Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Акимова, Об асимптотическом поведении локально периодической тонкой композитной пластины, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm775>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:44:51

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЛОКАЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТОНКОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ

Е. А. АКИМОВА

Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^2$ – область, ограниченная простым замкнутым контуром $\partial\omega$, $P = \{\xi = (\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \eta_1 \leq l_1, 0 \leq \eta_2 \leq l_2\}$ – призма с прямоугольным основанием и $\varphi_y : P \rightarrow P$ – семейство диффеоморфизмов, гладко зависящих от точки $y = (y_1, y_2)$. Введем замкнутое множество S , расположенное в P , такое, что множество $\Pi_h = \{x : h^{-1}x \in S(y), y \in \mathbb{R}^2\}$ является связным (здесь $S(y) = \varphi_y S$). Пластину Ω_h и ее боковую поверхность Γ_h введем с помощью формул $\Omega_h = \{x = (y, z) : y \in \omega, \frac{x}{h} \in S(y)\}$, $\Gamma_h = \{x : y \in \partial\omega, \frac{x}{h} \in S(y)\}$, $h \in (0, 1]$ – малый параметр. Рассмотрим смешанную краевую задачу теории упругости

$$D(-\nabla_x)^\top A(\xi, y) D(\nabla_x) u(h, x) = f(h, x), \quad x \in \Omega_h, \quad (1)$$

$$D(n)^\top A(\xi, y) D(\nabla_x) u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \partial\Omega_h \setminus \Gamma_h, \quad (2)$$

$$u(h, x) = 0, \quad x \in \Gamma_h, \quad (3)$$

где $u(u_1, u_2, u_3)^\top$ – вектор смещений; A – положительно определенная симметрическая матрица упругих модулей материала пластины, зависящая от медленных y и быстрых $\xi = (\eta_1, \eta_2, \zeta) = (\frac{y_1}{h}, \frac{y_2}{h}, \frac{z}{h})$ переменных; f и g – столбцы объемных сил и поверхностных усилий; n – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\Sigma = \partial\Omega_h \setminus \Gamma_h$; $D(\nabla_x)$ – матрица дифференциальных операторов

$$D(\nabla_x) = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \alpha \partial_2 & \alpha \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \alpha \partial_1 & 0 & \alpha \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_1 & \alpha \partial_2 & \partial_z \end{pmatrix}^\top, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Примем следующие асимптотические анзацы для правых частей и для решения задачи (1)–(3):

$$f(h, x) = h^{-1} f^0(\xi, y) + h^0 \bar{f}^0(y) + \tilde{f}(h, x), \quad (4)$$

$$g(h, y) = h^0 g^0(\xi, y) + \tilde{g}(h, x), \quad (5)$$

$$h^{-2} U^{-2}(y) + h^{-1} U^{-1}(\xi, y) + h^0 U^0(\xi, y) + h^1 U^1(\xi, y) + \dots \quad (6)$$

Члены $f^0, g^0, \bar{f}^0$ анзацев подчиним соотношениям

$$\int_{S(y)} f_3^0 d\xi + \int_{\Sigma(y)} g_3^0 ds_\xi = 0, \quad \bar{f}^0(y) = e^3 \bar{f}_3^0(y).$$

Подставив разложения (4)–(6) в уравнения (1)–(2), получим некие равенства, которым функции U^{-2} и U^{-1} удовлетворяют автоматически, а разрешимость задач на U^0 и U^1 доказана, например, в [1] (см. предложение 2.5.5(2), лемму 6.4.1 и теорему 4.1.4).

С помощью весового анизотропного неравенства Корна (см. [2]) для локально периодической пластины Ω_h : $|u; \Omega_h|^2 \leq c \mathcal{E}(u; \Omega)$, в котором $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h, \Gamma_h)^3$, c не зависит от поля u и параметра h ,

$$\begin{aligned} |u; \Omega_h|^2 = \int_{\Omega_h} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[|\nabla_y u_i|^2 + h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + \rho_h^{-2} |u_i|^2 \right] \right. \\ \left. + |\partial_z u_3|^2 + h^2 \rho_h^{-4} |u_3|^2 \right\} dx, \quad \rho_h(x) = h + \text{dist}\{x, \Gamma_h\}, \end{aligned}$$

доказывается следующая теорема об асимптотике.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f^0 \in H^{1+\gamma}(\omega \rightarrow C_{\text{per}}^{0,\beta}(S(y))^3)$, $g^0 \in H^{1+\gamma}(\omega \rightarrow C_{\text{per}}^{1,\beta}(\Sigma(y))^3)$, $\bar{f}_3^0 \in H^\gamma(\omega)$, $\tilde{f} \in L_2(\Omega_h)^3$, $\tilde{g} \in L_2(\Sigma_h)^3$. Здесь $H^{1+\gamma}(\omega \rightarrow \dots)$ – пространство Соболева–Слободецкого абстрактных функций с нормой

$$\begin{aligned} \|\{f^0, g^0\}; H^{1+\gamma}(\omega \rightarrow \dots)\| &= \left[\int_{\omega} (\|\{f^0(y, \cdot), g^0(y, \cdot)\}; \dots\|^2 \right. \\ &\quad + \|\{\nabla_y f^0(y, \cdot), \nabla_y g^0(y, \cdot)\}; \dots\|^2) dy + \int_{\omega} \int_{\omega} \|\{(\nabla_y f^0)(y, \cdot) \\ &\quad - (\nabla_y f^0)(\mathbf{y}, \cdot), (\nabla_y g^0)(y, \cdot) - (\nabla_y g^0)(\mathbf{y}, \cdot)\}; \dots\|^2 |y - \mathbf{y}|^{-2(1+\gamma)} dy d\mathbf{y} \Big]^{1/2}, \end{aligned}$$

многоточие заменяет область значений, в качестве которой берутся подпространства $C_{\text{per}}^{0,\beta}(S(y))$ и $C_{\text{per}}^{1,\beta}(\Sigma(y))$ функций гёльдеровских классов $C^{0,\beta}(S(y))$ и $C^{1,\beta}(\Sigma(y))$, удовлетворяющих условиям периодичности

$$U|_{\varphi_y(\eta_i=0)} = U|_{\varphi_y(\eta_i=l_i)}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \Big|_{\varphi_y(\eta_i=0)} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \Big|_{\varphi_y(\eta_i=l_i)}, \quad i = 1, 2,$$

или берется прямое произведение $C_{\text{per}}^{0,\beta}(S(y)) \times C_{\text{per}}^{1,\beta}(\Sigma(y))$. Норма в $C_{\text{per}}^{s,\beta}(S(y))$ задается формулой

$$\begin{aligned} \|v; C_{\text{per}}^{s,\beta}(S(y))\| &= \sum_{k=0}^s \sup\{|\nabla_x^k v(x)|; x \in S(y)\} \\ &\quad + \sup\{|x - \mathbf{x}|^{-\beta} |(\nabla_x^s v)(x) - (\nabla_x^s v)(\mathbf{x})|; x, \mathbf{x} \in S(y)\}, \end{aligned} \quad (7)$$

а норма в $C_{\text{per}}^{s,\beta}(\Sigma(y))$ получается из (7) заменой $S(y)$ на $\Sigma(y)$ и ∇_x на касательный градиент ∇_τ . Тогда решение и задачи (1)–(3) и его асимптотическое приближение $\bar{u}^0(h, x) = h^{-2}U^{-2}(y) + h^{-1}U^{-1}(\zeta, y) + h^0U^0(\xi, y)$ связаны неравенством

$$\|u - \bar{u}^0; \Omega_h\| + \|D(\nabla_x)(u) - D(\nabla_x)(\bar{u}^0); L_2(\Omega_h)\| \leq ch^{\gamma-1/2}(\mathcal{N}_{1+\gamma} + \widetilde{\mathcal{N}}_{\gamma-1/2}),$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{N}}_{\gamma-1/2} &= h^{1/2-\gamma} \left[\sum_{i=1}^2 (\|\rho_h \tilde{f}_i; L_2(\Omega_h)\| + h^{-1/2} \|\rho_h \tilde{g}_i; L_2(\Sigma_h)\|) \right. \\ &\quad \left. + h^{-1} \|\rho_h^2 \tilde{f}_3; L_2(\Omega_h)\| + h^{-3/2} \|\rho_h^2 \tilde{g}_3; L_2(\Sigma_h)\| \right], \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_{1+\gamma} = \|\bar{f}_3^0; H^\gamma(\omega)\| + \|\{f^0, g^0\}; H^{1+\gamma}(\omega \rightarrow C_{\text{per}}^{0,\beta}(S(y))^3 \times C_{\text{per}}^{1,\beta}(\Sigma(y))^3)\|;$$

постоянная с не зависит ни от $h \in (0, 1]$, ни от составляющих f^0 , g^0 , $\bar{f}_3^0$ и $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ правых частей задачи.

Результаты, приводимые в данной работе, получены совместно с Г. А. Чечкиным и С. А. Назаровым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Назаров. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002. [2] Е. А. Акимова, С. А. Назаров, Г. А. Чечкин // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 439–442.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: akimova_ea@mail.ru

Принято редколлегией
23.07.2004