Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Герко, О структуре множества полудуализирующих комплексов, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:29:20

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ПОЛУДУАЛИЗИРУЮЩИХ КОМПЛЕКСОВ

А. А. ГЕРКО

Мы работаем в производной категории $\mathcal{D}_b^f(R)$ комплексов с конечным числом (конечно-порожденных) ненулевых гомотомий над коммутативным нётеровым локальным кольцом R . Комплекс $K \in \mathcal{D}_b^f(R)$ называется *полудуализирующим* (см. [1], [2]) если $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(K, K) \simeq R$. Тривиальными примерами таких комплексов являются свободный модуль ранга 1 и дуализирующий комплекс. С каждым полудуализирующим комплексом K связан класс комплексов из $\mathcal{D}_b^f(R)$, имеющих конечную G -размерность относительно этого комплекса: мы говорим, что комплекс X имеет конечную G_K -размерность, если $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, K) \in \mathcal{D}_b^f(R)$ и морфизм $X \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, K), K)$ является квазиизоморфизмом. В этом случае мы полагаем $G_K \dim X = -\inf(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, K)) + \inf(K)$. Классическая G -размерность Ауслендера и Бриджера [3] соответствует случаю $K = R$. Необходимость в изучении структуры множества полудуализирующих комплексов возникает при исследовании поведения классической G -размерности при замене колец, в частности, непосредственно связано с вопросом о транзитивности G -размерности (см. [4]). Для всех известных автору примеров колец, над которыми существуют нетривиальные полудуализирующие комплексы (см. [5]), множество таких комплексов имеет естественную структуру частично упорядоченного множества, идентичную структуре множества всех подмножеств конечного множества. В настоящей работе анонсируются некоторые результаты, дающие основания полагать, что подобная структура может иметь место и в общем случае. Также мы получаем некоторые количественные и качественные результаты для артиновых колец, обладающих, в некотором смысле, максимально возможным количеством полудуализирующих модулей.

ТЕОРЕМА 1. *Если для полудуализирующих комплексов X_1 и X_2 над кольцом R известно, что $G_{X_2} \dim X_1 < \infty$, а комплекс M имеет конечную G -размерность по отношению к X_1 и X_2 , то морфизм $\varphi: \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, X_1) \otimes^L \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X_1, X_2) \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, X_2)$ является изоморфизмом.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Неизоморфные полудуализирующие комплексы $X_0, X_1, \dots, X_n$ образуют цепочку длины n , если $G_{X_i} \dim X_{i-1} < \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если полудуализирующие комплексы $X_0, X_1, \dots, X_n$ образуют цепочку, то имеет место изоморфизм*

$$X_n \simeq X_0 \otimes^L \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X_0, X_1) \otimes^L \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X_1, X_2) \otimes^L \dots \otimes^L \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X_{n-1}, X_n).$$

В качестве следствия получаем, что не существует замкнутых цепочек полудуализирующих модулей, т.е. таких, где $X_n \simeq X_0$ (Для случая цепочек длины 1 с $X_0 \simeq R$ это было показано в [1], а для произвольных цепочек длины 1 в работе [6]).

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если полудуализирующие комплексы $X_0, X_1, \dots, X_n$ образуют цепочку и $X_n \simeq X_0$, то имеет место изоморфизм $X_i \simeq X_j$ для любых i, j .*

Для примера из [5] цепочкам полудуализирующих модулей отвечают цепочки вложенных подмножеств, а следствию 1 – разложение максимального подмножества в цепочке на объединение минимального и дополнений i -го подмножества до $(i+1)$ -го.

Далее кольцо R – артиново.

ГИПОТЕЗА 5. *Если полудуализирующие модули $K_0, K_1, \dots, K_n$ образуют цепочку, то $m^n \neq 0$. Если, при тех же условиях, $m^{n+1} = 0$, то ряд Пуанкаре R имеет вид $\prod_{i=1}^n \frac{1}{(1-d_i t)}$ для некоторых положительных целых d_i .*

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 02-01-00468 и НШ1910.2003.1 “Поддержка ведущих научных школ”.

ТЕОРЕМА 6. Гипотеза 1 справедлива для $n \leq 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Модули $K_1, \dots, K_n$ называются *сильно Тог-независимыми*, если для любого $I \subset \{1, \dots, n\}$ выполнено $\text{amp}(\bigotimes_{i \in I}^L K_i) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Артиново кольцо называется $SD(n)$ -полным, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$;
- (2) имеются сильно Тог-независимые несвободные полудуализирующие модули $K_1, \dots, K_n$ такие, что для любого $I \subset \{1, \dots, n\}$ модуль $\bigotimes_{i \in I}^L K_i$ — полудуализирующий.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если множество полудуализирующих модулей удовлетворяет условию (2) из определения 8, то полудуализирующие модули $X_0 = R, X_k = \bigotimes_{1 \leq i \leq k} K_i$ образуют цепочку.

ПРИМЕР 10. Все негоренштейновы кольца с $\mathfrak{m}^2 = 0$ являются $SD(1)$ -полными. Кольцо с $\mathfrak{m}^3 = 0$ является $SD(2)$ -полным, если существует нетривиальный полудуализирующий R -модуль. Кольцо $\bigotimes_k^{1 \leq i \leq n} k \ltimes k^{a_i}$ является $SD(n)$ -полным в соответствии с [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для $SD(n)$ -полного кольца модуль $\bigotimes K_i$ является дуализирующим.

Численные инварианты $SD(n)$ -полных колец устроены так же просто, как и для кольца $\bigotimes_k^{1 \leq i \leq n} k \ltimes k^{a_i}$, в частности, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Если R — $SD(n)$ -полное кольцо, $K_1, \dots, K_n$ — соответствующие полудуализирующие модули, то для любого i ряд Басса модуля $K_{-i} = \bigotimes_{j \neq i} K_j$ есть

$$I_{K_{-i}}(t) = \frac{\mu^0(K_{-i}) - t}{1 - \mu^0(K_{-i})t}, \text{ а ряд Пуанкаре } K_i \text{ есть } P_{K_i}(t) = \frac{\beta_0(K_i) - t}{1 - \beta_0(K_i)t}.$$

Для случая $SD(2)$ -полных колец можно получить дополнительную информацию — структура таких колец оказывается похожей на структуру колец с $\mathfrak{m}^3 = 0$ над которыми имеется нетривиальный модуль нулевой G -размерности (см. [7]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Если R — $SD(2)$ -полная алгебра над полем, K — нетривиальный полудуализирующий модуль над ней, то на алгебре и на модуле имеется естественная градуировка, причем функции Гильберта имеют вид $H_R(t) = (1 + \beta_0(K)t)(1 + \mu^0(K)t)$, $H_K(t) = (\beta_0(K) + t)(1 + \mu^0(K)t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. $SD(2)$ — полная алгебра над полем Козюлева, т. е. $\text{Ext}_R^i(k, k)_j = 0$ для $i \neq j$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. W. Christensen // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 353. №5. P. 1839–1883.
 [2] А. А. Герко // Матем. сб. 2001. Т. 192. №8. С. 79–94. [3] M. Auslander, M. Bridger // Mem. Amer. Math. Soc. 1969. V. 94. [4] L. L. Avramov, H.-B. Foxby // Proc. London Math. Soc. (3). 1997. V. 75. №2. P. 241–270. [5] А. А. Герко. Об удобных модулях и G -совершенных идеалах // УМН. 2001. Т. 56. №4. С. 141–142. [6] T. Araya, R. Takahashi, Y. Yoshino. Homological invariants associated to semidualizing bimodules // Preprint, 2002. [7] Y. Yoshino // NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. 2003. V. 115. P. 255–273.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gerko@mccme.ru

Принято редколлегией
23.07.2004