Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Переплетенные нули и разделенные разности, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:05:41

ПЕРЕПЛЕТЕННЫЕ НУЛИ И РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

Г. Г. Ильяута

У многочлена с вещественными простыми нулями знаки критических значений чередуются, что остается справедливым для разделенных разностей фиксированного порядка в последовательных критических точках и позволяет сопоставить многочлену специального вида элемент высшего порядка Брюа [1]. Ниже эти факты обобщаются в нескольких направлениях, в частности, для разделенных разностей по системам Чебышева и значений функции в нулях старших производных. Основой для построения чередующихся знаков последовательностей служат вариации и обобщения теоремы Лагранжа о промежуточном значении [2]–[5] и детерминантное тождество Сильвестра. Чередование знаков разделенных разностей вытекает из переплетенности (чередования) нулей многочлена и его производной и остается справедливым для любой пары функций с переплетенными нулями (берутся разделенные разности одной функции в нулях другой), например, для многочленов системы Штурма, ортогональных многочленов или собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Критерии переплетенности нулей многочленов f и g , степени которых отличаются не более чем на 1 [6], [7], приводят к следующим фактам: разделенные разности фиксированного порядка любого из этих многочленов в последовательных нулях другого чередуют знак, если выполнено хотя бы одно из условий: для любых $a, b \in \mathbb{R}$ $af + bg$ имеет вещественные простые нули; матрица Безу многочленов f, g положительно или отрицательно определена. Рассматривая значения производной в нулях самой функции, приходим к чередующейся последовательности старших коэффициентов касательных в нулях. Этот пример обобщается следующим фактом, встречающимся у Пуанкаре (см. [8]): если нули векторного поля (P, Q) в $\mathbb{R}^2$ невырождены и кривая $P = 0$ не имеет особенностей, то знаки якобиана в нулях чередуются на кривой $P = 0$. В [9] изучаются комбинаторные объекты, играющие роль высших порядков Брюа для чередования знаков сумм критических значений.

Для полной системы Чебышева $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ на интервале I [2], набора действительных чисел $X = \{x_1 \leq \dots \leq x_n\} \subset I$ и функции f обозначим через P_f интерполирующую функцию вида $\sum a_i h_i$, т.е. при $\dots < x_p = \dots = x_q < \dots$ $P_f^{(t)}(x_p) = f^{(t)}(x_p)$, $0 \leq t \leq q - p$ (при совпадении узлов интерполяции соответствующие строки определителя из леммы 1 заменяются производными p -й строки). Набор функций $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ назовем общим, если функции $P_{f_1}, \dots, P_{f_k}, h_{n-k}, \dots, h_1$ линейно независимы.

ЛЕММА 1. *Общность набора F эквивалентна условию*

$$[F, X] = \det(f_1(x_i) \dots f_k(x_i) h_{n-k}(x_i) \dots h_1(x_i)) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 1. 1) Если вронскиан функций $f, h_{n-1}, \dots, h_1$ непрерывен на I и меняет знак в каждом из своих вещественных нулей $\dots < x_i < \dots$ на I , для $0 < t_i < n$ $X(t_i)$ состоит из t_i ($n - t_i$) экзemplяров x_i (x_{i+1}), то последовательность $\dots, [f, X(t_i)], \dots$ чередует знак. 2) Если последовательность $\dots, b_i, \dots$ чередует знак, $H \setminus h_s$ образует полную систему Чебышева на I и $\dots < x_i < \dots \subset I$, то чередует знак последовательность коэффициентов при h_s в интерполирующих функциях наборов точек $\dots, \{(x_i, b_i), \dots, (x_{i+n-1}, b_{i+n-1})\}, \dots$. 3) Для $p < q$ и $x_1 < x_n$ имеем тождества

$$\begin{aligned} [F, X][F \setminus \{f_p, f_q\}, X \setminus \{x_1, x_n\}] &= [F \setminus f_q, X \setminus x_n][F \setminus f_p, X \setminus x_1] \\ &\quad - [F \setminus f_q, X \setminus x_1][F \setminus f_p, X \setminus x_n], \\ [F, X][F \setminus f_p, X \setminus \{x_1, x_n\}] &= [F, X \setminus x_n][F \setminus f_p, X \setminus x_1] - [F, X \setminus x_1][F \setminus f_p, X \setminus x_n]. \end{aligned}$$

Используя, например, первое тождество, получаем способ индуктивного построения чередующихся знаков последовательностей. Для $\dots < x_i < \dots \subset I$ пусть $X_i^n = \{x_i, \dots, x_{i+n-1}\}$. Если последовательность $\dots, [F \setminus f_p, X_i^{n-1}], \dots$ ($\dots, [F \setminus f_q, X_i^{n-1}], \dots$) чередует (сохраняет) знак или наоборот, то из чередования (сохранения) знака последовательности $\dots, [F \setminus \{f_p, f_q\}, X_i^{n-2}], \dots$ следует сохранение (чередование) знака последовательности $\dots, [F, X_i^n], \dots$.

Приведем примеры. Если для всех i $h_i = x_i^{i-1}$, то в п. 1) вронскиан сводится к $f^{(n-1)}$, а $[f, X(1)]$ – к остатку ряда Тейлора. Если $2t_i = n$ ($2t_i + 1 = n$), то явные формулы для $[f, X(t_i)]$ имеются в [10] ([11]). Простейшими примерами для п. 3) являются следующие факты: если f'' меняет знак в своих нулях $\dots < x_i < \dots$ и все перегибы графика f лежат по одну сторону от оси x , то чередует знак последовательность $\dots, f(x_i)f'(x_{i+1}) - f(x_{i+1})f'(x_i), \dots$; если f меняет знак и выпукла вверх (вниз) во всех своих нулях $\dots < x_i < \dots$, то чередует знак последовательность $\dots, f'(x_i)f''(x_{i+1}) - f'(x_{i+1})f''(x_i), \dots$. Приведем еще несколько следствий теорем о промежуточном значении [3]–[5].

ТЕОРЕМА 2. Если функция G непрерывна и меняет знак в своих вещественных нулях $\dots < x_i < \dots$, то в следующих случаях последовательность $\dots, A_i, \dots$ чередует знак (предполагая, что в 1) $P'_j = P_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$, $P_0 = 1$, в 2) $f'(x_i) \neq f'(x_{i+1})$, в 3) знаменатели не равны 0 и $0 < p < 1$):

- 1) $A_i = \sum_{j=0}^n (-1)^j (P_j(x_{i+1})f^{(j)}(x_{i+1}) - P_j(x_i)f^{(j)}(x_i)), \quad G = P_n f^{(n+1)}$;
- 2) $A_i = 8 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - 4(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) + (f'(x_i) + f'(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)^2$,
 $G = f''$;
- 3) $A_i = \frac{pf(x_i) + (1-p)f(x_{i+1}) - f(px_i + (1-p)x_{i+1})}{pg(x_i) + (1-p)g(x_{i+1}) - g(px_i + (1-p)x_{i+1})}, \quad G = \frac{f''}{g''}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если для всех i $h_i = x_i^{i-1}$ и $x_1 < \dots < x_n$, то условие общности функции f эквивалентно следующему: не существует рациональной 1-формы ω , которая имеет простые полюсы в $x_1, \dots, x_n$, регулярна в бесконечности и для $j = 0, \dots, n-1$ $\text{res}(z^j \omega) = \text{res}(z^j f(z)dz / \prod (z - x_i))$. Эта переформулировка подсказана принадлежащим Ф. Гриффитсу обращением интерполяционной формулы Лагранжа [12], которое вместе с самой формулой Лагранжа описывает аналитический вариант двойственности ориентированных матроидов. 2. Используя [13], факт чередования знаков разделенных разностей многочлена f в нулях f' можно сформулировать следующим образом: если элементы матрицы A $a_{ii} = x_i$, $a_{ii+1} = 1$, $i = 1, \dots, n$, и остальные элементы равны 0, то у матрицы $f(A)$ выше главной диагонали строки (столбцы) чередуют (сохраняют) знак. 3. Если для всех i $h_i = x_i^{i-1}$, то $[F, X]$ с точностью до умножения на определитель Вандермонда есть результат применения симметризатора Лагранжа–Сильвестра к функции $\det(f_j(y_i)) / \det(y_i^{j-1})$ [14]. 4. Связь полученных чередующихся знаков последовательностей с высшими порядками Брюа устанавливается аналогично [1] (при допущении совпадения узлов интерполяции [15]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Г. Ильюта // Докл. РАН. 1996. Т. 347. С. 306–308. [2] A. Horwitz // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 200. P. 126–148. [3] J. Malešević // Mat. Bilten. 2003. V. 27. P. 37–44. [4] J. Pecaric, P. Wong // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2001. V. 6. P. 329–340. [5] A. Mercer // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 229. P. 677–681. [6] M. Álvarez, G. Sansigre // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1171. P. 255–258. [7] J. Dedieu // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V. 81. P. 269–278. [8] A. Cima, J. Llibre // J. Differential Equations. 1989. V. 82. P. 71–97. [9] D. MacLagan // Order. 1998/1999. V. 15. P. 279–295. [10] A. Horwitz // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 191. P. 618–632. [11] J. López, N. Temme // Stud. Appl. Math. 2002. V. 109. P. 297–311. [12] P. Griffiths // Invent. Math. 1976. V. 35. P. 321–390. [13] G. Opitz // Z. Angew. Math. Mech. 1964. V. 44. P. 52–54. [14] Г. Г. Ильюта // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 3–34. [15] Г. Г. Ильюта // Функциональный анализ и его прил. 1998. Т. 32. № 3. С. 76–79.