Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:31:08

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЯМИ
И ИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Е. И. Бунина

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ одного языка (первого порядка) $\mathcal{L}$ называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ выполняется в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно выполняется в модели $\mathcal{V}$.

Вопросы элементарной эквивалентности линейных групп были впервые рассмотрены в 1961 г. А. И. Мальцевым. В работе [1] он доказал следующую структурную теорему: *группы $\mathcal{G}_m(K_1)$ и $\mathcal{G}_n(K_2)$ ($\mathcal{G} = GL, PGL, SL, PSL$, $m \geq n \geq 3$, K_1, K_2 — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K_1 и K_2 элементарно эквивалентны.*

Продолжение эта теория получила в 1992 г., когда прогресс в теории моделей позволил К. И. Бейдару и А. В. Михалеву предложить в работе [2] общий способ решения проблем такого типа. С помощью конструкции ультрапроизведения и теоремы Кейслера–Шелаха об изоморфизме (см. [3]) они обобщили теорему Мальцева для случая группы GL над первичными ассоциативными кольцами, содержащими $1/2$, и над телами.

В 2001 г. (см. [4]) Е. И. Буниной были рассмотрены элементарные свойства групп Шевалле над алгебраически замкнутыми полями характеристики, отличной от двух. В данной работе результаты работы [4] распространяются на группы Шевалле над бесконечными полями характеристики, отличной от двух.

Мы не рассматриваем конечные поля, так как две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Основным результатами работы являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если L — некоторая полупростая алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, K_1 и K_2 — элементарно эквивалентные поля характеристики, отличной от двух, то универсальные (присоединенные) группы Шевалле G_1 и G_2 , построенные по алгебре Ли L и по полям K_1 и K_2 соответственно, элементарно эквивалентны.*

Эта теорема доказывается с помощью разложения Брюа групп Шевалле (см. [5]), а также благодаря тому, что известна структура подгрупп H и U каждой группы Шевалле G , а также структура группы Вейля каждой группы Шевалле G (см. [5]). Таким образом, имея фиксированную полупростую алгебру L , мы можем представить каждый элемент группы Шевалле G , построенной по этой алгебре и по полю K , в виде конечной последовательности элементов поля с определенным законом умножения этих последовательностей (не зависящим от базисного поля).

Отсюда можно легко вывести, что если две группы Шевалле построены по данной алгебре L и по элементарно эквивалентным полям, то они элементарно эквивалентны.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что две группы Шевалле G_1 и G_2 построены по бесконечным полям K_1 и K_2 характеристик, отличных от двух, и простым алгебрам Ли L_1 и L_2 ранга, большего одного. Если группы G_1 и G_2 элементарно эквивалентны, то поля K_1 и K_2 элементарно эквивалентны, а алгебры L_1 и L_2 изоморфны.*

В этой теореме мы сначала переходим от групп G_1 и G_2 к их факторам по центрам $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$, которые являются присоединенными группами Шевалле над теми же алгебрами и теми же полями, что и исходные. Далее мы доказываем теорему в случае, когда алгебры Ли L_1 и L_2 являются классическими алгебрами Ли (т.е. имеют тип A_l , B_l , C_l или D_l), при этом пользуемся известными представлениями этих групп. Для каждой из исключительных групп мы рассматриваем максимальное коммутирующее множество инволюций в ней, а для каждой такой инволюции – фактор по центру коммутанта ее централизатора, каждый из которых является прямым произведением одной или двух групп Шевалле. С помощью этих групп мы различаем между собой группы Шевалле, построенные с помощью различных алгебр Ли, а также доказываем, что если группы Шевалле над одной и той же алгеброй Ли элементарно эквивалентны, то и их базовые поля элементарно эквивалентны.

Из этих двух теорем следует необходимое и достаточное условие элементарной эквивалентности двух универсальных (присоединенных) групп Шевалле над простыми алгебрами Ли:

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что две универсальные (присоединенные) группы Шевалле G_1 и G_2 построены по бесконечным полям K_1 и K_2 характеристик, отличных от двух, и простым алгебрам Ли L_1 и L_2 ранга, большего единицы. Тогда группы G_1 и G_2 элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда поля K_1 и K_2 элементарно эквивалентны, а алгебры L_1 и L_2 изоморфны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Мальцев // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961. С. 110–132. [2] С. I. Beidar, A. V. Michalev // Contemp. Math. 1992. V. 131. Part 1. P. 29–35. [3] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн. Теория моделей. М.: Мир, 1977. [4] Е. И. Бунина // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 137–138. [5] Р. Стейнберг. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.07.2004