $j \in I$, матрицы ω , и через x_I – вектор с координатами x_j , $j \in I$. Назовем подмножество I *базисным*, если $\#I = n$ и матрица ω_I невырождена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *При $K = \mathbb{R}$ с каждым базисным подмножеством $I \subset [1, N]$ связано следующее представление обобщенной гипергеометрической функции $\Phi(\lambda, \varepsilon, x) = \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n; x)$ в виде ряда:*

$$\Phi(\lambda, \varepsilon, x) = \sum_k \left(\Gamma_{\omega_I} \left(\lambda + \sum_{j \notin I} \omega_j k_j, \varepsilon + \sum_{j \notin I} \omega_j k_j, x_I \right) \prod_{j \notin I} \frac{(ix_j)^{k_j}}{k_j!} \right), \quad (4.12)$$

где Γ_{ω_I} – обобщенная гипергеометрическая функция, ассоциированная с квадратной матрицей ω_I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложение

$$\chi(t) = e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!},$$

представим $\chi(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}}) \prod_{s=1}^n (\lambda_s, \varepsilon_s, t_s)$ в виде суммы:

$$\begin{aligned} & \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{s=1}^n (\lambda_s, \varepsilon_s, t_s) \\ &= \chi \left(\sum_{j \in I} x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \sum_k \left(\prod_{j \notin I} \frac{(ix_j)^{k_j}}{k_j!} \right) \prod_{s=1}^n \left(\lambda_s + \sum_{j \notin I} k_j \omega_{sj}, \varepsilon_s + \sum_{j \notin I} k_j \omega_{sj}, t_s \right). \end{aligned}$$

Интегрируя эту сумму по $t_1, \dots, t_n$, получим равенство (14.12).

Подставив в (4.12) выражение функции Γ_ω через функцию Γ , получим

СЛЕДСТВИЕ. *Имеем:*

$$\Phi(\lambda, \varepsilon, x) = |\det \omega_I|^{-1} \sum_{k, \varepsilon'} \left(\Gamma \left(\omega_I^{-1} \left(\lambda + \sum_{j \notin I} \omega_j k_j \right), \varepsilon', x_I \right) \prod_{j \notin I} \frac{(ix_j)^{k_j}}{k_j!} \right), \quad (4.13)$$

где сумма берется только по тем k и ε' , для которых $\sum_{j \notin I} \omega_j k_j - \omega_I \varepsilon' \equiv \varepsilon \pmod{2}$.

Обозначим: $\omega_I^{-1} \lambda = \alpha$, $\omega_I^{-1} \omega_J = \sigma$, $J = [1, N] \setminus I$, и через α_i , $i \in I$, и σ_{ij} , $i \in I$, условимся обозначать координаты векторов α и σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *В принятых обозначениях функция $\Phi(\lambda, \varepsilon, x)$ представима в виде ряда:*

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \varepsilon, x) &= |\det \omega_I|^{-1} \prod_{s \in I} |x_s|^{-\alpha_s} \operatorname{sign}^{\varepsilon_s}(x_s) \\ &\times \sum_{k, \varepsilon'} \left(\prod_{s \in I} \Gamma \left(\alpha_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} k_j, \varepsilon'_s \right) \prod_{j \notin I} \frac{(iy_j)^{k_j}}{k_j!} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$y_j = x_j \prod_{s \in I} x_s^{-\sigma_{sj}}, \quad j \notin I.$$

В самом деле, из определения функции $\Gamma(\lambda, \varepsilon, x)$ следует, что

$$\begin{aligned} \Gamma \left(\omega_I^{-1} \left(\lambda + \sum_{j \notin I} \omega_j k_j \right), \varepsilon', x_I \right) &= \Gamma \left(\alpha + \sum_{j \notin I} \sigma_j k_j, \varepsilon', x_I \right) \\ &= \prod_{s \in I} \left(\Gamma \left(\alpha_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} k_j, \varepsilon'_s \right) x_s^{-\sigma_{sj} k_j} |x_s|^{-\alpha_s} \operatorname{sign}^{\varepsilon_s}(x_s) \right). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Если $\sum_{s \in I} \sigma_{sj} < 1$ для всех $j \notin I$, то ряд (4.14) сходится при любых y_j .*

Утверждение следует из асимптотических оценок для функции $\Gamma(\lambda_s, \varepsilon_s)$.

Условимся называть ряд

$$\Psi_I(\alpha, \varepsilon, y) = \sum_{k, \varepsilon'} \left(\prod_{s \in I} \Gamma \left(\alpha_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} k_j, \varepsilon'_s \right) \prod_{j \notin I} \frac{(-iy_j)^{k_j}}{k_j!} \right)$$

приведенным гипергеометрическим рядом, ассоциированным с матрицей ω и базисным подмножеством I .

4.3. Представления в форме ряда; случай $K = \mathbb{C}$. По аналогии со случаем $K = \mathbb{R}$ имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. При $K = \mathbb{C}$ с каждым базисным подмножеством $I \subset [1, N]$ связаны следующие представления обобщенной гипергеометрической функции $\Phi(\lambda, \mu, x) = \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu_1, \dots, \mu_n; x)$ в виде рядов:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \mu, x) &= \sum_{k, l} \left(\Gamma_{\omega_I} \left(\lambda + \sum_{j \notin I} \omega_j k_j, \mu + \sum_{j \notin I} \omega_j l_j, x_I \right) \prod_{j \notin I} \frac{(ix_j)^{k_j}}{k_j!} \frac{(i\bar{x}_j)^{l_j}}{l_j!} \right); \\ \Phi(\lambda, \mu, x) &= |\det \omega_I|^{-2} \sum_{k, l}^* \left(\Gamma \left(\omega_I^{-1} \left(\lambda + \sum_{j \notin I} \omega_j k_j \right), \omega_I^{-1} \left(\mu + \sum_{j \notin I} \omega_j l_j \right), x_I \right) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j \notin I} \frac{(ix_j)^{k_j}}{k_j!} \frac{(i\bar{x}_j)^{l_j}}{l_j!} \right); \end{aligned} \quad (4.15)$$

символ $*$ означает, что сумма берется только по тем k и l , для которых $\omega_I^{-1}(\lambda - \mu + \sum_{j \notin I} \omega_j(k_j - l_j)) \in \mathbb{Z}^{N-n}$.

Обозначим: $\omega_I^{-1}\lambda = \alpha$, $\omega_I^{-1}\mu = \beta$, $\omega_I^{-1}\omega_J = \sigma$, где $J = [1, N] \setminus I$, и через α_i , β_i и σ_{ij} , $i \in I$, условимся обозначать координаты соответствующих векторов.

По аналогии с предложением 4.6 получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. В принятых обозначениях функция $\Phi(\lambda, \mu, x)$ представима в виде ряда:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \mu, x) &= |\det \omega_I|^{-2} \prod_{j \in I} x_i^{-\alpha_i} \bar{x}_j^{-\beta_j} \\ &\quad \times \sum_{k, l}^* \left(\prod_{s \in I} \Gamma \left(\alpha_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} k_j, \beta_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} l_j \right) \prod_{j \notin I} \frac{(iy_j)^{k_j}}{k_j!} \frac{(i\bar{y}_j)^{l_j}}{l_j!} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$y_j = x_j \prod_{s \in I} x_s^{-\sigma_{sj}}, \quad j \notin I;$$

суммирование — по всем k и l , для которых $\alpha - \beta + \sum_{j \notin I} \sigma_j(k_j - l_j) \in \mathbb{Z}^{N-n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Если $\sum_{s \in I} \sigma_{sj} < 1$ для всех $j \notin I$, то ряд (4.16) сходится при любых y_j .

Условимся называть ряд

$$\Psi_I(\alpha, \beta, y) = \sum_{k, l}^* \left(\prod_{s \in I} \Gamma \left(\alpha_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} k_j, \beta_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} l_j \right) \prod_{j \notin I} \frac{(iy_j)^{k_j}}{k_j!} \frac{(i\bar{y}_j)^{l_j}}{l_j!} \right) \quad (4.17)$$

приведенным гипергеометрическим рядом, ассоциированным с матрицей ω и базисным подмножеством I .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. Если $\det \omega_I = \pm 1$, то ряд (4.17) представим в виде произведения двух рядов:

$$\Psi_I(\alpha, \beta, y) = \Psi_1(\alpha, y) \Psi_2(\beta, y), \quad (4.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(\alpha, y) &= i^{|\alpha|} \sum_k \left(\prod_{s \in I} \Gamma\left(\alpha_s + \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} k_j\right) \prod_{j \notin I} \frac{(i^{|\sigma_j|+1} y_j)^{k_j}}{k_j!} \right), \\ \Psi_2(\beta, y) &= i^{-|\beta|} \sum_l \left(\prod_{s \in I} \left(\Gamma\left(1 - \beta_s - \sum_{j \notin I} \sigma_{sj} l_j\right) \right)^{-1} \prod_{j \notin I} \frac{(i^{-|\sigma_j|+1} y_j)^{l_j}}{l_j!} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(a_s)$ – гамма-функция Эйлера, $|\alpha| = \sum \alpha_s$, $|\sigma_j| = \sum_{s \in I} \sigma_{sj}$.

В самом деле, если $\det \omega_I = \pm 1$, то суммирование в (4.17) ведется по всем $k_j \geq 0$ и $l_j \geq 0$. Чтобы получить (4.18), достаточно воспользоваться выражением $\Gamma(\lambda, \mu)$ через гамма-функцию Эйлера: $\Gamma(\lambda, \mu) = i^{\lambda-\mu} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(1-\mu)}$.

4.4. Представления в форме ряда; случай неархимедова поля K . По аналогии со случаем $n = 1$ свяжем с $(n \times N)$ -матрицей ω следующую функцию $\varphi(l, \theta, y)$ от $l = (l_1, \dots, l_N) \in \mathbb{Z}^N$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_N)$, где $|y_j| = 1$, а θ_i – характеры подгруппы $\mathcal{O}^* \subset K^*$ элементов с нормой 1:

$$\varphi(l, \theta, y) = \int_{(\mathcal{O}^*)^n} \chi \left(\sum_{j=1}^N \wp^{l_j} y_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{i=1}^n \theta_i(t_i) dt_i. \quad (4.19)$$

В частности, при $N = n$ функция $\varphi(l, \theta, y)$ совпадает с введенной в п. 4.1 функцией $\gamma_\omega(l, \theta, y)$.

Ассоциированная с ω обобщенная гипергеометрическая функция $\Phi(\pi, x) = \Phi(\lambda, \theta, x)$ выражается через $\varphi(l, \theta, y)$ в виде лорановского ряда. Именно, если характеры π_i заданы формулами $\pi_i(\wp^{m_i} t_i) = \lambda_i^{m_i} \theta(t_i)$, где $|t_i| = 1$, то при $x_j = \wp^{r_j} y_j$, $|y_j| = 1$, имеем:

$$\Phi(\lambda, \theta, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n} \varphi(r + m\omega, \theta, y). \quad (4.20)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.12. С каждым базисным подмножеством $I \subset [1, N]$ связано следующее представление функции $\varphi(l, \theta, y)$ в виде суммы ряда:

$$\varphi(l, \theta, y) = (1 - q^{-1})^{-N+2n} \sum_{\theta'_j, j \notin I} \left(\left(\prod_{j \notin I} \gamma_{l_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}(y_j) \right) \gamma_{\omega_I} \left(l, \theta - \sum_{j \notin I} \omega_j \theta'_j, y_I \right) \right), \quad (4.21)$$

где γ_{ω_I} – функция, введенная в п. 4.1, y_I – вектор с координатами y_j , $j \in I$.

В самом деле, используя равенство $\chi(\wp^k t) = (1 - q^{-1})^{-1} \sum_{\theta'} \gamma_k(\theta') \theta'^{-1}(t)$, где $|t| = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} & \chi \left(\sum_{j=1}^N \wp_j^l y_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{i=1}^n (\theta_i, t_i) \\ &= (1 - q^{-1})^{-N+n} \chi \left(\sum_{j \in I} \wp_j^l y_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \sum_{\theta'} \left(\left(\prod_{j \notin I} \gamma_{l_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}(y_j) \right) \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{i=1}^n \left(\theta_i - \sum_{j \notin I} \omega_{ij} \theta'_j, t_i \right) \right). \end{aligned}$$

Проинтегрировав по $t_1, \dots, t_n$, получим (4.21).

СЛЕДСТВИЕ. С каждым базисным подмножеством $I \subset [1, N]$ связано следующее представление обобщенной гипергеометрической функции $\Phi(\lambda, \theta, x)$ в виде суммы ряда:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \theta, x) &= (1 - q^{-1})^{-N+2n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{N-n}} \sum_{\theta'_i, i \notin I} \lambda^m \left(\prod_{j \notin I} \gamma_{l_j}(\theta'_j) \theta'^{-1}(y_j) \right) \\ & \quad \times \gamma_{\omega_I} \left(r + m\omega, \theta - \sum_{j \notin I} \omega_j \theta'_j, y_I \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $x_j = \wp^{r_j} y_j$, $j = 1, \dots, N$, $\lambda^m = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}$.

§ 5. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианами

5.1. Определение. Пусть $n = k + l - 1$, $N = kl$, где $k > 1$, $l \geq 1$. Условимся координаты векторов из $(K^*)^n$ обозначать через $(s_1, \dots, s_{k-1}, t_1, \dots, t_l)$, векторов из Π^n — через $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \tau_1, \dots, \tau_l)$, а элементы $x \in K^N$ задавать в форме $(k \times l)$ -матриц: $x = \|x_{ij}\|$.

Определим обобщенную функцию $\Phi(\sigma, \tau, x) \in \tilde{\mathcal{D}}'_n$, зависящую от параметра $x \in K^N$, как преобразование Меллина по $s \in (K^*)^{k-1}$ и $t \in (K^*)^l$ функции

$$F(s, t, x) = \chi \left(\sum_{i,j} x_{ij} s_i t_j \right), \quad \text{где } s_k = 1,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \tau, x) &= \Phi(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \tau_1, \dots, \tau_l, x) \\ &= \int_{(K^*)^n} \chi \left(\sum_{i,j} x_{ij} s_i t_j \right) \prod_{i=1}^{k-1} \sigma_i(s_i) d^* s_i \prod_{j=1}^l \tau_j(t_j) d^* t_j. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В соответствии с общим определением, Φ является обобщенной гипергеометрической функцией, ассоциированной с $(n \times N)$ -матрицей $\omega = \|\omega_{r,ij}\|$, где $r \in [1, k-1]$, $(ij) \in [1, k] \times [1, l]$, у которой

$$\omega_{i,ij} = 1 \quad \text{при } i < k, \quad \omega_{k+j-1,ij} = 1;$$

остальные элементы равны 0.

Интегрированием по $t_1, \dots, t_l$ получаем представление Φ в форме интеграла Эйлеровского типа

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \tau, x) &= \prod_{j=1}^l \Gamma(\tau_j) \\ &\times \int_{(K^*)^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} \sigma_i(s_i) \prod_{j=1}^l \tau_j^{-1}(x_{1j}s_1 + \dots + x_{k-1,j}s_{k-1} + x_{kj}) \prod_{i=1}^{k-1} d^*s_i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Интеграл (5.2) получается интегрированием обобщенной функции

$$\prod_{i=1}^{k-1} \sigma_i(t_i) \prod_{j=1}^l \tau_j^{-1}(t_{k+j-1})$$

на K^n по $(k-1)$ -мерным плоскостям, заданным уравнениями

$$t_{k+j-1} = x_{j1}t_1 + \dots + x_{j,k-1}t_{k-1} + x_{jk}, \quad j = 1, \dots, l.$$

По этой причине естественно называть Φ обобщенной гипергеометрической функцией, ассоциированной с грассманианом $(k-1)$ -мерных плоскостей в K^n .

5.2. Представление в однородных координатах. Удобно в определении функции Φ перейти к однородным координатам. Именно, будем интерпретировать основные и обобщенные функции как функции на подпространстве $\Pi_0^n \subset \Pi^{n+1}$ характеров $(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_l)$, удовлетворяющих условию

$$\prod_{r=1}^k \pi_r = \prod_{j=1}^l \tau_j, \quad (5.3)$$

а пространства $\tilde{\mathcal{D}}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}'_n$ основных и обобщенных функций — как пространства функций на Π_0^n .

В однородных координатах $(\sigma, \tau) = (\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_l)$ обобщенная гипергеометрическая функция Φ задается интегралами:

$$\Phi(\sigma, \tau, x) = \int_{s_m=1} \chi\left(\sum_{i,j} x_{ij}s_it_j\right) \prod_{i=1}^k \sigma_i(s_i) d^*s_i \prod_{j=1}^l \tau_j(t_j) d^*t_j, \quad m = 1, \dots, k; \quad (5.4)$$

$$\Phi(\sigma, \tau, x) = \int_{t_m=1} \chi\left(\sum_{i,j} x_{ij}s_it_j\right) \prod_{i=1}^k \sigma_i(s_i) d^*s_i \prod_{j=1}^l \tau_j(t_j) d^*t_j, \quad m = 1, \dots, l, \quad (5.5)$$

или в симметричной форме как интеграл по поверхности $\prod_{i=1}^k s_i = \prod_{j=1}^l t_j$ в $(K^*)^{n+1}$.

Интегрированием по t и s в (5.4) и (5.5) соответственно получаем представления Φ в форме интегралов Эйлеровского типа:

$$\Phi(\sigma, \tau, x) = \prod_{j=1}^l \Gamma(\tau_j) \int_{s_m=1} \left(\prod_{i=1}^k \sigma_i(s_i) \prod_{j=1}^l \tau_j^{-1} \left(\sum_{i=1}^k x_{ij} s_i \right) \right) \prod_{i \neq m} d^* s_i; \quad (5.6)$$

$$\Phi(\sigma, \tau, x) = \prod_{i=1}^k \Gamma(\sigma_i) \int_{t_m=1} \left(\prod_{i=1}^k \sigma_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^l x_{ij} t_j \right) \prod_{j=1}^l \tau_j(t_j) \right) \prod_{j \neq m} d^* t_j. \quad (5.7)$$

5.3. Соотношения однородности; приведенные гипергеометрические функции. Из (5.4) и (5.5) вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для любых диагональных матриц $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_k)$ и $b = \text{diag}(b_1, \dots, b_l)$, где $a_j \neq 0$, $b_r \neq 0$, выполняется соотношение*

$$\Phi(\sigma, \tau, axb) = \prod_{i=1}^k \sigma_i^{-1}(a_i) \prod_{j=1}^l \tau_j^{-1}(b_j) \Phi(\sigma, \tau, x). \quad (5.8)$$

Используя это свойство, функцию Φ от $N = kl$ параметров x_{ij} можно свести к функции от $(k-1)(l-1)$ параметров. Например, обозначим через $y = \|y_{ij}\|$ матрицу размера $(k-1) \times (l-1)$ и определим функцию $\Psi(\pi, \tau, y)$ равенством

$$\Psi(\pi, \tau, y) = \Phi(\pi, \tau, \tilde{y}), \quad (5.9)$$

где $\tilde{y}$ есть $(k \times l)$ -матрица, полученная приписыванием к y снизу и справа строки и столбца, состоящих из единиц.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Функция Φ выражается через функцию Ψ по формуле*

$$\Phi(\sigma, \tau, x) = \prod_{i=1}^k \sigma_i^{-1}(x_{il}) \prod_{j=1}^{l-1} \tau_j^{-1}(x_{kj}/x_{kl}) \Psi(\sigma, \tau, y), \quad (5.10)$$

где y есть $((k-1) \times (l-1))$ -матрица с элементами $y_{ij} = \frac{x_{ij}x_{kl}}{x_{il}x_{kj}}$.

В самом деле, матрица x представима в виде $x = a\tilde{y}b$, где $a = \text{diag}(x_{1l}, \dots, x_{kl})$ и $b = \text{diag}(x_{k1}, \dots, x_{k,l-1}, 1)$. Поэтому (5.10) следует из (5.9).

Функцию Ψ естественно называть приведенной гипергеометрической функцией.

5.4. Представление в форме ряда; случай $K = \mathbb{R}$. В §4 с каждым базисным подмножеством $I \subset [1, N]$ было связано представление обобщенной функции Φ в форме сходящегося или расходящегося ряда. В нашем случае базисными являются все подмножества “лестничного” типа

$$I = \{(j_1, r_1), \dots, (j_n, r_n)\},$$

где $(j_1, r_1) = (1, 1)$, $(j_n, r_n) = (k, l)$ и (j_{s+1}, r_{s+1}) есть для каждого $s = 1, \dots, n$ либо $(j_s, r_s + 1)$, либо $(j_s + 1, r_s)$, а также подмножества, получающиеся из них перестановками индексов $j = 1, \dots, l$ и $r = 1, \dots, k$. При этом $\det \omega_I = \pm 1$ для каждого базисного подмножества I , см. [8].

Приведем представление функции Φ в форме ряда, отвечающего базисному подмножеству

$$I = \{(k, 1), \dots, (k, l), (k-1, l), \dots, (1, l)\}.$$

Пусть $K = \mathbb{R}$. Будем задавать характеры σ_i и τ_i равенствами

$$\begin{aligned}\sigma_i(s_i) &= |s_i|^{\lambda_i} \operatorname{sign}^{\varepsilon_i}(s_i) = (\lambda_i, \varepsilon_i, s_i) \quad \text{и} \\ \tau_i(t_i) &= |t_i|^{\lambda'_i} \operatorname{sign}^{\varepsilon'_i}(t_i) = (\lambda'_i, \varepsilon'_i, t_i).\end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\lambda^0 &= \lambda'_l - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i, \quad \varepsilon^0 = \varepsilon'_l - \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i; \\ c_i(n) &= \sum_{j=1}^{l-1} n_{ij}, \quad i \in [1, k-1], \quad c'_j(n) = \sum_{i=1}^{k-1} n_{ij}, \quad j \in [1, l-1], \quad c(n) = \sum_{i,j} n_{ij}.\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *При $K = \mathbb{R}$ функция Φ , заданная интегралом (5.1), представима в виде ряда:*

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma, \tau, x) &= \Phi(\lambda, \varepsilon; \lambda', \varepsilon'; x) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \sigma_i^{-1}(x_{il}/x_{kl}) \prod_{j=1}^l \tau_j^{-1}(x_{kj}) \sum_n \left(c(\sigma, \tau, n) \prod_{i,j} \frac{(iy_{ij})^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \right),\end{aligned} \quad (5.11)$$

где $y_{ij} = \frac{x_{ij}x_{kl}}{x_{il}x_{kj}}$, $i < k$, $j < l$,

$$c(\sigma, \tau, n) = \prod_{i=1}^{k-1} \Gamma(\lambda_i + c_i(n), \varepsilon_i + c_i(n)) \prod_{j=1}^{l-1} \Gamma(\lambda'_j + c'_j(n), \varepsilon'_j + c'_j(n)) \Gamma(\lambda^0 - c(n), \varepsilon^0 - c(n));$$

суммирование — по $n_{ij} \geq 0$, $i \in [1, k-1]$, $j \in [1, l-1]$.

Ряд сходится при $|y_{ij}| < 1$ для всех i и j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем независимое от § 4 доказательство. Подстановкой $s_i \rightarrow s_i t_l^{-1}$, $i = 1, \dots, k-1$, интеграл (5.1) приводится к виду

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda, \varepsilon; \lambda', \varepsilon'; x) &= \int_{K^{n-1}} \chi \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_{il} s_i + \sum_{j=1}^l x_{kj} t_j + \sum' x_{ij} s_i t_j t_l^{-1} \right) \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda_i, \varepsilon_i, s_i) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{l-1} (\lambda'_j, \varepsilon'_j, t_j) (\lambda^0, \varepsilon^0, t_l) d^* t d^* s,\end{aligned} \quad (5.12)$$

где $\sum'$ — сумма по $i < k$ и $j < l$.

Разложив $\chi(\sum' x_{ij} s_i t_j t_l^{-1})$ в степенной ряд, представим подынтегральное выражение в (5.12) в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} & \chi \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_{il} s_i + \sum_{j=1}^l x_{kj} t_j \right) \sum_n \left(\frac{(ix_{ij})^{n_{ij}}}{n_{ij}!} (\lambda^0 - c(n), \varepsilon^0 - c(n), t_l) \right. \\ & \quad \times \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda_i + c_i(n), \varepsilon_i + c_i(n), s_i) \prod_{j=1}^{l-1} (\lambda'_j + c'_j(n), \varepsilon'_j + c'_j(n), t_j) \Big). \end{aligned}$$

Интегрируя это выражение по t и s , получаем

$$\begin{aligned} & \sum_n \left(\left(\prod_{i=1}^{k-1} \Gamma(\lambda_i + c_i(n), \varepsilon_i + c_i(n)) (-\lambda_i - c_i(n), -\varepsilon_i - c_i(n), x_{il}) \right) \right. \\ & \quad \times \left(\prod_{j=1}^{l-1} \Gamma(\lambda'_j + c'_j(n), \varepsilon'_j + c'_j(n)) (-\lambda'_j - c'_j(n), -\varepsilon'_j - c'_j(n), x_{kj}) \right) \\ & \quad \times \left. \left(\Gamma(\lambda^0 - c(n), \varepsilon^0 - c(n)) (-\lambda^0 + c(n), -\varepsilon^0 + c(n), x_{kl}) \right) \prod_{i,j} \frac{(ix_{ij})^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что этот ряд можно представить в виде (5.11).

Утверждение о сходимости следует из асимптотических оценок для гамма-функции. Достаточно заметить, что каждый индекс суммирования n_{ij} входит в выражение для $c(\sigma, \tau, n)$ два раза с коэффициентом 1 и один раз с коэффициентом -1 .

5.5. Представление в форме ряда; случай $K = \mathbb{C}$. Как отмечалось, $\det \omega_I = \pm 1$ для любого базисного подмножества $I \subset [1, N]$; поэтому в силу предложения 4.11 ряды для Φ , ассоциированные с этими базисными подмножествами, представимы в виде произведения двух рядов. Приведем явное выражение для ряда, ассоциированного с базисным подмножеством I из п. 5.4.

Будем задавать характеры σ_i и τ_i равенствами:

$$\sigma_i(s_i) = s_i^{\lambda_i} \bar{s}_i^{\mu_i}, \quad \tau_i(t_i) = t_i^{\lambda'_i} \bar{t}_i^{\mu'_i}.$$

Соответственно будем писать $\Phi(\lambda, \mu; \lambda', \mu'; x)$ вместо $\Phi(\sigma, \tau, x)$. По аналогии со случаем $K = \mathbb{R}$ получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. При $K = \mathbb{C}$ обобщенная гипергеометрическая функция $\Phi(\sigma, \tau, x) = \Phi(\lambda, \mu; \lambda', \mu'; x)$ представима в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \mu; \lambda', \mu'; x) &= i^{|\lambda' - \mu'|} \prod_{i=1}^{k-1} \sigma_i^{-1}(x_{li}/x_{kl}) \prod_{j=1}^l \tau_j^{-1}(x_{kj}) \\ & \quad \times \left(\sum_n c_1(\lambda, \lambda', n) \prod_{i,j} \frac{(iy_{ij})^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \right) \left(\sum_n c_2(\mu, \mu', n) \prod_{i,j} \frac{(i\bar{y}_{ij})^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \right), \end{aligned} \tag{5.13}$$

где $y_{ij} = \frac{x_{ij}x_{kl}}{x_{il}x_{kj}}$, $i < k$, $j < l$, $|\lambda' - \mu'| = \sum_{i=1}^l |\lambda'_i - \mu'_i|$,

$$c_1(\lambda, \lambda', n) = \prod_{i=1}^{k-1} \Gamma(\lambda_i + c_i(n)) \prod_{j=1}^{l-1} \Gamma(\lambda'_j + c'_j(n)) \Gamma(\lambda^0 - c(n));$$

$$c_2(\mu, \mu', n) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \Gamma(1 - \mu_i - c_i(n)) \prod_{j=1}^{l-1} \Gamma(1 - \mu'_j - c'_j(n)) \Gamma(1 - \mu^0 + c(n)) \right)^{-1}.$$

Здесь $\Gamma(t)$ – гамма-функция Эйлера; суммирование – по $n_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, k-1$, $j = 1, \dots, l-1$.

Оба ряда в (5.13) сходятся при $|y_{ij}| < 1$ для всех $i \in [1, k-1]$ и $j \in [1, l-1]$.

5.6. Представление в форме ряда; случай неархимедова поля K . Следуя п. 4.4, введем функцию $\varphi(m, \theta, \rho, y)$ от $m = \|m_{ij}\|$, $y = \|y_{ij}\|$ (где $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, $y_{ij} \in \mathcal{O}^*$, $i \in [1, k]$, $j \in [1, l]$) и характеров $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$; $\rho_1, \dots, \rho_l$ на $\mathcal{O}^*$:

$$\varphi(m, \theta, \rho, y) = \int_{(\mathcal{O}^*)^n} \chi \left(\sum_{i,j} \wp^{m_{ij}} y_{ij} s_i t_j \right) \Big|_{s_k=1} \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i(s_i) ds_i \prod_{j=1}^l \rho_j(t_j) dt_j. \quad (5.14)$$

Пусть характеры σ_i и τ_j заданы равенствами

$$\sigma_i(\wp^k t) = \lambda_i^k \theta_i(t), \quad \rho_j(\wp^k t) = \mu_j^k \rho_j(t), \quad |t| = 1. \quad (5.15)$$

Тогда исходная обобщенная гипергеометрическая функция Φ представима в виде лорановского ряда от λ_i и μ_j :

$$\Phi(\pi, \tau, x) = \Phi(\lambda, \mu, \theta, \rho, x) = \sum_{a,b} \lambda^a \mu^b \varphi(m(a, b), \theta, \rho, y) \quad \text{при } x_{ij} = \wp^{m_{ij}} y_{ij}, \quad (5.16)$$

где $m_{ij}(a, b) = m_{ij} + a_i + b_j$, $\lambda^a = \lambda_1^{a_1} \dots \lambda_{k-1}^{a_{k-1}}$, $\mu^b = \mu_1^{b_1} \dots \mu_l^{b_l}$; суммирование – по всем $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$.

Согласно п. 4.4, с каждым базисным подмножеством $I \subset [1, N]$ связано представление функции φ в виде суммы. В частности, если I – базисное подмножество, определенное в п. 5.4, то получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Функция φ представима конечной суммой:*

$$\begin{aligned} \varphi(m, \theta, \rho, y) &= (1 - q^{-1})^{-(k-1)(l-1)} \\ &\times \sum_{\theta'_{ij}: i < k, j < l} \left(\prod'_{i,j} \gamma(m_{ij}, \theta'_{ij}, y_{ij}) \prod_{i=1}^{k-1} \gamma \left(m_{il}, \theta_i - \sum_{j=1}^{l-1} \theta'_{ij}, y_{il} \right) \right. \\ &\times \left. \prod_{j=1}^{l-1} \gamma \left(m_{kj}, \rho_j - \sum_{i=1}^{k-1} \theta'_{ij}, y_{kj} \right) \gamma \left(m_{kl}, \rho_l - \sum \theta_i - \sum_{i,j} \theta'_{ij} y_{kl} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $\gamma(l, \theta, t) = \gamma_l(\theta) \theta^{-1}(t)$ (см. п. 4.1); произведение $\prod'_{i,j}$ берется по $i < k$ и $j < l$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Ряд (5.16) сходится в области, заданной неравенствами $q^{-1/2} < |\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, k-1$; $q^{-1/2} < |\mu_j| < 1$, $j = 1, \dots, l-1$; $|\mu_l \lambda_1^{-1} \dots \lambda_{k-1}^{-1}| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mu'_l = \mu_l \lambda_1^{-1} \dots \lambda_{k-1}^{-1}$, $\mu'_j = \mu_j$, $j < l$. Перейдя в (5.16) от индексов a_i к новым индексам суммирования $a'_i = a_i + b_l$, получим

$$\Phi(\lambda, \mu, \theta, \rho, x) = \sum_{a', b} \lambda^{a'} \mu'^b \varphi(m'(a', b), \theta, \rho, y),$$

где $m'_{il}(a', b) = m_{il} + a'_i$, $m'_{kj}(a', b) = m_{kj} + b_j$. Из оценок для функции γ следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi(m'(a', b), \theta, \rho, y)| &< C \sum_{\theta'} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left| \gamma \left(m_{il} + a'_i, \theta_i - \sum_{j \neq l} \theta'_{ij}, y_{il} \right) \right| \right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{l-1} \left| \gamma \left(m_{kj} + b_j, \rho_j - \sum_i \theta'_{ij}, y_{kj} \right) \right| \\ &\quad \times \left| \gamma \left(m_{kl}, \rho_l - \sum_i \theta_i - \sum_{i,j} \theta'_{jr}, y_{kl} \right) \right|. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\Phi| < C \sum_{\theta'} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{a'_i} |\lambda_i^{a'_i} \gamma(m_{il} + a'_i, \dots)| \right) \prod_{j=1}^l \left(\sum_{b_j} |\mu_j^{b_j} \gamma(m_{kj} + b_j, \dots)| \right) \right).$$

Из предложения 4.4 следует, что каждый из рядов $\sum_{a'_i}$ и $\sum_{b_j}$ сходится в интервале $(q^{-1/2}, 1)$. Отсюда следует утверждение.

§ 6. Гипергеометрические функции гауссова типа

6.1. Определение. В этом параграфе более подробно изучаются гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{2,4}$ над произвольным локально компактным полем K (случай $k = l = 2$). Мы называем их гипергеометрическими функциями гауссова типа ввиду простой их связи при $K = \mathbb{R}$ с классической гипергеометрической функцией Гаусса.

В соответствии с § 5, обобщенная гипергеометрическая функция гауссова типа есть обобщенная функция на пространстве Π_0^3 переменных $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ (где σ_i, τ_j — мультипликативные характеры поля K), связанных соотношением $\sigma_1 \sigma_2 = \tau_1 \tau_2$. Формально она может быть задана любым из интегралов

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \tau, x) &= \int_{(K^*)^3} \chi(x_{11}s_1t_1 + x_{12}s_1t_2 + x_{21}s_2t_1 + x_{22}s_2t_2) \Big|_{s_{m_1}=1} \\ &\quad \times \sigma_{m_2}(s_{m_2}) \tau_1(t_1) \tau_2(t_2) d^*s_{m_2} d^*t_1 d^*t_2, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \tau, x) &= \int_{(K^*)^3} \chi(x_{11}s_1t_1 + x_{12}s_1t_2 + x_{21}s_2t_1 + x_{22}s_2t_2) \Big|_{t_{m_1}=1} \\ &\quad \times \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) \tau_{m_2}(t_{m_2}) d^*s_1 d^*s_2 d^*t_{m_2}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $m_1, m_2 = 1, 2$, $m_1 \neq m_2$. Здесь $x = \|x_{ij}\|$ играет роль параметра.

Из (6.1) и (6.2) интегрированием по s_1, s_2 или t_1, t_2 получаются представления функции Φ в форме интегралов эйлеровского типа:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\sigma, \tau, x) &= \Gamma(\tau_1)\Gamma(\tau_2) \int_{K^*} \sigma_2(s)\tau_1^{-1}(x_{11} + x_{21}s)\tau_2^{-1}(x_{12} + x_{22}s) d^*s \\
 &= \Gamma(\tau_1)\Gamma(\tau_2) \int_{K^*} \sigma_1(s)\tau_1^{-1}(x_{11}s + x_{21})\tau_2^{-1}(x_{12}s + x_{22}) d^*s \\
 &= \Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_2) \int_{K^*} \tau_2(t)\sigma_1^{-1}(x_{11} + x_{12}t)\sigma_2^{-1}(x_{21} + x_{22}t) d^*t \\
 &= \Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_2) \int_{K^*} \tau_1(t)\sigma_1^{-1}(x_{11}t + x_{12})\sigma_2^{-1}(x_{21}t + x_{22}) d^*t.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.2. Обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса. Определим обобщенную функцию Гаусса $G(\pi, z) = G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, z)$, где π_i — мультипликативные характеры на K , связанные соотношением $\prod \pi_i \equiv 1$, и $z \in K$, следующим равенством:

$$G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, z) = (\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1}))^{-1} \Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3^{-1}, \pi_4^{-1}, x), \text{ где } x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -z \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Таким образом, имеем, согласно (6.1) и (6.3):

$$\begin{aligned}
 G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, z) &= (\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1}))^{-1} \\
 &\quad \times \int_{(K^*)^3} \chi((1-s)t_1 + (1-zs)t_2) \pi_2(s) \pi_3^{-1}(t_1) \pi_4^{-1}(t_2) d^*s d^*t_1 d^*t_2;
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, z) = \int_{K^*} \pi_2(t) \pi_3(1-t) \pi_4(1-zt) d^*t. \tag{6.6}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Обобщенная гипергеометрическая функция $\Phi(\sigma, \tau, x)$ следующим образом выражается через функцию $G(\pi, \tau, z)$:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\sigma, \tau, x) &= \Gamma(\tau_1)\Gamma(\tau_2)\sigma_2\left(-\frac{x_{11}}{x_{21}}\right)\tau_1^{-1}(x_{11})\tau_2^{-1}(x_{12})G(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, z) \\
 &= \Gamma(\tau_1)\Gamma(\tau_2)\sigma_1\left(-\frac{x_{21}}{x_{11}}\right)\tau_1^{-1}(x_{21})\tau_2^{-1}(x_{22})G(\sigma_2, \sigma_1, \tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, 1/z) \\
 &= \Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_2)\sigma_1^{-1}(x_{11})\sigma_2^{-1}(x_{21})\tau_2\left(-\frac{x_{11}}{x_{12}}\right)G(\tau_1, \tau_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, z) \\
 &= \Gamma(\sigma_1)\Gamma(\sigma_2)\sigma_1^{-1}(x_{12})\sigma_2^{-1}(x_{22})\tau_1\left(-\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)G(\tau_2, \tau_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, 1/z),
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$zde z = \frac{x_{11}x_{22}}{x_{12}x_{21}}.$$

В самом деле, равенства (6.7) получаются из (6.3) соответственно подстановками $s \mapsto -\frac{x_{11}}{x_{21}}s$, $s \mapsto -\frac{x_{21}}{x_{11}}s$ и т. д.

СЛЕДСТВИЕ. Функция $G(\pi, z)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, z) &= (\pi_1 \pi_2)(-1)\pi_4(z)G(\pi_2, \pi_1, \pi_3, \pi_4, 1/z) \\ &= \frac{\Gamma(\pi_1)\Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1})}(\pi_2 \pi_4)(-1)G(\pi_3^{-1}, \pi_4^{-1}, \pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}, z) \\ &= \frac{\Gamma(\pi_1)\Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_3^{-1})}(\pi_2 \pi_3)(-1)\pi_2^{-1}(z)G(\pi_4^{-1}, \pi_3^{-1}, \pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}, 1/z). \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.3. Соотношения Куммера. Обозначим: $\pi^\sigma = (\pi_{\sigma(1)}, \pi_{\sigma(2)}, \pi_{\sigma(3)}, \pi_{\sigma(4)})$, где σ пробегает группу S_4 перестановок индексов 1, 2, 3 и 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Функция $G(\pi, z)$ удовлетворяет соотношениям

$$G(\pi, z) = (\pi_1 \pi_2)(-1)\pi_4(z)G\left(\pi^{\sigma_1}, \frac{1}{z}\right) \quad \text{при } \sigma_1 = (1, 2); \quad (6.9)$$

$$G(\pi, z) = \pi_2^{-1}(z)G\left(\pi^{\sigma_2}, \frac{1}{z}\right) \quad \text{при } \sigma_2 = (3, 4); \quad (6.10)$$

$$G(\pi, z) = \pi_4(1-z)G\left(\pi^{\sigma_3}, \frac{z}{z-1}\right) \quad \text{при } \sigma_3 = (2, 3). \quad (6.11)$$

В самом деле, (6.9) следует из (6.8). Равенства (6.10) и (6.11) получаются соответственно заменами переменной $t \mapsto t/z$ и $t \mapsto 1-t$ в интеграле (6.6).

СЛЕДСТВИЕ. Функция $G(\pi, z)$ удовлетворяет 24 соотношениям вида

$$G(\pi, z) = \mu_0^\sigma(-1)\mu_1^\sigma(z)\mu_2^\sigma(1-z)G(\pi^\sigma, u^\sigma(z)), \quad (6.12)$$

где μ_i^σ — мультипликативные характеры, зависящие от π и σ , а $u^\sigma(z)$ — одна из 6 функций: $z, 1/z, 1-z, (1-z)^{-1}, z/(z-1), (z-1)/z$.

В самом деле, так как перестановки σ_1, σ_2 и σ_3 порождают всю группу S_4 , то соотношения вида (6.12) имеют место для всех $\sigma \in S_4$. При этом $u^\sigma(z)$ есть одна из функций $z, 1/z, 1-z, (1-z)^{-1}, z/(z-1), (z-1)/z$, поскольку любая композиция преобразований $z \rightarrow 1/z$ и $z \rightarrow z/(z-1)$ переводит z в одну из этих функций.

Назовем полученные 24 соотношения для функции $G(\pi, z)$ соотношениями Куммера. Напомним, что классическими соотношениями Куммера называются четверки соотношений на 6 различных решениях дифференциального уравнения Гаусса [2]. Здесь 24 соотношения имеют место для одной и той же обобщенной функции $G(\pi, z)$.

Кроме соотношений Куммера, функция $G(\pi, z)$ удовлетворяет, согласно (6.8), также следующему соотношению:

$$G(\pi, z) = \frac{\Gamma(\pi_1)\Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1})}(\pi_2 \pi_4)(-1)G(\pi_3^{-1}, \pi_4^{-1}, \pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}, z). \quad (6.13)$$

Это соотношение, вместе с соотношениями Куммера, порождает 48 соотношений на функцию $G(\pi, z)$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Приведем другой вывод соотношений Куммера. Введем обобщенную функцию от $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, где $\prod \pi_i \equiv 1$, зависящую от (2×4) -матрицы u как от параметра:

$$\Psi(\pi, u) = \int_{K^*} \prod_{j=1}^4 \pi_j (u_{1j} + u_{2j}t) d^*t.$$

Очевидно, что

$$\Psi(\pi, u) = \Psi(\pi^\sigma, u^\sigma) \quad \text{для любой перестановки } \sigma \in S_4,$$

где u^σ получается из u перестановкой столбцов.

Функция Ψ удовлетворяет соотношению

$$\Psi(\pi, au) = |\det a|^{-1} \Psi(\pi, u) \quad \text{для любой матрицы } a \in GL(2, K).$$

Значит, ее можно выразить через функцию $\Phi(\pi, x)$, а тогда и через функцию $G(\pi, z)$. Поэтому из соотношений $\Psi(\pi, u) = \Psi(\pi^\sigma, u^\sigma)$ следуют 24 соотношения Куммера для функции G .

6.4. Преобразование Меллина функции $G(\pi, z)$. Поскольку характеры π_i связаны соотношением $\prod \pi_i \equiv 1$, будем в этом пункте писать $G(\pi_2, \pi_3, \pi_4, z)$ вместо $G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, z)$.

Согласно (6.5), функция

$$G_0(\pi_2, \pi_3, \pi_4, z) = \Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1})G(\pi_2, \pi_3, \pi_4, z)$$

является преобразованием Меллина следующей функции от $t, s_1, s_2 \subset K^*$, зависящей от $z \in K$ как от параметра:

$$F(t, s_1, s_2, z) = \chi((1-s)t_1 + (1-zs)t_2).$$

Будем рассматривать F как обобщенную функцию от 4 переменных — t_1, s_1, s_2, z , т.е. как линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}_4$.

Назовем преобразованием Меллина $\mathcal{M}G_0$ обобщенной функции G_0 преобразование Меллина по t, s_1, s_2, z функции F , т.е. формально

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}G_0(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \\ &= \int_{(K^*)^4} \chi((1-s)t_1 + (1-zs)t_2) \pi_1(z) \pi_2(s) \pi_3^{-1}(t_1) \pi_4^{-1}(t_2) d^*z d^*s d^*t_1 d^*t_2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Определим преобразование Меллина $\mathcal{M}G$ функции Гаусса $G(\pi_2, \pi_3, \pi_4, z)$ равенством

$$\mathcal{M}G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1}))^{-1} \mathcal{M}G_0(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Преобразование Меллина функции $G(\pi_2, \pi_3, \pi_4, z)$ имеет вид

$$\mathcal{M}G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = B(\pi_2 - \pi_1, \pi_3)B(\pi_1, \pi_4), \quad (6.15)$$

где B — бета-функция на Π , см. §1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся формальным вычислением. Выполнив в (6.14) интегрирование по t_1 и t_2 , получаем:

$$\mathcal{M}G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \int_{(K^*)^2} \pi_2(t)\pi_3(1-t)\pi_4(1-zt)\pi_1(z) d^*t d^*z.$$

Заменой переменной $z \mapsto t^{-1}z$ получаем равенство (6.15).

На основании формулы обращения для преобразования Меллина получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Обобщенная функция $G(\pi, z)$ представима в виде интеграла типа Меллина–Барнса:*

$$\begin{aligned} G(\pi, z) &= \int_{\Pi_0} \mathbf{B}(\pi_2 - \pi, \pi_3) \mathbf{B}(\pi, \pi_4) \pi^{-1}(z) d\pi \\ &= \Gamma(\pi_3) \Gamma(\pi_4) \int_{\Pi_0} \frac{\Gamma(\pi_2 - \pi) \Gamma(\pi)}{\Gamma(\pi_2 + \pi_3 - \pi) \Gamma(\pi_4 + \pi)} \pi^{-1}(z) d\pi; \end{aligned} \quad (6.16)$$

интегрирование – по подгруппе $\Pi_0 \subset \Pi$ унитарных характеров.

6.5. Случай $K = \mathbb{R}$; связь с гипергеометрической функцией Гаусса. При $K = \mathbb{R}$ характеры π имеют вид $\pi(t) = |t|^\lambda \text{sign}^\varepsilon(t)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а потому обобщенные функции Φ и G являются функциями от $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, где $\varepsilon = 0, 1$. Условимся писать $\Phi(\lambda, \varepsilon, x) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; x)$ и $G(\lambda, \varepsilon, z)$ вместо $\Phi(\pi_2, \pi_3^{-1}, \pi_4^{-1}, x)$ и $G(\pi_2, \pi_3, \pi_4, z)$ соответственно. Согласно определению,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \varepsilon, x) &= \Gamma(-\lambda_2, \varepsilon_2) \Gamma(-\lambda_3, \varepsilon_3) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^*} (\lambda_1, \varepsilon_1, t) (\lambda_2, \varepsilon_2, x_{11} + x_{21}t) (\lambda_3, \varepsilon_3, x_{12} + x_{22}t) d^*t, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$G(\lambda, \varepsilon, z) = \int_{\mathbb{R}^*} (\lambda_1, \varepsilon_1, t) (\lambda_2, \varepsilon_2, 1-t) (\lambda_3, \varepsilon_3, 1-zt) d^*t, \quad (6.18)$$

где $(\lambda_i, \varepsilon_i, t) = |t|^{\lambda_i} \text{sign}^{\varepsilon_i}(t)$.

Функция Φ выражается через G по формуле:

$$\Phi(\lambda, \varepsilon, x) = c(\lambda, \varepsilon, x) G\left(\lambda, \varepsilon, \frac{x_{11}x_{22}}{x_{12}x_{21}}\right), \quad (6.19)$$

где

$$c(\lambda, \varepsilon, x) = \Gamma(-\lambda_2, \varepsilon_2) \Gamma(-\lambda_3, \varepsilon_3) (\lambda_1, \varepsilon_1, -x_{11}/x_{21}) (\lambda_2, \varepsilon_2, x_{11}) (\lambda_3, \varepsilon_3, x_{12}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Обобщенные функции Φ и G удовлетворяют как функции соответственно от x и z следующим дифференциальным уравнениям:*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{11} \partial x_{22}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{12} \partial x_{21}}; \quad (6.20)$$

$$z(1-z) \frac{d^2 G}{dz^2} + [(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) - (\lambda_1 - \lambda_3)z] \frac{dG}{dz} + \lambda_1 \lambda_3 G = 0. \quad (6.21)$$

В самом деле, уравнение (6.20) следует непосредственно из (6.17). Уравнение (6.21) получается подстановкой в (6.20) выражения функции Φ через функцию G .

Уравнение (6.21) – гипергеометрическое уравнение Гаусса [2]. Отметим, что его коэффициенты не зависят от дискретного параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. При $|z| < 1$ классическая гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(a, b, c; z)$ следующим образом выражается через функцию $G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; z)$:

$$4 \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b, c; z) = G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 0, 0, 0; z) + G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 1, 0, 0; z) + G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 0, 1, 0; z) + G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 1, 1, 0; z), \quad (6.22)$$

где $a = -\lambda_3$, $b = \lambda_1$, $c = \lambda_1 + \lambda_2 + 1$.

В самом деле, правая часть в (6.22) равна

$$4 \int_{-\infty}^{\infty} t_+^{\lambda_1-1} (1-t)_+^{\lambda_2} |1-zt|^{\lambda_3} dt = 4 \int_0^1 t^{\lambda_1-1} (1-t)^{\lambda_2} (1-zt)^{\lambda_3} dt,$$

где $t_+^{\lambda_1} = t^{\lambda_1}$ при $t > 0$ и $t_+^{\lambda_1} = 0$ при $t < 0$. Поэтому (6.22) следует из интегрального представления функции ${}_2F_1(a, b, c, z)$ при $|z| < 1$ в виде эйлеровского интеграла:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. При $|z| < 1$ функция $G(\lambda, \varepsilon, z)$ представима в виде гипергеометрического ряда Гаусса:

$$G(\lambda, \varepsilon, z) = c_0(\lambda, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda_1 + n)\Gamma(-\lambda_3 + n)}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + n + 1)n!} z^n, \quad (6.23)$$

где

$$c_0(\lambda, \varepsilon) = \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(-\lambda_3)} B(\lambda_1, \varepsilon_1; \lambda_2, \varepsilon_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $G(\lambda, \varepsilon, z)$ удовлетворяет уравнению Гаусса (6.21) и регулярна в окрестности точки $z = 0$, то она совпадает, с точностью до множителя, с гипергеометрическим рядом Гаусса ${}_2F_1(-\lambda_3, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 + 1, z)$. Таким образом, справедливо равенство (6.23). Из этого равенства при $z = 0$ следует:

$$\frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(-\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)} c_0(\lambda, \varepsilon) = \int_{K^*} (\lambda_1, \varepsilon_1, t)(\lambda_2, \varepsilon_2, 1-t) d^*t = B(\lambda_1, \varepsilon_1; \lambda_2, \varepsilon_2).$$

Из соотношения Куммера (6.9) для G вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. При $|z| > 1$ функция $G(\lambda, \varepsilon, z)$ представима сходящимся рядом

$$G(\lambda, \varepsilon, z) = (-1)^{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} c'_0(\lambda, \varepsilon)(\lambda_3, \varepsilon_3, z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda'_1 + n) \Gamma(-\lambda_3 + n)}{\Gamma(\lambda'_1 + \lambda_2 + n + 1) n!} z^{-n}, \quad (6.24)$$

где $\lambda'_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, а $c'_0(\lambda, \varepsilon)$ получается из $c_0(\lambda, \varepsilon)$ заменой λ_1 на λ'_1 и ε_1 на $\varepsilon'_1 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

6.6. Случай $K = \mathbb{C}$. При $K = \mathbb{C}$ характеры π имеют вид: $\pi(t) = t^\lambda \bar{t}^\mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$, а потому Φ и G можно задавать как функции от $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \mu, x) &= \Gamma(-\lambda_2, -\mu_2) \Gamma(-\lambda_3, -\mu_3) \\ &\times \int_{\mathbb{C}^*} (\lambda_1, \mu_1, t) (\lambda_2, \mu_2, x_{11} + x_{21}t) (\lambda_3, \mu_3, x_{12} + x_{22}t) d^*t, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$G(\lambda, \mu, z) = \int_{\mathbb{C}^*} (\lambda_1, \mu_1, t) (\lambda_2, \mu_2, 1 - t) (\lambda_3, \mu_3, 1 - zt) d^*t, \quad (6.26)$$

где $(\lambda, \mu, t) = t^\lambda \bar{t}^\mu$.

Функция Φ выражается через G по формуле

$$\Phi(\lambda, \mu, x) = c(\lambda, \mu, x) G\left(\lambda, \mu, \frac{x_{11}x_{22}}{x_{12}x_{21}}\right), \quad (6.27)$$

где

$$c(\lambda, \mu, x) = \Gamma(-\lambda_2, -\mu_2) \Gamma(-\lambda_3, -\mu_3) (\lambda_1, \mu_1, -x_{11}/x_{21}) (\lambda_2, \mu_2, x_{11}) (\lambda_3, \mu_3, x_{12}).$$

Функции Φ и G удовлетворяют дифференциальным уравнениям (6.20), (6.21) и уравнениям, полученным из (6.20) и (6.21) заменой x_{ij} и z на комплексно сопряженные.

По аналогии со случаем $K = \mathbb{R}$ получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. В области $|z| < 1$ функция $G(\lambda, \mu, z)$ представима в виде произведения двух гипергеометрических рядов Гаусса:

$$\begin{aligned} G(\lambda, \mu, z) &= c_0(\lambda, \mu) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda_1 + m) \Gamma(-\lambda_3 + m)}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + m + 1) m!} x^m \right) \\ &\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu_1 + n) \Gamma(-\mu_3 + n)}{\Gamma(\mu_1 + \mu_2 + n + 1) n!} \bar{x}^n \right), \end{aligned} \quad (6.28)$$

где

$$c_0(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \Gamma(\mu_1 + \mu_2 + 1)}{\Gamma(\lambda_1) \Gamma(-\lambda_3) \Gamma(\mu_1) \Gamma(-\mu_3)} B(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2),$$

$\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция Эйлера.

Из соотношения Куммера (6.9) для G вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. В области $|z| > 1$ функцию $G(\lambda, \mu, z)$ можно представить в виде произведения двух сходящихся рядов:

$$G(\lambda, \mu, z) = (-1)^{\lambda_2 + \lambda_3 - \mu_2 - \mu_3} c'_0(\lambda, \mu)(\lambda_3, \mu_3, z) \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda'_1 + m) \Gamma(-\lambda_3 + m)}{\Gamma(\lambda'_1 + \lambda_2 + n + 1) m!} z^{-m} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu'_1 + n) \Gamma(-\mu_3 + n)}{\Gamma(\mu'_1 + \mu_2 + n + 1) n!} \bar{z}^{-n} \right), \quad (6.29)$$

где $\lambda'_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, $\mu'_1 = -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3$, а $c'_0(\lambda, \mu)$ получается из $c_0(\lambda, \mu)$ заменой λ_1 на λ'_1 и μ_1 на μ'_1 .

6.7. Случай неархимедова поля K . Положим

$$\pi_i(\wp^k t) = \lambda_i^k \theta_i(t), \quad |t| = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

и представим функцию $G(\pi, z) = G(\lambda, \theta, z)$ в виде суммы лорановского ряда

$$G(\lambda, \theta, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_1^k g(k, k + n, \pi, y) \quad \text{при } z = \wp^n y, \quad (6.30)$$

где

$$g(k, l, \pi, y) = \int_{\mathcal{O}^*} \theta_1(t) \pi_2(1 - \wp^k t) \pi_3(1 - \wp^l y t) dt. \quad (6.31)$$

Определим регуляризацию ряда (6.30). Не нарушая общности, можно предполагать, что $|z| \leq 1$, т.е. $n \geq 0$. Случай $|z| > 1$ сводится к этому на основании соотношения Куммера (6.9).

Обозначим:

$$\text{rank } \theta_2 = r_2, \quad \text{rank } \theta_3 = r_3, \quad \max(r_2, r_3) = r.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Функция $g(k, l, \pi, y)$ имеет вид:

$$\frac{g(k, l, \pi, y)}{1 - q^{-1}} = \begin{cases} 1 & \text{при } k \geq r, l \geq r \text{ и } \theta_1 \equiv 1; \\ 0 & \text{при } k \geq r, l \geq r \text{ и } \theta_1 \not\equiv 1; \\ \lambda_2^k \theta_2(-1) & \text{при } k \leq -r, l \geq r \text{ и } \theta_1 \theta_2 \equiv 1; \\ 0 & \text{при } k \leq -r, l \geq r \text{ и } \theta_1 \theta_2 \not\equiv 1; \\ \lambda_3^k \theta_3(-y) & \text{при } k \geq r, l \leq -r \text{ и } \theta_1 \theta_3 \equiv 1; \\ 0 & \text{при } k \geq r, l \leq -r \text{ и } \theta_1 \theta_3 \not\equiv 1; \\ \lambda_2^k \lambda_3^k \theta_2(-1) \theta_3(-y) & \text{при } k \leq -r, l \leq -r \text{ и } \theta_1 \theta_2 \theta_3 \equiv 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции g следует, что

$$g(k, l, \pi, y) = \int_{|t|=1} \theta_1(t) \theta_2(1 - \wp^k t) \theta_3(1 - \wp^l y t) dt$$

при $k > 0, l > 0$;

$$g(k, l, \pi, y) = \lambda_2^k \theta_2(-1) \times \int_{|t|=1} (\theta_1 \theta_2)(t) \theta_2(1 - \wp^{-k} t^{-1}) \theta_3(1 - \wp^l y t) dt$$

при $k < 0, l > 0$;

$$g(k, l, \pi, y) = \lambda_3^k \theta_3(-y) \int_{|t|=1} (\theta_1 \theta_3)(t) \theta_2(1 - \wp^k t) \theta_3(1 - \wp^{-l} y^{-1} t^{-1}) dt$$

при $k > 0, l < 0$;

$$g(k, l, \pi, y) = \lambda_2^k \lambda_3^k \theta_2(-1) \theta_3(-y) \times \int_{|t|=1} (\theta_1 \theta_2 \theta_3)(t) \theta_2(1 - \wp^{-k} t^{-1}) \theta_3(1 - \wp^{-l} y^{-1} t^{-1}) dt$$

при $k < 0, l < 0$. Предложение вытекает из этих формул.

Представим ряд (6.30) в виде суммы

$$G(\pi, \wp^n y) = \sum_{k=-r-n-1}^{r-1} \lambda_1^k g(k, k+n, \pi, y) + G_-(\pi, \wp^n y) + G_+(\pi, \wp^n y), \quad (6.32)$$

где

$$G_-(\pi, \wp^n y) = \sum_{k \leq -r-n} \lambda_1^k g(k, k+n, \pi, y), \quad G_+(\pi, \wp^n y) = \sum_{k \geq r} \lambda_1^k g(k, k+n, \pi, y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. При $n \geq 0$ регуляризация функции $G(\pi, \wp^n y)$ имеет вид (6.32), где

$$G_+(\pi, \wp^n y) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta_1 \neq 1, \\ (1 - q^{-1}) \frac{\lambda_1^r}{1 - \lambda_1} & \text{при } \theta_1 \equiv 1, \end{cases} \quad (6.33)$$

$$G_-(\pi, \wp^n y) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta_1 \theta_2 \theta_3 \neq 1, \\ (1 - q^{-1}) \theta_2(-1) \theta_3(-y) \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^{-k-n}}{1 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}} & \text{при } \theta_1 \theta_2 \theta_3 \equiv 1. \end{cases} \quad (6.34)$$

В самом деле, из предложения 6.8 следует, что $G_+(\pi, \wp^n y) = 0$ при $\theta_1 \neq 1$ и $G_+(\pi, \wp^n y) = (1 - q^{-1}) \sum_{k \geq r} \lambda_1^k$ при $\theta_1 \equiv 1$. Таким образом, регуляризация G_+ задается формулой (6.33). Аналогично на основании предложения 6.8 убеждаемся, что регуляризация G_- задается формулой (6.34).

Глава II.
Гипергеометрические
функции над конечным полем

§ 7. Исходные определения и формулы

7.1. Основные обозначения.

$F = F_q$ – конечное поле порядка $q = p^n$, где p – простое число, $p \neq 2$.

$\chi \neq 1$ – фиксированный аддитивный характер на F .

$P = F \setminus 0$ – мультипликативная группа поля F (циклическая группа порядка $q-1$).

Π – группа характеров π на P . Предполагается, что характеры π продолжены с P на все поле F равенством $\pi(0) = 0$.

$\varepsilon \in \Pi$ – единственный мультипликативный характер.

$\eta \in \Pi$ – квадратичный мультипликативный характер ($\eta^2 = \varepsilon$).

$\delta(x), \delta(\pi)$ – функции соответственно на F и Π , определенные равенствами

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0; \end{cases} \quad \delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \pi = \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \pi \neq \varepsilon. \end{cases}$$

7.2. Соотношения для мультипликативных характеров. (Здесь и далее см., например, [13].) Характеры $\pi \in \Pi$ удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{t \in P} \pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \pi \neq \varepsilon, \\ q-1 & \text{при } \pi = \varepsilon. \end{cases}$$

7.3. Преобразование Меллина $\mathcal{M}$ комплекснозначных функций на P . Определение:

$$(\mathcal{M}f)(\pi) = \sum_{t \in P} f(t)\pi(t), \quad \pi \in \Pi.$$

Формула обращения:

$$f(t) = (q-1)^{-1} \sum_{\pi \in \Pi} (\mathcal{M}f)(\pi)\pi^{-1}(t), \quad t \in P.$$

7.4. Гамма-функция (сумма Гаусса) $\Gamma(\pi)$ на Π . Определение:

$$\Gamma(\pi) = \sum_{t \in P} \chi(t)\pi(t), \quad \pi \in \Pi. \quad (7.1)$$

Соотношения: $\Gamma(\varepsilon) = -1$;

$$\Gamma(\pi)\Gamma(\pi^{-1}) = q\pi(-1), \quad |\Gamma(\pi)| = q^{1/2} \quad \text{при } \pi \neq \varepsilon.$$

Формула удвоения:

$$\Gamma(\pi^2) = \pi(4)\Gamma^{-1}(\eta)\Gamma(\pi)\Gamma(\pi\eta). \quad (7.2)$$

7.5. Разложение аддитивного характера χ по мультипликативным характеристам. Имеет место равенство

$$\chi(t) = (q-1)^{-1} \sum_{\pi \in \Pi} \Gamma(\pi) \pi^{-1}(t), \quad t \in P. \quad (7.3)$$

7.6. Бета-функция на Π^2 (сумма Якоби). Определение:

$$B(\pi_1, \pi_2) = \sum_{t \in F} \pi_1(t) \pi_2(1-t).$$

Выражение через гамма-функцию:

$$\begin{aligned} B(\pi_1, \pi_2) &= \frac{\Gamma(\pi_1) \Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_1 \pi_2)} + (q-1) \pi_1(-1) \delta(\pi_1 \pi_2) \\ &= \frac{1}{q} \Gamma(\pi_1) \Gamma(\pi_2) \Gamma(\pi_1^{-1} \pi_2^{-1}) (\pi_1 \pi_2)(-1) + q^{-1} (q-1)^2 \delta(\pi_1) \delta(\pi_2). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Обобщение на случай $k > 2$ характеров:

$$B(\pi_1, \dots, \pi_k) = \sum_{t_1 + \dots + t_k = 1} \pi_1(t_1) \cdots \pi_k(t_k).$$

Выражение через гамма-функцию:

$$B(\pi_1, \dots, \pi_k) = \frac{\Gamma(\pi_1) \cdots \Gamma(\pi_k)}{\Gamma(\pi_1 \cdots \pi_k)} \quad \text{при} \quad \pi_1 \cdots \pi_k \neq \varepsilon.$$

7.7. Биномиальная формула. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \pi(1+x) &= \delta(x) + (q-1)^{-1} \sum_{\sigma \in \Pi} B(\pi, \sigma^{-1}) \sigma(-x) \\ &= \delta(x) + q^{-1} (q-1)^{-1} \Gamma(\pi) \pi(-1) \sum_{\sigma \in \Pi} \Gamma(\sigma^{-1}) \Gamma(\pi^{-1} \sigma) \sigma(x) \\ &\quad + q^{-1} (q-1) \delta(\pi) \pi(x). \end{aligned} \quad (7.5)$$

7.8. Группы P^n и Π^n . Через P^n и Π^n обозначаются прямые произведения n мультипликативных групп P и Π , т.е. последовательности

$$t = (t_1, \dots, t_n), \quad t_i \in P, \quad \text{и} \quad \pi = (\pi_1, \dots, \pi_n), \quad \pi_i \in \Pi,$$

с покомпонентным умножением. Обозначим для любых $t \in P^n$ и $\pi \in \Pi^n$

$$\pi(t) = \pi_1(t_1) \cdots \pi_n(t_n).$$

Каждой $(n \times N)$ -матрице $\omega = \|\omega_{ij}\|$ с элементами из кольца $\mathbb{Z}_{q-1} = \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ ставятся в соответствие гомоморфизмы групп:

$$\omega: P^n \rightarrow P^N \quad \text{и} \quad \omega: \Pi^N \rightarrow \Pi^n.$$

По определению если $t = (t_1, \dots, t_n) \in P^n$ и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Pi^N$, то $t\omega \in P^n$ и $\omega\tau \in \Pi^n$ – элементы с координатами

$$(t^\omega)_j = t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}}, \quad j = 1, \dots, N,$$

и соответственно

$$(\omega\tau)_i = \tau_1^{\omega_{i1}} \dots \tau_N^{\omega_{iN}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что

$$(\omega\tau)(t) = \tau(t\omega) \quad \text{для любых } t \in P^n, \quad \tau \in \Pi^N.$$

В частности, квадратной n -матрице ω отвечают гомоморфизмы $P^n \rightarrow P^n$ и $\Pi^n \rightarrow \Pi^n$. Обозначим через $GL(n, \mathbb{Z}_{q-1})$ группу всех обратимых n -матриц над кольцом $\mathbb{Z}_{q-1}$.

Матрица ω размера $n \times N$ над кольцом $\mathbb{Z}_{q-1}$, где $N \geq n$, называется невырожденной, если отвечающее ей отображение $\Pi^N \rightarrow \Pi^n$ сюръективно. Очевидно, ω невырождена тогда и только тогда, когда ее миноры порядка n порождают кольцо $\mathbb{Z}_{q-1}$.

§ 8. Общие гипергеометрические функции

8.1. Определение. Пусть n и $N \geq n$ – произвольные натуральные числа и $\omega = \|\omega_{ij}\|$ – матрица размера $n \times N$ с элементами из кольца вычетов $\mathbb{Z}_{q-1}$.

Назовем общей гипергеометрической функцией (ОГФ), ассоциированной с матрицей ω , следующую функцию $\Phi(\pi, x, \omega) = \Phi(\pi_1, \dots, \pi_n, x_1, \dots, x_N, \omega)$ на $\Pi^n \times P^N$:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = \sum_{t \in P^n} \left(\chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) \prod_{i=1}^n \pi_i(t_i) \right). \quad (8.1)$$

В короткой записи:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = \sum_{t \in P^n} \chi \left(\sum_{j=1}^N \chi(x_j(t\omega)_j) \right) \pi(t).$$

Поскольку χ – аналог экспоненты, мы будем называть (8.1) *экспоненциальной суммой*. Иногда вместо $\Phi(\pi, x, \omega)$ будем писать короче: $\Phi(\pi, x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположение, что $x \in P^N$, т.е. $x_j \neq 0$ для всех j , связано с тем, что при $x_j = 0$ функция Φ сводится к ОГФ, ассоциированной с $n \times (N-1)$ -матрицей, получающейся из ω вычеркиванием j -го столбца.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определение ОГФ можно обобщить, предположив, что χ – характер на конечном расширении $\tilde{K}$ поля K , а x_i – элементы из мультипликативной группы $\tilde{P} = \tilde{K} \setminus 0$. Тогда Φ является функцией на $\Pi^n \times \tilde{K}^N$.

8.2. Основные соотношения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Функция $\Phi(\pi, x, \omega)$ удовлетворяет условию однородности

$$\Phi(\pi, (\lambda\omega)x, \omega) = \pi^{-1}(\lambda)\Phi(\pi, x, \omega) \quad \text{для любого } \lambda \in P^n, \quad (8.2)$$

где $(\lambda\omega)x$ – вектор с координатами $(\lambda\omega)_j x_j$.

В самом деле, равенство (8.2) получается подстановкой $t_i \rightarrow \lambda_i t_i$, $i = 1, \dots, n$, в (8.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Для любой перестановки σ индексов $1, \dots, N$ имеем:

$$\Phi(\pi, x^\sigma, \omega^\sigma) = \Phi(\pi, x, \omega), \quad (8.3)$$

где x^σ и ω^σ получаются из x и ω перестановкой σ соответственно координат x_j вектора x и столбцов ω_j матрицы ω .

Соотношения (8.3) будем называть соотношениями Куммера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Для любой квадратной матрицы $a = \|a_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_{q-1})$ имеем:

$$\Phi(a\pi, x, a\omega) = \Phi(\pi, x, \omega). \quad (8.4)$$

В частности, функция Φ инвариантна относительно любой одновременной перестановки координат вектора π и строк матрицы ω .

В самом деле, (8.4) получается из (8.1) преобразованием $t \rightarrow ta$, являющимся автоморфизмом P^n .

СЛЕДСТВИЕ. При $n \leq N$ ОГФ Φ может быть сведена композицией преобразований $(x, \omega) \rightarrow (x^\sigma, \omega^\sigma)$ и $(\pi, \omega) \rightarrow (a\pi, a\omega)$ к ОГФ, ассоциированной с матрицей ω , у которой $\omega_{ij} = 0$ при $i > j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Если ω_i, ω^j — матрицы, полученные из ω отбрасыванием соответственно i -й строки и j -го столбца, то ОГФ $\Phi(\pi, x, \omega)$ выражается через ОГФ, ассоциированные с ω_i и ω^j , по формулам

$$\begin{aligned} \Phi(\pi_1, \dots, \pi_n, x_1, \dots, x_N, \omega) &= \sum_{t \in P} \Phi(\pi_1, \dots, \hat{\pi}_i, \dots, \pi_n, x_1 t^{\omega_{i1}}, \dots, x_N t^{\omega_{iN}}, \omega_i) \pi_i(t); \\ \Phi(\pi_1, \dots, \pi_n, x_1, \dots, x_N, \omega) &= (q-1)^{-1} \sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\tau) \tau^{-1}(x_j) \Phi(\pi_1 \tau^{-\omega_{1j}}, \dots, \pi_n \tau^{-\omega_{nj}}, x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_N, \omega^j) \end{aligned}$$

при $\pi_j \neq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство очевидно. Чтобы получить второе равенство, достаточно в выражении для $\Phi(\pi, x, \omega)$ разложить множитель $\chi(x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}})$ по мультипликативным характеристам согласно (7.3).

СЛЕДСТВИЕ. Для любого подмножества $I \subset [1, N]$, $\#I = N_1$, ОГФ $\Phi(\pi, x, \omega)$, ассоциированная с матрицей ω размера $n \times N$, представима в виде:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{N_1-N} \sum_{\tau_j; j \in J} \left(\left(\prod_{j \in J} \Gamma(\tau_j) \tau_j^{-1}(x_j) \right) \Phi(\pi', x_I, \omega_I) \right), \quad (8.5)$$

где $J = [1, N] \setminus I$. Здесь обозначено: x_I — N_1 -вектор с координатами x_i , $i \in I$; ω_I — матрица из столбцов ω_i матрицы ω с номерами $i \in I$; $\pi'_i = \pi_i \prod_{j \in J} \tau_j^{-\omega_{ij}}$, $i = 1, \dots, n$.

8.3. Представление в форме гипергеометрической суммы. Обозначим для любого $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Pi^N$:

$$\Gamma_N(\sigma) = \prod_{j=1}^N \Gamma(\sigma_j).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. Если π принадлежит образу отображения $\omega: \Pi^N \rightarrow \Pi^n$, то

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{n-N} \sum_{\omega\tau=\pi} \Gamma_N(\tau) \tau^{-1}(x). \quad (8.6)$$

В противном случае $\Phi(\pi, x, \omega) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим каждый сомножитель $\chi(x_j(t\omega)_j)$ по мультипликативным характеристам согласно (7.3). Мы получим:

$$\chi\left(\sum_{j=1}^N x_j(\omega\tau)_j\right) = (q-1)^{-N} \sum_{\tau \in \Pi^N} \tau^{-1}(x) \Gamma_N(\tau) \tau^{-1}(t\omega).$$

Следовательно,

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{-N} \sum_{\tau, t} \tau^{-1}(x) \Gamma_N(\tau) (\pi - \omega\tau)(t).$$

Суммируя по $t \in P^n$, получаем утверждение.

Назовем выражение (8.6) гипергеометрической суммой, ассоциированной с матрицей ω .

8.4. Примеры.

8.4.1. Случай $n = N = 1$, $\omega = k$ — обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}_{q-1}$. Функция Φ на $\Pi \times P$ задается равенством

$$\Phi(\pi, x, k) = \sum_{t \in P} \chi(xt^k) \pi(t).$$

Если $l \in \mathbb{Z}_{q-1}$ — элемент, обратный к k , то, согласно предложению 8.3,

$$\Phi(\pi, x, k) = \Phi(\pi^l, x, 1) = \Gamma(\pi^l) \pi^{-l}(x).$$

8.4.2. Случай $n = 1$, $N = 2$, $\omega = (1, 1)$. Функция Φ на $\Pi \times P^2$ задается равенством

$$\Phi(\pi, x) = \sum_{t \in P} \chi((x_1 + x_2)t) \pi(t).$$

Из предложения 8.5 следует, что

$$\Phi(\pi, x) = (q-1)^{-1} \sum_{\sigma_1 \sigma_2 = \pi} \Gamma(\sigma_1) \Gamma(\sigma_2) \sigma_1^{-1}(x_1) \sigma_2^{-1}(x_2).$$

С другой стороны, при $\pi \neq \varepsilon$ имеем:

$$\Phi(\pi, x) = \Gamma(\pi) \pi^{-1}(x_1 + x_2).$$

Сравнивая эти равенства и заменяя π на π^{-1} , получаем аналог формулы бинома Ньютона:

$$\pi(x_1 + x_2) = (q - 1)^{-1} \sum_{\sigma_1 \sigma_2 = \pi} \frac{\Gamma(\sigma_1^{-1})\Gamma(\sigma_2^{-1})}{\Gamma(\pi^{-1})} \sigma_1(x_1)\sigma_2(x_2) \quad \text{при } \pi \neq \varepsilon.$$

8.4.3. Случай $n = 1, N = 2, \omega = (1, -1)$. Функция Φ задается равенством

$$\Phi(\pi, x) = \sum_{t \in P} \chi(x_1 t + x_2 t^{-1}) \pi(t).$$

Из предложения 8.5 следует, что

$$\begin{aligned} \Phi(\pi, x) &= (q - 1)^{-1} \sum_{\sigma_1 \sigma_2^{-1} = \pi} \Gamma(\sigma_1) \Gamma(\sigma_2) \sigma_1^{-1}(x_1) \sigma_2^{-1}(x_2) \\ &= (q - 1)^{-1} \pi(x_2) \sum_{\sigma \in \Pi} \Gamma(\sigma) \Gamma(\pi^{-1} \sigma) \sigma^{-1}(x_1 x_2). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $J(\pi, t) = \sum_{\sigma \in \Pi} \Gamma(\sigma) \Gamma(\pi^{-1} \sigma) \sigma^{-1}(t)$ есть аналог функции Бесселя.

8.5. ОГФ, ассоциированные с квадратными матрицами. Обозначим через $\Gamma_n(\pi, x, \omega)$ ОГФ, ассоциированную с квадратной невырожденной матрицей ω порядка n :

$$\Gamma_n(\pi, x, \omega) = \sum_{t \in P^n} \left(\chi \left(\sum_{j=1}^n x_j (t\omega)_j \right) \pi(t) \right). \quad (8.7)$$

Из предложения 8.5 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. Функция $\Gamma_n(\pi, x, \omega)$ отлична от нуля только на подгруппе $\omega\Pi^n \subset \Pi^n$. На этой подгруппе она представима в виде гипергеометрической суммы

$$\Gamma_n(\pi, x, \omega) = \sum_{\omega\tau = \pi} \Gamma_N(\tau) \tau^{-1}(x). \quad (8.8)$$

Частные случаи. 1) Если $\det \omega = \pm 1$, то

$$\Gamma_n(\omega\tau, x, \omega) = \Gamma_n(\tau) \tau^{-1}(x).$$

В частности, если $\omega = e$ — единичная матрица, то

$$\Gamma_n(\pi, x, e) = \Gamma_n(\pi) \pi^{-1}(x).$$

2) Если $\omega = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$, то Γ_n отлична от нуля только на подгруппе характеров вида $\tau^k = (\tau_1^{k_1}, \dots, \tau_n^{k_n})$ и

$$\Gamma_n(\tau^k, x, \omega) = \prod_{i=1}^n \Gamma(\tau_i, x_i, k_i).$$

Выражение для $\Gamma(\tau_i, x_i, k_i)$ см. в п. 8.4.

Из следствия к предложению 8.4 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.7. При $N > n$ с каждым n -элементным подмножеством $I \subset [1, N]$ связано выражение ОГФ $\Phi(\pi, x, \omega)$, ассоциированной с $(n \times N)$ -матрицей ω , через ОГФ, ассоциированную с квадратной n -матрицей:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{n-N} \sum_{\tau_j, j \notin I} \left(\Gamma_n(\pi', x_I, \omega_I) \prod_{j \notin I} \Gamma(\tau_j) \tau_j^{-1}(x_j) \right). \quad (8.9)$$

(Обозначения те же, что в формуле (8.5).)

§9. Общие гипергеометрические функции для случая $n = 1$

9.1. Представление в виде суммы. При $n = 1$ ОГФ задается N -вектором $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ и имеет вид:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = \sum_{t \in P} \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t^{\omega_j} \right) \pi(t). \quad (9.1)$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что все координаты $\omega_j \in \mathbb{Z}_{q-1}$ отличны от нуля.

Из предложения 8.5 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Функция Φ отлична от нуля только на образе отображения $\omega: \Pi^N \rightarrow \Pi$, т.е. на подгруппе характеров вида $\pi = \omega\tau = \tau_1^{\omega_1} \dots \tau_N^{\omega_N}$, и на этой подгруппе она представима в виде гипергеометрической суммы:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{1-N} \sum_{\tau_1^{\omega_1} \dots \tau_N^{\omega_N} = \pi} \Gamma_N(\tau) \tau^{-1}(x). \quad (9.2)$$

9.2. Функция $\Gamma(\pi, x, k)$. При $n = N = 1$ ОГФ задается одним числом $k \pmod{(q-1)}$, и мы обозначим ее через $\Gamma(\pi, x, k)$. По определению

$$\Gamma(\pi, x, k) = \sum_{t \in P} \chi(xt^k) \pi(t), \quad x \in P.$$

В частности,

$$\Gamma(\pi, x, 1) = \Gamma(\pi) \pi^{-1}(x).$$

В случае, когда $k \in \mathbb{Z}_{q-1}$ — обратимый элемент и l — элемент, обратный к k , имеем $\Gamma(\pi, x, k) = \Gamma(\pi^l, x, 1) = \Gamma(\pi^l) \pi^{-l}(x)$.

В общем случае функция $\Gamma(\pi, x, k)$ отлична от нуля только на подгруппе характеров вида $\pi = \tau^k$, т.е. на циклической подгруппе в Π порядка $(q-1)/r$, где $r = \text{НОД}(q-1, k)$. На этой подгруппе она представима в виде гипергеометрической суммы:

$$\Gamma(\pi, x, k) = \sum_{\tau^k = \pi} \Gamma(\tau) \tau^{-1}(x).$$

Заметим, что выражение для Γ можно также представить в виде

$$\Gamma(\tau^k, x, k) = \tau^{-1}(x) \sum_{m=0}^{r-1} \Gamma(\tau \tau_0^m) (\tau \tau_0^m)^{-1}(x),$$

где $\tau_0 \in \Pi$ – произвольный фиксированный элемент порядка r . В частности, если $r = 2$, то

$$\Gamma(\tau^k, x, k) = \tau^{-1}(x)(\Gamma(\tau) + \Gamma(\tau\eta)\eta(x)).$$

9.3. Выражение ОГФ при произвольном N через функцию $\Gamma(\pi, x, k)$. Из предложения 8.7 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Для любого $i = 1, \dots, N$ функция Φ следующим образом выражается через функцию $\Gamma(\pi, x, k)$:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{1-N} \sum_{\tau_j; j \neq i} \left(\Gamma \left(\pi \prod_{j \neq i} \tau^{-\omega_j}, x_i, \omega_i \right) \prod_{j \neq i} \Gamma(\tau_j) \tau_j^{-1}(x_j) \right). \quad (9.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. Если ω_i – обратимый элемент в $\mathbb{Z}_{q-1}$, $\omega_i = l^{-1}$, то

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{1-N} \pi^{-l}(x_i) \sum_{\tau_j; j \neq i} \left(\Gamma \left(\pi^l \prod_{j \neq i} \tau_j^{-l\omega_j} \right) \prod_{j \neq i} \Gamma(\tau_j) \tau_j^{-1}(y_j) \right), \quad (9.4)$$

где $y_j = x_j x_i^{-l\omega_j}$.

В самом деле, если $\omega_i = l^{-1}$, то

$$\Gamma \left(\pi \prod_{j \neq i} \tau^{-\omega_j}, x_i, \omega_i \right) = \Gamma \left(\pi^l \prod_{j \neq i} \tau_j^{-l\omega_j} \right) \pi^{-l}(x_i) \prod_{j \neq i} \tau_j(x_i^{l\omega_j}).$$

Подставив это выражение в (9.3), получаем (9.4).

ПРИМЕР. Если $\omega_N = 1$, то

$$\Phi(\pi, x, \omega) = (q-1)^{1-N} \pi^{-1}(x_N) \sum_{\tau_1, \dots, \tau_{N-1}} \left(\Gamma \left(\pi \prod_{j=1}^{N-1} \tau^{-\omega_j} \right) \prod_{j=1}^{N-1} \Gamma(\tau_j) \tau_j^{-1}(x_j x_N^{-\omega_j}) \right).$$

9.4. Обобщение биномиальной формулы. Рассмотрим ОГФ, ассоциированную с N -вектором $\omega = (1, \dots, 1)$:

$$\Phi(\pi, x) = \sum_{t \in P} \chi((x_1 + \dots + x_N)t) \pi(t). \quad (9.5)$$

С одной стороны, при $x_1 \cdots x_N \neq 0$ она представима в виде гипергеометрической суммы:

$$\Phi(\pi, x) = (q-1)^{1-N} \sum_{\tau_1 \cdots \tau_N = \pi} \Gamma_N(\tau) \tau^{-1}(x). \quad (9.6)$$

С другой стороны, из (9.5) следует, что

$$\Phi(\pi, x) = \Gamma(\pi) \pi^{-1}(x_1 + \dots + x_N) \quad (9.7)$$

при $\pi \neq \varepsilon$ и $x_1 + \dots + x_N \neq 0$. Сравнив полученные выражения для Φ и заменив π на π^{-1} , получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. При $\pi \neq \varepsilon$, $x_1 \cdots x_N \neq 0$ и $x_1 + \cdots + x_N \neq 0$ имеем:

$$\pi(x_1 + \cdots + x_N) = (q-1)^{1-N} \Gamma^{-1}(\pi^{-1}) \sum_{\tau_1 \cdots \tau_N = \pi} \Gamma_N(\tau^{-1}) \tau(x), \quad (9.8)$$

где $\tau(x) = \prod_{j=1}^N \tau_j(x_j)$ и $\Gamma_N(\tau^{-1}) = \prod_{j=1}^N \Gamma(\tau_j^{-1})$.

9.5. Представление ОГФ через образующий элемент группы Π . Фиксируем образующий элемент π_0 в группе характеров Π и условимся писать $\Gamma(s)$ вместо $\Gamma(\pi_0^s)$ для любого $s \in \mathbb{Z}_{q-1}$.

В случае, когда вектор $\omega \in (\mathbb{Z}_{q-1})^N$ невырожден, существуют $s_1, \dots, s_N \in \mathbb{Z}_{q-1}$ такие, что $s_1 \omega_1 + \cdots + s_N \omega_N = 1$. Следовательно, $\pi_0 = \tau^\omega$, где $\tau = (\pi_0^{s_1}, \dots, \pi_0^{s_N})$. Таким образом, если $\pi = \pi_0^a$, то в принятых обозначениях имеем:

$$\Phi(\pi, x, \omega) = \Phi(\pi_0^a, x, \omega) = (q-1)^{1-N} \tau^{-a}(x) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_N \\ r\omega=0}} \left(\prod_{j=1}^N \Gamma(as_j + r_j) \pi_0^{-r_j}(x_j) \right), \quad (9.9)$$

сумма берется по всем наборам элементов $r_j \in \mathbb{Z}_{q-1}$, удовлетворяющим соотношению $r\omega = r_1 \omega_1 + \cdots + r_N \omega_N = 0$.

Если вектор ω вырожден, то $\omega = k \omega'$, где ω' – невырожденный вектор, а $k \in \mathbb{Z}_{q-1}$ – делитель нуля. В этом случае функция Φ отлична от нуля только на множестве характеров $\pi = \pi_0^a$, где $a = ka'$, и на этом множестве она по-прежнему задается равенством (9.9).

§ 10. Общие гипергеометрические функции для случая $N = n + 1$

10.1. Функция $F(\pi, x, k)$. При $N = n + 1$ будем представлять $(n \times N)$ -матрицы ω в блочной форме: $\omega = (a, k)$, где a – квадратная n -матрица, а $k = (k_1, \dots, k_n)$ – вектор-столбец.

Положим

$$F(\pi, x, k) = \Phi(\pi, x, (e, k)), \quad \pi \in \Pi^n, \quad x \in P^{n+1}, \quad (10.1)$$

где e – единичная n -матрица, а $\Phi(\pi, x, (e, k))$ – ОГФ, ассоциированная с $n \times (n + 1)$ матрицей $\omega = (e, k)$. Если ω – любая $n \times (n + 1)$ -матрица, у которой хотя бы один из миноров порядка n принадлежит $GL(n, \mathbb{Z}_{q-1})$, то ассоциированная с ней ОГФ может быть выражена через функцию F . В частности, если $\omega = (a, k)$, где $a \in GL(n, \mathbb{Z}_{q-1})$, то

$$\Phi(\pi, x, (a, k)) = F(a^{-1}\pi, x, a^{-1}k).$$

В дальнейшем вместо ОГФ Φ будем рассматривать функцию F .

На основании § 8 получаем следующие утверждения:

1) представление функции F в форме экспоненциальной суммы:

$$F(\pi, x, k) = \sum_{t \in P^n} \chi \left(\sum_{j=1}^n x_j t_j + x_{n+1} t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} \right) \pi(t); \quad (10.2)$$

2) представление функции F в форме гипергеометрической суммы:

$$F(\pi, x, k) = (q-1)^{-1} \prod_{i=1}^n \pi_i^{-1}(x_i) \sum_{\tau \in \Pi} \left(\left(\prod_{i=1}^n \Gamma(\pi_i \tau^{k_i}) \right) \Gamma(\tau^{-1}) \tau(x_1^{-k_1} \cdots x_n^{-k_n} x_{n+1}) \right). \quad (10.3)$$

10.2. Приведенная гипергеометрическая функция и функции Похгаммера. Назовем приведенной гипергеометрической функцией функцию $\mathcal{F}(\pi, \zeta, k)$, полученную из $F(\pi, x, k)$ подстановкой $x_i = 1$ при $i \leq n$, $x_{n+1} = \zeta$:

$$\mathcal{F}(\pi, \zeta, k) = \sum_{t \in P^n} \chi \left(\sum_{j=1}^n t_j + \zeta t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} \right) \pi(t) \quad (10.4)$$

$$= (q-1)^{-1} \sum_{\tau \in \Pi} \left(\left(\prod_{i=1}^n \Gamma(\pi_i \tau^{k_i}) \right) \Gamma(\tau^{-1}) \tau(\zeta) \right). \quad (10.5)$$

Исходная функция F выражается через $\mathcal{F}$ по формуле

$$F(\pi, x, k) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{-1}(x_i) \mathcal{F}(\pi, \zeta, k), \quad \text{где } \zeta = x_1^{-k_1} \cdots x_n^{-k_n} x_{n+1}. \quad (10.6)$$

В частном случае при $k_1 = \cdots = k_r = 1$, $k_{r+1} = \cdots = k_{r+s} = -1$, где $r + s = n$, назовем $\mathcal{F}(\pi, \zeta, k)$ функцией Похгаммера и обозначим через ${}_r\mathcal{F}_s(\pi, \zeta)$. Эта функция – аналог классической функции Похгаммера [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. При $\pi_{r+1} \neq \varepsilon$ и $\pi_i \pi_{r+1+i} \neq \varepsilon$, $i = 1, \dots, r$, функция ${}_{r+1}\mathcal{F}_r$ представима в виде эйлеровской суммы:

$$\begin{aligned} {}_{r+1}\mathcal{F}_r(\pi, \zeta) &= \Gamma(\pi_{r+1}) \prod_{i=1}^r \Gamma(\pi_i \pi_{r+1+i}) \\ &\times \sum_{t \in P^r} \left(\left(\prod_{i=1}^r \pi_i(t_i) (\pi_i \pi_{r+1+i})^{-1} (1 + t_i) \right) \pi_{r+1}^{-1} (1 + \zeta t_1 \cdots t_r) \right). \end{aligned} \quad (10.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$${}_{r+1}\mathcal{F}_r(\pi, \zeta) = \sum_{t \in P^{2r+1}} \chi \left(\sum_{j=1}^{2r+1} t_j + \zeta t_1 \cdots t_{r+1} t_{r+2}^{-1} \cdots t_{2r+1}^{-1} \right) \prod_{i=1}^{2r+1} \pi_i(t_i).$$

Сделав замену $t_i \rightarrow t_i t_{r+1+i}$, $i = 1, \dots, r$, получим:

$$\begin{aligned} {}_{r+1}\mathcal{F}_r(\pi, \zeta) &= \sum_{t \in P^{2r+1}} \chi \left(\sum_{j=1}^r (t_j + 1) t_{r+1+j} + (1 + \zeta t_1 \cdots t_r) t_{r+1} \right) \\ &\times \prod_{i=1}^r \pi_i(t_i) (\pi_i \pi_{r+1+i}) (t_{r+1+i}) \pi_{r+1}(t_{r+1}). \end{aligned}$$

Отсюда, суммируя по $t_{r+1}, \dots, t_{2r+1}$, получаем (10.7).

В частности, при $r = 1$ получаем аналог эйлеровского интеграла для классической функции Гаусса:

$${}_2\mathcal{F}_1(\pi, \zeta) = \Gamma(\pi_2) \Gamma(\pi_1 \pi_3) \sum_{t \in P} \pi_1(t) (\pi_1 \pi_3)^{-1} (1 + t) \pi_2^{-1} (1 + \zeta t). \quad (10.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. *Имеет место аналог формулы Дуголла [2]:*

$$\sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\pi_1 + \tau) \Gamma(\pi_2 + \tau) \Gamma(\pi_3 - \tau) \Gamma(\pi_4 - \tau) = \frac{\Gamma(\pi_1 + \pi_3) \Gamma(\pi_2 + \pi_3) \Gamma(\pi_1 + \pi_4) \Gamma(\pi_2 + \pi_4)}{\Gamma(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4)}. \quad (10.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (10.5), левая часть I равенства (10.9) выражается через функцию ${}_2\mathcal{F}_1$:

$$I = (q - 1) {}_2\mathcal{F}_1(\pi_1 + \pi_4, \pi_2 + \pi_4, \pi_3 - \pi_4, 1).$$

Следовательно, на основании (10.8) получаем:

$$\begin{aligned} I &= (q - 1) \Gamma(\pi_2 + \pi_4) \Gamma(\pi_1 + \pi_3) \sum_{t \in \Pi} (\pi_1 + \pi_4, t) (-\pi_1 - \pi_2 - \pi_3 - \pi_4, 1 + t) \\ &= (q - 1) (\pi_1 + \pi_4, -1) \Gamma(\pi_2 + \pi_4) \Gamma(\pi_1 + \pi_3) \mathcal{B}(\pi_1 + \pi_4, -\pi_1 - \pi_2 - \pi_3 - \pi_4). \end{aligned}$$

Отсюда следует (10.9).

§ 11. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианами над конечными полями

11.1. Определение. Определим функцию $\Psi_{kl}(\pi, z) = \Psi_{kl}(\pi_1, \dots, \pi_{k+l}, z)$ на $\Pi^{k+l} \times E_{k, k+l}$, где $E_{k, k+l}$ — множество невырожденных матриц $z = \|z_{ij}\|$ размера $k \times (k + l)$ над F , равенством:

$$\Psi_{kl}(\pi, z) = \Psi_{kl}(\pi_1, \dots, \pi_{k+l}, z) = \sum_{s \in F^k} \left(\prod_{j=1}^{k+l} \pi_j (z_{1j}s_1 + \dots + z_{kj}s_k) \right). \quad (11.1)$$

Назовем $\Psi_{kl}(\pi, z)$ гипергеометрической функцией, связанной с грассманианом $G_{k, k+l}$ k -мерных подпространств в F^{k+l} .

Из определения следует, что

$$\Psi_{kl}(\pi, \lambda z) = \Psi_{kl}(\pi, z) \quad \text{и} \quad \Psi_{kl}(\pi, \lambda z) = \prod_{j=1}^{k+l} \pi_j(\lambda) \Psi_{kl}(\pi, z)$$

для любого $\lambda \in P$. Поэтому если $\prod \pi_j \neq \varepsilon$, то $\Psi_{kl}(\pi, z) = 0$. В дальнейшем предполагается, что функция Ψ_{kl} задана только на подмножестве $\Pi_0^{k+l} \subset \Pi^{k+l}$ характеров, удовлетворяющих соотношению

$$\prod_{j=1}^{k+l} \pi_j = \varepsilon. \quad (11.2)$$

Поскольку сумма (11.1) сохраняется при замене $s \rightarrow \lambda s$, то в определении (7.3) функции Ψ_{kl} можно считать, что суммирование ведется по проективизации $P(F^k \setminus 0)$ пространства F^k .

11.2. Основные соотношения. Из определения функции Ψ_{kl} непосредственно следует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. *Функция $\Psi_{kl}(\pi, z)$ удовлетворяет условию однородности*

$$\Psi_{kl}(\pi, z\lambda) = \prod_{i=1}^{k+l} \pi_i(\lambda_i) \Psi_{kl}(\pi, z) \quad (11.3)$$

для любой невырожденной диагональной матрицы $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+l})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.2. *Для любой перестановки σ индексов $1, \dots, k+l$ имеем:*

$$\Psi_{kl}(\pi^\sigma, z^\sigma) = \Psi_{kl}(\pi, z), \quad (11.4)$$

где π^σ и z^σ получаются из π и z перестановкой σ соответственно координат π_j вектора π и столбцов z_j матрицы z .

Соотношения (11.4) будем называть соотношениями Куммера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.3. *Функция $\Psi_{kl}(\pi, z)$ удовлетворяет соотношению:*

$$\Psi_{kl}(\pi, gz) = \Psi_{kl}(\pi, z) \quad \text{для любого } g \in GL(k, F). \quad (11.5)$$

Таким образом, при любом фиксированном π она является функцией на грассманиане $G_{k, k+l}$ k -мерных подпространств в F^{k+l} .

Иногда мы будем писать $\Psi_{kl}(\pi, p)$ вместо $\Psi_{kl}(\pi, z)$, где p — точка грассманиана $G_{k, k+l}$, отвечающая z .

11.3. Приведенные функции. Сведем функцию $\Psi_{kl}(\pi, z)$ на $E_{k, k+l}$ к функции на множестве $(k \times l)$ -матриц. Обозначим через z_I , где $I \subset [1, k+l]$, матрицу из столбцов z_i матрицы z с номерами $i \in I$. В частности, если $\#I = n$, то z_I — квадратная матрица порядка n .

Положим для любого $I \subset [1, k+l]$, $\#I = n$:

$$F_{kl}^I(\pi, x) = \sum_{t_i, i \in I} \left(\prod_{i \in I} \pi_i(t_i) \prod_{j \notin I} \pi_j \left(\sum_{i \in I} t_i x_{ij} \right) \right). \quad (11.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.4. *Для любого n -элементного подмножества $I \subset [1, k+l]$ такого, что $\det z_I \neq 0$, функция $\Psi_{kl}(\pi, z)$ представима в виде*

$$\Psi_{kl}(\pi, z) = F_{kl}^I(\pi, x), \quad (11.7)$$

где $x = \|x_{ij}\|_{i \in I, j \notin I}$ — $(k \times l)$ -матрица, заданная равенством $x = z_I^{-1} z_J$, $J = [1, k+l] \setminus I$.

В самом деле, если $\det z_I \neq 0$, то преобразование $s \rightarrow t$:

$$t_i = s_1 x_{1i} + \dots + s_k x_{ki}, \quad i \in I,$$

является изоморфизмом аддитивной группы $F^k \rightarrow F^k$. Заменяв в (11.1) суммирование по s суммированием по t , получаем (11.7).

Назовем функции $F_{kl}^I(\pi, x)$ приведенными гипергеометрическими функциями, связанными с грассманианом $G_{k, k+l}$, а равенства (11.7) – формулами приведения.

11.4. Функции $F_{kl}(\pi, x)$. В случае $I = \{1, \dots, k\}$ условимся для краткости писать $F_{kl}(\pi, x)$ вместо $F_{kl}^I(\pi, x)$. Таким образом, по определению

$$F_{kl}(\pi, x) = \sum_{t \in F^k} \left(\prod_{i=1}^k \pi_i(t_i) \prod_{j=k+1}^{k+l} \pi_j(t_1 x_{1j} + \dots + t_k x_{kj}) \right). \quad (11.8)$$

При этом если $\det z_I \neq 0$, где $I = \{1, \dots, k\}$, то

$$\Psi_{k,l}(\pi, z) = F_{kl}(\pi, x), \quad (11.9)$$

где элементы $k \times (k+l)$ -матрицы z и $(k \times l)$ -матрицы x связаны соотношениями

$$z_{i1}x_{1j} + \dots + z_{ik}x_{kj} = z_{ij} \quad \text{при } i = 1, \dots, k, \quad j = k+1, \dots, k+l.$$

В дальнейшем вместо функций $\Psi_{kl}(\pi, z)$ будем рассматривать функции $F_{kl}(\pi, x)$ на $\Pi_0^{k+l} \times F^{kl}$. Приведем несколько свойств этих функций.

Из соотношения (11.3) для функции Ψ_{kl} вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.5. *Функция F_{kl} удовлетворяет условию однородности:*

$$F_{kl}(\pi, \lambda^{-1}x\mu) = \prod_{i=1}^k \pi_i(\lambda_i) \prod_{j=k+1}^{k+l} \pi_j(\mu_j) F_{kl}(\pi, x) \quad (11.10)$$

для любых невырожденных матриц $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и $\mu = (\mu_{k+1}, \dots, \mu_{k+l})$.

Расширим x до $k \times (k+l)$ -матрицы z , положив $z = (e, x)$, где e – единичная матрица. Обозначим для любой перестановки σ индексов $1, \dots, k+l$ через z_1^σ и z_2^σ матрицы из столбцов матрицы z с номерами $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$ и $\sigma(k+1), \dots, \sigma(k+l)$ соответственно. Из соотношения (11.7) для функции Ψ_{kl} вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.6. *Для любой перестановки σ индексов $1, \dots, k+l$ имеем:*

$$F_{kl}(\pi, x) = F_{kl}(\pi^\sigma, (z_1^\sigma)^{-1} z_2^\sigma) \quad (11.11)$$

при условии, что $\det z_1^\sigma \neq 0$.

В частности, функция $F_{kl}(\pi, x)$ сохраняется при одновременной перестановке характеров $\pi_1, \dots, \pi_k$ и строк матрицы x , а также при одновременной перестановке характеров $\pi_{k+1}, \dots, \pi_{k+l}$ и столбцов матрицы x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.7. При $x = \mathbf{1}$ (матрица с элементами $x_{ij} = 1$) и $\pi_1 \cdots \pi_k \neq \varepsilon$ имеем:

$$F_{kl}(\pi, \mathbf{1}) = (q-1)B(\pi_1, \dots, \pi_k), \quad (11.12)$$

где B – бета-функция от k аргументов.

В самом деле,

$$\begin{aligned} F_{kl}(\pi, \mathbf{1}) &= \sum_{t \in F^k} \left(\prod_{i=1}^k \pi_i(t_i) \prod_{j=k+1}^{k+l} \pi_j(t_1 + \dots + t_k) \right) \\ &= \sum_{t \in F^k} \left(\prod_{i=1}^k \pi_i \left(\frac{t_i}{t_1 + \dots + t_k} \right) \right) \\ &= (q-1) \sum_{t_1 + \dots + t_k = 1} \left(\prod_{i=1}^k \pi_i(t_i) \right) = (q-1)B(\pi_1, \dots, \pi_k). \end{aligned}$$

11.5. Связь с ОГФ. Пусть $n = k + l$ и $N = kl$. Занумеруем элементы вектора $x \in P^N$ парами индексов $i = 1, \dots, k$ и $j = k + 1, \dots, k + l$, т.е. представим x в виде $(k \times l)$ -матрицы $x = \|x_{ij}\|$. Зададим элементы $(n \times N)$ -матрицы $\omega = \|\omega_{r,ij}\|$ равенствами:

$$\begin{aligned} \omega_{r,ij} &= 1 \quad \text{при } r = i, j; \\ \omega_{r,ij} &= 0 \quad \text{при } r \neq i, j. \end{aligned}$$

Согласно общему определению, ОГФ $\Phi(\pi, x)$, ассоциированная с этой матрицей ω , имеет вид

$$\Phi(\pi, x) = \sum_{s,t} \left(\chi \left(\sum_{i,j} x_{ij} s_i t_j \right) \prod_{i=1}^k \pi_i(s_i) \prod_{j=1}^l \pi_{k+j}(t_j) \right). \quad (11.13)$$

Выполнив в (11.3) суммирование соответственно по $t_1, \dots, t_l$ и по $s_1, \dots, s_k$, мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.8. Если $\pi_j \neq \varepsilon$ при $j = k + 1, \dots, k + l$, то

$$\Phi(\pi, x) = \prod_{j=k+1}^{k+l} \Gamma(\pi_j) \sum_{t \in P^k} \left(\prod_{i=1}^k \pi_i(s_i) \prod_{j=k+1}^{k+l} \pi_j^{-1}(s_1 x_{1j} + \dots + s_k x_{kj}) \right); \quad (11.14)$$

если $\pi_i \neq \varepsilon$ при $i = 1, \dots, k$, то

$$\Phi(\pi, x) = \prod_{i=1}^k \Gamma(\pi_i) \sum_{t \in P^l} \left(\prod_{i=1}^k \pi_i^{-1}(x_{i,k+1} t_{k+1} + \dots + x_{i,k+l} t_{k+l}) \prod_{j=k+1}^{k+l} \pi_j(t_j) \right). \quad (11.15)$$

СЛЕДСТВИЕ. ОГФ Φ , ассоциированная с матрицей $\omega = \|\omega_{r,ij}\|$, связана с функцией $F_{kl}(\pi, x)$, определенной равенством (11.8), следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Phi(\pi, x) &= \prod_{j=k+1}^{k+l} \Gamma(\pi_j) F_{kl}(\pi_1, \dots, \pi_k, \pi_{k+1}^{-1}, \dots, \pi_{k+l}^{-1}, x), \\ &\quad \text{если } \pi_j \neq \varepsilon \text{ при } j = k+1, \dots, k+l; \\ \Phi(\pi, x) &= \prod_{i=1}^k \Gamma(\pi_i) F_{lk}(\pi_{k+1}, \dots, \pi_{k+l}, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_k^{-1}, x^*), \\ &\quad \text{если } \pi_i \neq \varepsilon \text{ при } i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (11.16)$$

где x^* — $(l \times k)$ -матрица, транспонированная с x .

11.6. Отношение двойственности для функций F_{kl} . Из (11.16) вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.9. Функции F_{kl} и F_{lk} , связанные с грассманианами $G_{k,k+l}$ и $G_{l,k+l}$, удовлетворяют при $\pi_i \neq \varepsilon$, $i = 1, \dots, k+l$, следующему соотношению двойственности:

$$\prod_{j=k+1}^{k+l} \Gamma(\pi_j^{-1}) F_{kl}(\pi_1, \dots, \pi_{k+l}, x) = \prod_{i=1}^k \Gamma(\pi_i) F_{lk}(\pi_{k+1}^{-1}, \dots, \pi_{k+l}^{-1}, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_k^{-1}, x^*). \quad (11.17)$$

В частности, при $k = l$ равенство (11.17) задает соотношение на функцию F_{kk} .

СЛЕДСТВИЕ. Функции $\Psi_{kl}(\pi, p)$ и $\Psi_{lk}(\pi, q)$ на грассманианах $G_{k,k+l}$ и $G_{l,k+l}$ связаны при $\pi_i \neq \varepsilon$, $i = 1, \dots, k+l$, соотношением

$$\Psi_{kl}(\pi_1, \dots, \pi_{k+l}, p) = \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\pi_i)}{\prod_{j=k+1}^{k+l} \Gamma(\pi_j^{-1})} \Psi_{lk}(\pi_{k+1}^{-1}, \dots, \pi_{k+l}^{-1}, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_k^{-1}, q), \quad (11.18)$$

где $q \in G_{l,k+l}$ — образ $p \in G_{k,k+l}$ при естественном изоморфизме $G_{k,k+l} \rightarrow G_{l,k+l}$.

11.7. Представление функции F_{kl} в виде гипергеометрической суммы. Обозначим через Π_{kl} множество наборов $\tau = \{\tau_{ij} \in \Pi \mid 1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq k+l\}$, где

$$\prod_{i=1}^k \tau_{ij} = \varepsilon, \quad k+1 \leq j \leq k+l; \quad \prod_{j=k+1}^{k+l} \tau_{ij} = \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (11.19)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.10. Если все элементы матрицы x отличны от нуля, то при $\pi_j \neq \varepsilon$, $k+1 \leq j \leq k+l$, имеем:

$$\begin{aligned} F_{kl}(\pi, x) &= (q-1)^{k+l-kl} \left(\prod_{j=k+1}^{k+l} \Gamma(\pi_j^{-1}) \right)^{-1} \prod_{i,j} \sigma_{ij}^{-1}(x_{ij}) \\ &\quad \times \sum_{\tau \in \Pi_{kl}} \left(\prod_{i,j} \Gamma(\sigma_{ij} \tau_{ij}) \tau_{ij}^{-1}(x_{ij}) \right), \end{aligned} \quad (11.20)$$

где $\sigma = \{\sigma_{ij} \in \Pi \mid 1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq k+l\}$ – фиксированный набор характеров, связанных соотношениями

$$\prod_{i=1}^k \pi_{ij} = \pi_j^{-1}, \quad k+1 \leq j \leq k+l; \quad \prod_{j=k+1}^{k+l} \pi_{ij} = \pi_i, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (11.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 8.5 следует, что ОГФ $\Phi(\pi, x)$, определенная в п. 11.5, представима рядом

$$\Phi(\pi, x) = (q-1)^{k+l-kl} \prod_{i,j} \sigma_{ij}^{-1}(x_{ij}) \sum_{\tau \in \Pi_{kl}} \left(\prod_{i,j} \Gamma(\sigma_{ij} \tau_{ij}) \tau_{ij}^{-1}(x_{ij}) \right),$$

где σ_{ij} удовлетворяют соотношениям $\prod_{i=1}^k \sigma_{ij} = \pi_j, k+1 \leq j \leq k+l$, и $\prod_{j=k+1}^{k+l} \sigma_{ij} = \pi_i, 1 \leq i \leq k$. Отсюда и из соотношений (11.16), связывающих Φ и F_{kl} , следует (11.21).

§ 12. Гипергеометрическая функция гауссова типа

12.1. Исходные определения и соотношения. Назовем функцией гауссова типа гипергеометрическую функцию $\Phi = \Phi_{22}$, связанную с грассманианом $G_{2,4}$. Согласно § 11, это функция от характеров $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, где $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 = \varepsilon$, и от (2×4) -матрицы $z = \|z_{ij}\|$, заданная формулой

$$\Psi(\pi, z) = \sum_{t \in F^2} \left(\prod_{j=1}^4 \pi_j(z_{1j}t_1 + z_{2j}t_2) \right). \quad (12.1)$$

Функция Ψ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\Psi(\pi, z\lambda) = \prod_{i=1}^4 \pi_i(\lambda_i) \Psi(\pi, z) \quad \text{для любого } \lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad (12.2)$$

$$\Psi(\pi, gz) = \Psi(\pi, z) \quad \text{для любого } g \in GL(2, F), \quad (12.3)$$

$$\Psi(\pi^\sigma, z^\sigma) = \Psi(\pi, z) \quad \text{для любой перестановки } \sigma \in S_4, \quad (12.4)$$

где $\pi^\sigma = (\pi_{\sigma(1)}, \dots, \pi_{\sigma(4)})$, а z^σ получается из матрицы z перестановкой σ ее столбцов. Соотношения (12.4) мы называем соотношениями Куммера.

Из (11.9) следует, что функция Ψ сводится к функции $F(\pi, x)$ от (2×2) -матрицы x :

$$\begin{aligned} F(\pi, x) &= \sum_{t \in P^2} \pi_1(t_1) \pi_2(t_2) \pi_3(x_{11}t_1 + x_{21}t_2) \pi_4(x_{12}t_1 + x_{22}t_2) \\ &= (q-1) \sum_{t \in P} \pi_2(t) \pi_3(x_{11} + x_{21}t) \pi_4(x_{12} + x_{22}t). \end{aligned} \quad (12.5)$$

Именно,

$$\Psi(\pi, z) = F(\pi, z_1^{-1} z_2) \quad \text{при } \det z_1 \neq 0, \quad (12.6)$$

где z_1 и $z_2 - (2 \times 2)$ -матрицы соответственно из двух первых и двух последних столбцов матрицы z .

Из соотношений (11.10), (11.17) и (11.11) следует, что

1) функция F удовлетворяет условию однородности

$$F(\pi, \lambda^{-1}x\mu) = \pi_1(\lambda_1)\pi_2(\lambda_2)\pi_3(\mu_1)\pi_4(\mu_2)F(\pi, x) \quad (12.7)$$

для любых $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$;

2) функция F удовлетворяет соотношению двойственности

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, x) = \frac{\Gamma(\pi_1)\Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1})}F(\pi_3^{-1}, \pi_4^{-1}, \pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}, x^*); \quad (12.8)$$

3) функция F удовлетворяет 24 соотношениям симметрии (соотношения Куммера), отвечающим перестановкам индексов 1, 2, 3 и 4.

Опишем соотношения Куммера подробнее. Поскольку группа перестановок S_4 порождена перестановками (1, 2), (3, 4) и (2, 3), то достаточно указать соотношения симметрии, отвечающие только этим перестановкам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.1. *Перестановкам (1, 2), (3, 4) и (2, 3) соответственно отвечают следующие соотношения Куммера для функции F :*

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, x) = F(\pi_2, \pi_1, \pi_3, \pi_4, x'), \quad (12.9)$$

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, x) = F(\pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_3, x''), \quad (12.10)$$

где x' и x'' получаются из x соответственно перестановкой строк и перестановкой столбцов, и

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, x) = F(\pi_1, \pi_3, \pi_2, \pi_4, x''') \quad \text{при} \quad x_{21} \neq 0, \quad (12.11)$$

$$\text{где } x''' = -x_{21} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \\ -1 & -x_{22} \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2. *На множестве матриц x с отличными от нуля элементами функция F представима при $\pi_3, \pi_4 \neq \varepsilon$ в виде гипергеометрической суммы:*

$$F(\pi, x) = (\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1}))^{-1}(\pi_2\pi_3)(x_{11})\pi_2^{-1}(x_{21})\pi_4(x_{12}) \times \sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\pi_2^{-1}\pi_3^{-1}\tau^{-1})\Gamma(\pi_2\tau)\Gamma(\pi_4^{-1}\tau)\Gamma(\tau^{-1})\tau \begin{pmatrix} x_{11}x_{22} \\ x_{12}x_{21} \end{pmatrix}. \quad (12.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 11.10 следует, что

$$F(\pi, x) = (\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1}))^{-1} \prod_{i,j=1,2} \sigma_{ij}^{-1}(x_{ij}) \sum_{\tau} \left(\Gamma(\sigma_{ij}\tau_{ij})\tau_{ij}^{-1}(x_{ij}) \right),$$

где $\sigma = \|\sigma_{ij}\|$ удовлетворяет соотношениям $\sigma_{i1}\sigma_{i2} = \pi_i$, $i = 1, 2$, и $\sigma_{1j}\sigma_{2j} = \pi_{2+j}^{-1}$, $j = 1, 2$, а сумма берется по $\tau = \|\tau_{ij}\|$ таким, что $\tau_{i1}\tau_{i2} = \tau_{1j}\tau_{2j} = \varepsilon$, $i, j = 1, 2$, т.е. $\tau_{11} = \tau_{12}^{-1} = \tau_{21}^{-1} = \tau_{22}$. Отсюда, приняв $\sigma_{11} = \pi_2^{-1}\pi_3^{-1}$, $\sigma_{12} = \pi_4^{-1}$, $\sigma_{21} = \pi_2$ и $\sigma_{22} = \varepsilon$, получаем (12.12).

12.2. Гипергеометрическая функция Гаусса над конечным полем. Определим гипергеометрическую функцию Гаусса $\mathcal{F}(\pi, \zeta)$, где $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \in \Pi_0^4$, $\zeta \in F$, равенством

$$\mathcal{F}(\pi, \zeta) = \sum_{t \in P} \pi_2(t)\pi_3(1+t)\pi_4(1+\zeta t), \quad (12.13)$$

т.е.

$$\mathcal{F}(\pi, \zeta) = F(\pi, x) \quad \text{при} \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \zeta \end{pmatrix}. \quad (12.14)$$

Из соотношения однородности для F следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.3. *Функция $F(\pi, x)$ выражается через функцию $\mathcal{F}(\pi, \zeta)$ по формуле*

$$F(\pi, x) = (\pi_2\pi_3)(x_{11})\pi_2^{-1}(x_{21})\pi_4(x_{12})\mathcal{F}\left(\pi, \frac{x_{11}x_{22}}{x_{12}x_{21}}\right). \quad (12.15)$$

Из предложения 12.2 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.4. *При $\pi_3, \pi_4 \neq \varepsilon$ функция $\mathcal{F}$ представима в виде гипергеометрической суммы:*

$$\mathcal{F}(\pi, \zeta) = (\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1}))^{-1} \sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\pi_2^{-1}\pi_3^{-1}\tau^{-1})\Gamma(\pi_2\tau)\Gamma(\pi_4^{-1}\tau)\Gamma(\tau^{-1})\tau(\zeta). \quad (12.16)$$

Из (12.16) и (12.8) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.5. *Функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет соотношению двойственности:*

$$\mathcal{F}(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \zeta) = \frac{\Gamma(\pi_1)\Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_3^{-1})\Gamma(\pi_4^{-1})} \mathcal{F}(\pi_3^{-1}, \pi_4^{-1}, \pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}, \zeta). \quad (12.17)$$

Из соотношений симметрии для F следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.6. *Функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет соотношениям симметрии (соотношения Куммера):*

$$\mathcal{F}(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \zeta) = \pi_4(\zeta)\mathcal{F}(\pi_2, \pi_1, \pi_3, \pi_4, 1/\zeta); \quad (12.18)$$

$$\mathcal{F}(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \zeta) = \pi_2^{-1}(\zeta)\mathcal{F}(\pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_3, 1/\zeta); \quad (12.19)$$

$$\mathcal{F}(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \zeta) = (\pi_2\pi_3)(-1)\pi_4(1-\zeta)\mathcal{F}\left(\pi_1, \pi_3, \pi_2\pi_4, \frac{\zeta}{\zeta-1}\right) \quad \text{при} \quad \zeta \neq 1. \quad (12.20)$$

Эти соотношения порождают группу симметрий функции $\mathcal{F}$, изоморфную S_4 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношения (12.18)–(12.20) можно получить непосредственно из определения функции $\mathcal{F}$ преобразованиями $t \rightarrow t^{-1}$, $t \rightarrow \zeta^{-1}t$ и $t \rightarrow -t - 1$.

12.3. Квадратичные соотношения для $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.7. Для любых мультипликативных характеров π и σ таких, что π^2 , σ^2 и $\pi\sigma$ отличны от ε , при $\zeta \neq 0, -1$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^{-2}\sigma^{-2}, \pi^2, \sigma, \sigma, \zeta) &= (q-1)^{-1} \frac{\Gamma(\pi^{-1}\sigma^{-1})\Gamma(\pi\eta)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\eta)} \pi^{-1}(\zeta) \\ &\times \mathcal{F}\left(\pi^{-1}\sigma^{-1}\eta, \pi, \pi^{-1}\eta, \pi\sigma, \frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta}\right). \end{aligned} \quad (12.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\mathcal{F}(\zeta) \equiv \mathcal{F}(\pi^{-2}\sigma^{-2}, \pi^2, \sigma, \sigma, \zeta) = \sum_{t \in F} \pi^2(t) \sigma(1 + (1 + \zeta + \zeta t)). \quad (12.22)$$

Согласно биномиальной формуле (7.5),

$$\sigma(1 + t(1 + \zeta + \zeta t)) = \delta(t(1 + \zeta + \zeta t)) + c(\sigma) \sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\tau^{-1}) \Gamma(\sigma^{-1}\tau) \tau(t) \tau(1 + \zeta + \zeta t),$$

где $c(\sigma) = (q-1)^{-1} \Gamma^{-1}(\sigma)$.

Подставив это выражение в (12.22) и сделав замену $t \rightarrow \frac{1+\zeta}{\zeta}t$, получим:

$$\mathcal{F}(\zeta) = \pi^2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right) + c(\sigma) \pi^2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right) \sum_{t, \tau} \Gamma(\tau^{-1}) \Gamma(\sigma^{-1}\tau) (\pi^2\tau)(t) \tau(1+t) \tau\left(\frac{(1+\zeta)^2}{\zeta}\right).$$

Из определения бета-функции и формулы удвоения (7.2) для гамма-функции следует:

$$\begin{aligned} &\sum_{t \in F} (\pi^2\tau)(t) \tau(1+t) \\ &= q^{-1} \tau(-1) \Gamma(\pi^2\tau) \Gamma(\tau) \Gamma(\pi^{-2}\tau^{-2}) \\ &= q^{-1} \tau(-1) \Gamma(\pi^2\tau) \Gamma(\tau) (\pi^{-1}\tau^{-1})(4) \Gamma^{-1}(\eta) \Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1}) \Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1}\eta). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\zeta) &= \pi^2\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right) + q^{-1} c(\sigma) \Gamma^{-1}(\eta) \pi^2\left(\frac{1+\zeta}{2\zeta}\right) \\ &\times \sum_{\tau \in \Pi} (\tau(-1) \Gamma(\tau^{-1}) \Gamma(\tau)) \Gamma(\sigma^{-1}\tau) \Gamma(\pi^2\tau) t \Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1}) \Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1}\eta) \tau\left(\frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta}\right). \end{aligned}$$

Подставив $\tau(-1)\Gamma(\tau^{-1})\Gamma(\tau) = q - (q-1)\delta(\tau)$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\zeta) &= \pi^2 \left(\frac{1+\zeta}{\zeta} \right) - q^{-1}(q-1)c(\sigma)\Gamma^{-1}(\eta)\Gamma(\sigma^{-1})\Gamma(\pi^2)\Gamma(\pi^{-1})\Gamma(\pi^{-1}\eta)\pi^2 \left(\frac{1+\zeta}{2\zeta} \right) \\ &\quad + c(\sigma)\Gamma^{-1}(\eta)\pi^2 \left(\frac{1+\zeta}{2\zeta} \right) \\ &\quad \times \sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\sigma^{-1}\tau)\Gamma(\pi^2\tau)\Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1})\Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1}\eta)\tau \left(\frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta} \right). \end{aligned}$$

На основании формулы удвоения для гамма-функции два первых слагаемых этой суммы взаимно сокращаются. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\zeta) &= (q-1)^{-1}\Gamma^{-1}(\sigma)\Gamma^{-1}(\eta)\pi^{-1}(\zeta) \\ &\quad \times \sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\sigma^{-1}\tau)\Gamma(\pi^2\tau)\Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1})\Gamma(\pi^{-1}\tau^{-1}\eta)(\pi\tau) \left(\frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta} \right) \\ &= (q-1)^{-1}\Gamma^{-1}(\sigma)\Gamma^{-1}(\eta)\pi^{-1}(\zeta) \\ &\quad \times \sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\pi^{-1}\sigma^{-1}\tau)\Gamma(\pi\tau)\Gamma(\tau^{-1})\Gamma(\tau^{-1}\eta)\tau \left(\frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta} \right). \end{aligned}$$

Из (12.16) при $\pi_2 = \pi$, $\pi_3 = \pi^{-1}\eta$ и $\pi_4 = \pi\sigma$ следует:

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau \in \Pi} \Gamma(\pi^{-1}\sigma^{-1}\tau)\Gamma(\pi\tau)\Gamma(\tau^{-1})\Gamma(\tau^{-1}\eta)\tau \left(\frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta} \right) \\ &= \Gamma(\pi^{-1}\sigma^{-1})\Gamma(\pi\eta) \mathcal{F} \left(\pi^{-1}\sigma^{-1}\eta, \pi, \pi^{-1}\eta, \pi\sigma, \frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta} \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (12.21).

Формула (12.21) – аналог квадратичного соотношения для классической функции Гаусса. Другие квадратичные соотношения для $\mathcal{F}$ получаются из (12.21) применением соотношений симметрии Куммера.

Например, применив к правой части в (12.21) соотношение (12.19), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^{-2}\sigma^{-2}, \pi^2, \sigma, \sigma, \zeta) &= (q-1)^{-1} \frac{\Gamma(\pi^{-1}\sigma^{-1})\Gamma(\pi\eta)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\eta)} \pi^2 \left(\frac{2}{1+\zeta} \right) \\ &\quad \times \mathcal{F} \left(\pi^{-1}\sigma^{-1}\eta, \pi, \pi\sigma, \pi^{-1}\eta, \frac{4\zeta}{(1+\zeta)^2} \right). \end{aligned} \quad (12.23)$$

Применив к правой части (12.23) соотношение (12.20), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^{-2}\sigma^{-2}, \pi^2, \sigma, \sigma, \zeta) &= (q-1)^{-1} \frac{\Gamma(\pi^{-1}\sigma^{-1})\Gamma(\pi\eta)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\eta)} \sigma(-1) \pi^2 \left(\frac{2}{1-\zeta} \right) \\ &\quad \times \mathcal{F} \left(\pi^{-1}\sigma^{-1}\eta, \pi\sigma, \pi, \pi^{-1}\eta, -\frac{4\zeta}{(1-\zeta)^2} \right). \end{aligned} \quad (12.24)$$

12.4. Кубические соотношения для $\mathcal{F}$. Если два из характеров $\pi^{-1}\sigma^{-1}\eta$, π , $\pi^{-1}\eta$, $\pi\sigma$ совпадают, а третий является квадратом, то к правой части квадратичного соотношения можно в свою очередь применить квадратичное соотношение. Получаемые соотношения и те, которые получаются из них применением соотношений Куммера, аналогичны кубическим соотношениям для классической функции Гаусса. Приведем два из этих соотношений.

Заменой в (12.21) $\pi \rightarrow \pi^2$, $\sigma \rightarrow \pi^{-4}\eta$ получаем из (12.21):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^4, \pi^4, \pi^{-4}\eta, \pi^{-4}\eta, \zeta) &= (q-1)^{-1} \frac{\Gamma^2(\pi^2\eta)}{\Gamma(\pi^{-4}\eta)\Gamma(\eta)} \pi^{-2}(\zeta) \\ &\times \mathcal{F}\left(\pi^2, \pi^2, \pi^{-2}\eta, \pi^{-2}\eta, \frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta}\right). \end{aligned}$$

Согласно (12.21),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^2, \pi^2, \pi^{-2}\eta, \pi^{-2}\eta, z) &= (q-1)^{-1} \frac{\Gamma^2(\pi\eta)}{\Gamma(\pi^{-2}\eta)\Gamma(\eta)} \pi^{-1}(z) \\ &\times \mathcal{F}\left(\pi^2, \pi^2, \pi^{-2}\eta, \pi^{-2}\eta, \frac{(1+z)^2}{4z}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, при $z = \frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta}$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^4, \pi^4, \pi^{-4}\eta, \pi^{-4}\eta, \zeta) &= (q-1)^{-2} \frac{\Gamma^2(\pi^2\eta)\Gamma^2(\pi\eta, \zeta)}{\Gamma(\pi^{-4}\eta)\Gamma(\pi^{-2}\eta)\Gamma^2(\eta)} \pi\left(\frac{4}{\zeta(1+\zeta)^2}\right) \\ &\times \mathcal{F}\left(\pi^2, \pi^2, \pi^{-2}\eta, \pi^{-2}\eta, \frac{4\zeta + (1+\zeta)^2}{16\zeta(1+\zeta)^2}\right). \quad (12.25) \end{aligned}$$

Рассмотрим, далее, случай $q \equiv 1 \pmod{4}$; в этом случае характер η является квадратом:

$$\eta = \lambda^2, \quad \lambda \in \Pi.$$

Положив в (12.24) $\pi = \lambda$, $\sigma = \pi^2\lambda^{-1}$, мы получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^{-4}, \lambda^2, \pi^2\lambda^{-1}, \pi^2\lambda^{-1}, \zeta) &= (q-1)^{-1} \frac{\Gamma(\pi^{-2})\Gamma(\lambda^{-1})}{\Gamma(\pi^2\lambda^{-1})\Gamma(\eta)} \lambda(-1) \\ &\times \eta\left(\frac{2}{1-\zeta}\right) \mathcal{F}\left(\pi^{-2}\eta, \pi^2, \lambda, \lambda, -\frac{4\zeta}{(1-\zeta)^2}\right). \end{aligned}$$

Согласно (12.21),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi^{-2}\eta, \pi^2, \lambda, \lambda, z) &= (q-1)^{-1} \frac{\Gamma(\pi^{-1}\lambda^{-1})\Gamma(\pi\eta)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\eta)} \\ &\times \pi^{-1}(z) \mathcal{F}\left(\pi^{-1}\lambda, \pi, \pi^{-1}\eta, \pi\lambda, \frac{(1+z)^2}{4z}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, при $z = -\frac{4\zeta}{(1-\zeta)^2}$ получаем:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\pi^{-4}, \lambda^2, \pi^2 \lambda^{-1}, \pi^2 \lambda^{-1}, \zeta) \\ &= (q-1)^{-2} \frac{\Gamma(\pi^{-2})\Gamma(\lambda^{-1})\Gamma(\pi^{-1}\lambda^{-1})\Gamma(\pi\eta)}{\Gamma(\pi^2\lambda^{-1})\Gamma(\lambda)\Gamma^2(\eta)} \lambda(-1)\eta \left(\frac{2}{1-\zeta} \right) \\ & \times \pi^{-1} \left(-\frac{4\zeta}{(1-\zeta)^2} \right) \mathcal{F} \left(\pi^{-1}\lambda, \pi, \pi^{-1}\eta, \pi\lambda, \frac{((1-z)^2 - 4z)^2}{-16z(1-z)^2} \right). \end{aligned} \quad (12.26)$$

Дополнение.

Гипергеометрические функции над полем рациональных чисел

А.1. Исходные определения. Приведенное в статье определение обобщенной гипергеометрической функции над непрерывным локально компактным полем можно распространить на любые дискретные поля. Мы формулируем это определение для произвольного дискретного поля K , а затем обсуждаем его более подробно на примере поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Пусть K – произвольное дискретное поле, $\tilde{K}$ – произвольное его расширение, $K^* = K \setminus 0$ и $\tilde{K}^* = \tilde{K} \setminus 0$ – мультипликативные группы полей K и $\tilde{K}$. Фиксируем произвольную подгруппу $P \subset K^*$ и подгруппу $\Omega \subset \text{Hom}(P, \tilde{K}^*)$. Обозначим через Π группу характеров группы P , т.е. гомоморфизмов $\pi: P \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Определим преобразование Меллина функций $f(t)$ на P равенством

$$\mathcal{M}f(\pi) = \sum_{t \in P} f(t)\pi(t), \quad \pi \in \Pi.$$

Ряд сходится для финитных функций (т.е. отличных от нуля лишь в конечном числе точек).

Определим основное пространство $\mathcal{D}$ функций на P как совокупность всех финитных функций, а основное пространство $\tilde{\mathcal{D}}$ функций на Π – как совокупность преобразований Меллина функций $f \in \mathcal{D}$, т.е. конечных линейных комбинаций функций $\varphi_t(\pi) = \pi(t)$, $t \in P$.

Преобразование Меллина $\Phi = \mathcal{M}F$ произвольной функции $F(t)$ на P есть по определению линейный функционал на $\tilde{\mathcal{D}}$, заданный формулой

$$\langle \Phi, \mathcal{M}f \rangle = \sum_{t \in P} F(t)f(t^{-1}) \quad \text{для любой функции } f \in \mathcal{D}.$$

Аналогично определяются основные пространства $\mathcal{D}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n$ функций на P^n и Π^n и преобразование Меллина произвольной функции F на P^n .

Каждая обобщенная гипергеометрическая функция над полем K задается аддитивным характером $\chi \neq 1$ на $\tilde{K}$ и матрицей $\omega = \|\omega_{ij}\|$ размера $n \times N$ с элементами $\omega_{ij} \in \Omega$.

По определению обобщенная гипергеометрическая функция $\Phi(\pi, x)$, ассоциированная с матрицей ω , есть преобразование Меллина по $t \in P^n$ следующей функции $F(t, x)$, где $x \in K^N$:

$$F(t, x) = \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \cdots t_n^{\omega_{nj}} \right),$$

где $t_i^{\omega_{ij}}$ – образ элемента $t_i \in P$ при гомоморфизме $\omega_{ij}: P \rightarrow \tilde{K}$.

Согласно этому определению, Φ действует на основные функции $\varphi_t(\pi) = \pi(t)$, $t \in P^n$, по формуле

$$\langle \Phi, \varphi_t \rangle = \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{-\omega_{1j}} \cdots t_n^{-\omega_{nj}} \right).$$

Формально $\Phi(\pi, x)$ задается расходящимся рядом

$$\Phi(\pi, x) = \sum_{t \in P^n} \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t^{\omega_j} \right) \pi(t), \quad \pi \in \Pi^n, \quad (\text{A.1})$$

где $t^{\omega_j} = t_1^{\omega_{1j}} \cdots t_n^{\omega_{nj}}$, $\pi(t) = \pi_1(t_1) \cdots \pi_n(t_n)$.

Задача состоит в регуляризации этого ряда, т.е. придании ему смысла функции. Мы покажем на примере поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, что этого можно достигнуть, заменив ряд (A.1) набором его частичных сумм.

A.2. Обобщенные гипергеометрические функции над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть $K = \tilde{K} = \mathbb{Q}$, $P = \mathbb{Q}_+^*$ – мультипликативная подгруппа положительных рациональных чисел, $p = (p_1, \dots, p_s, \dots)$ – последовательность всех простых чисел.

В этом примере группа P изоморфна аддитивной группе бесконечных последовательностей $l = (l_1, \dots, l_s, \dots)$, $l_i \in \mathbb{Z}$, где все l_i , кроме конечного числа, равны нулю:

$$(l_1, \dots, l_s, \dots) \rightarrow \prod_i p_i^{l_i}.$$

Ее группа характеров Π изоморфна аддитивной группе Λ бесконечных последовательностей

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s, \dots), \quad \lambda_s \in \mathbb{C}(\text{mod } 2\pi i / \log p_s). \quad (\text{A.2})$$

Условимся через t^λ обозначать значение на $t \in P$ характера, отвечающего $\lambda \in \Lambda$:

$$t^\lambda = \prod_i p_i^{l_i \lambda_i} \quad \text{при} \quad t = \prod_i p_i^{l_i}.$$

Таким образом, преобразование Меллина $\mathcal{M}f$ функции $f(t)$ на P есть функция на Λ , заданная равенством

$$\mathcal{M}f(\lambda) = \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} f(t) t^\lambda.$$

По определению элементами пространства основных функций на Π^n являются конечные линейные комбинации функций вида

$$\varphi(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \prod_{i=1}^n t_i^{\lambda^i}, \quad \lambda^i \in \Lambda,$$

где $t_i \in P$ – произвольные фиксированные числа.

Примем в качестве Ω подгруппу последовательностей вида (A.2), где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\omega = \|\omega_{ij}\|$ – произвольная $(n \times N)$ -матрица с элементами $\omega_{ij} \in \Omega$, т.е.

$$\omega_{ij} = (\omega_{ij}^1, \dots, \omega_{ij}^s, \dots), \text{ где } \omega_{ij}^s \in \mathbb{Z}.$$

Зададим аддитивный характер $\chi(t)$ на $\mathbb{Q}$ равенством $\chi(t) = e^t$. Согласно общему определению, обобщенная гипергеометрическая функция, ассоциированная с матрицей ω , формально представима в виде ряда

$$\Phi(\lambda, x) = \sum_{t \in \mathbb{Q}^{*n}} \chi \left(\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}} \right) t_1^{\lambda^1} \dots t_n^{\lambda^n}, \quad \lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \Lambda^n. \quad (\text{A.3})$$

Разложив $\chi(t)$ в степенной ряд, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.1. *Функционал Φ имеет вид*

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \sum_k \varphi(-\omega_1 k, \dots, -\omega_n k) \frac{x^k}{k!}, \quad (\text{A.4})$$

где обозначено: $\omega_i k = (\omega_i^1 k, \dots, \omega_i^s k, \dots)$, $\omega_i^s k = \sum_{j=1}^N \omega_{ij}^s k_j$; $\frac{x^k}{k!} = \prod_{j=1}^N \frac{x_j^{k_j}}{k_j!}$.

А.3. Случай $n = N = 1$. Опишем регуляризацию функционала Φ при $n = N = 1$. В этом случае $\Phi(\lambda, x)$ задается последовательностью

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s, \dots) \in \mathbb{Z}^\infty$$

и формально определяется как сумма расходящегося ряда

$$\Phi(\lambda, x) = \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} e^{xt^\omega} t^\lambda, \quad x \in \mathbb{Q}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s, \dots) \in \Lambda, \quad (\text{A.5})$$

где обозначено: $t^\lambda = \prod_{i=1}^\infty p_i^{l_i \lambda_i}$ при $t = \prod_{i=1}^\infty p_i^{l_i}$.

$\Phi(\lambda, x)$ действует на основные функции $\varphi(\lambda)$ по формуле

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^\infty \varphi(-\omega k) \frac{x^k}{k!},$$

где $\omega k = (\omega_1 k, \dots, \omega_s k, \dots)$.

В частности, если $\varphi(\lambda) = t_0^\lambda$, где $t_0 \in \mathbb{Q}^*$ – произвольное фиксированное число, то

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \exp(x t_0^{-\omega}).$$

Заменим расходящийся ряд (А.5) его частичными суммами и определим регуляризацию этих частичных сумм.

Введем на P отношение частичной упорядоченности: будем писать $t' \leq t''$, если $t'/t'' = \prod p_i^{k_i}$, где $k_i \leq 0$ для всех i . Свяжем с каждым $t_0 \in P$ подмножество

$P_{t_0} = \{t \in P \mid t \leq t_0\}$ и обозначим через $\tilde{D}_{t_0} \subset \tilde{D}$ подпространство, линейно порожденное основными функциями $\varphi_t(\lambda) = t^\lambda, t \leq t_0$. Поскольку $\tilde{D}_{t'} \subset \tilde{D}_{t''}$ при $t' \leq t''$, пространство $\tilde{D}$ является индуктивным пределом подпространств $\tilde{D}_t$.

Обозначим через $\Phi_t, t \in P$, ограничение функционала Φ на подпространство $\tilde{\mathcal{D}}_t$ и назовем функционалы Φ_t неполными обобщенными гипергеометрическими функциями.

Формально Φ_{t_0} можно представить в виде частичной суммы

$$\Phi_{t_0}(\lambda, x) = \sum_{t \leq t_0} e^{xt^\omega} t^\lambda. \quad (\text{A.6})$$

Обозначим:

$$\zeta(\lambda) = \zeta(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) = \sum_{t \leq 1} t^\lambda. \quad (\text{A.7})$$

Следующее утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.2. Если $\operatorname{Re} \lambda_n \geq c$ для всех n , где $c > 1$, то ряд (A.7) сходится и

$$\zeta(\lambda) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - p_i^{-\lambda_i})^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

Таким образом, $\zeta(\lambda)$ – аналитическая функция от $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$.

Определим $\zeta(\lambda)$ при произвольном λ как аналитическое продолжение по λ этой аналитической функции. В частности, $\zeta(s, \dots, s, \dots)$ есть дзета-функция Римана.

Регуляризация частичной суммы (A.6) определяется следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.3. Если $\omega_n \geq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_n \geq c, c > 1$, для всех n , то ряд (A.6) сходится и

$$\Phi_{t_0}(\lambda, x) = t_0^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n\omega + \lambda) \frac{(xt_0^\omega)^n}{n!}. \quad (\text{A.9})$$

В самом деле, разложив $\chi(xt^\omega)$ в степенной ряд, получаем:

$$\Phi_{t_0}(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t \leq t_0} \frac{x^n t^{n\omega}}{n!} t^\lambda = t_0^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t \leq 1} \frac{x^n t_0^{n\omega}}{n!} t^{n\omega + \lambda}.$$

Отсюда следует утверждение.

А.4. Гамма-функции $\Gamma(\lambda)$ и $\Gamma_{t_0}(\lambda)$. Определим обобщенную гамма-функцию $\Gamma(\lambda)$ и неполную обобщенную гамма-функцию $\Gamma_{t_0}(\lambda), t_0 \in P$, равенствами

$$\Gamma(\lambda) = \Phi(\lambda, -1), \quad \Gamma_{t_0}(\lambda) = \Phi_{t_0}(\lambda, -1),$$

где $\Phi(\lambda, x)$ – обобщенная гипергеометрическая функция, ассоциированная с $\omega = (1, \dots, 1, \dots)$. По определению

$$\langle \Gamma, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(-k, \dots, -k, \dots) \frac{(-1)^k}{k!}, \quad \varphi \in \tilde{\mathcal{D}};$$

в частности, если $\varphi(\lambda) = t_0^\lambda$, то $\langle \Gamma, \varphi \rangle = \exp(-t_0^{-1})$; $\Gamma_{t_0}(\lambda)$ – ограничение этого функционала на подпространство $\tilde{\mathcal{D}}_{t_0}$.

Формально обобщенные функции $\Gamma(\lambda)$ и $\Gamma_{t_0}(\lambda)$ задаются рядами

$$\Gamma(\lambda) = \sum_{t \in P} e^{-t} t^\lambda, \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{t_0}(\lambda) = \sum_{t \leq t_0} e^{-t} t^\lambda. \quad (\text{A.11})$$

Из предложения А.3 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.4. Если $\operatorname{Re} \lambda_n \geq c$, $c > 1$, для всех n , то ряд (А.11) сходится и

$$\Gamma_{t_0}(\lambda) = t_0^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n+\lambda) \frac{(-t_0)^n}{n!}. \quad (\text{A.12})$$

В частности, при $t_0 = 1$ и $\lambda = (s, \dots, s, \dots)$ имеем:

$$\Gamma_{t_0}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n+s) \frac{(-1)^n}{n!},$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана.

Регуляризацию неполной гамма-функции естественно определить как аналитическое продолжение на Λ сходящегося ряда (А.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Aomoto, К. Iguchi. On quasi-hypergeometric functions // Methods Appl. Anal. 1999. V. 6. № 1. P. 55–66.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [3] И. М. Гельфанд. Общая теория гипергеометрических функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 1. С. 14–18.
- [4] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. GG-функции многих переменных и их связь с общими гипергеометрическими функциями // УМН. 1997. Т. 52. № 4. С. 3–48.
- [5] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Гипергеометрические функции над конечными полями // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 6. С. 732–737.
- [6] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. $\mathcal{N}$ -функции и их связь с решениями общих гипергеометрических систем и GG-систем // УМН. 2001. Т. 56. № 4. С. 3–34.
- [7] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро. Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.
- [8] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // УМН. 1992. Т. 47. № 4. С. 3–82.
- [9] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, А. В. Зелевинский. Голономные системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 1. С. 14–19.
- [10] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
- [11] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов. Гипергеометрические функции и торические многообразия // Функции, анализ и его прил. 1989. Т. 23. № 2. С. 12–26.
- [12] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
- [13] Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. Конечные поля. Т. 1. М.: Наука, 1988.