Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Карпенков, О двумерных цепных дробях целочисленных гиперболических матриц с небольшой нормой, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:34:23

О ДВУМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЯХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МАТРИЦ С НЕБОЛЬШОЙ НОРМОЙ

О. Н. КАРПЕНКОВ

Назовем две цепные $(k-1)$ -мерные дроби (см. [1]) *эквивалентными*, если существует линейная замена координат пространства $\mathbb{R}^k$, сохраняющая целочисленную решетку, которая переводит одну цепную дробь в другую. В этой заметке мы приводим классификацию двумерных цепных дробей кубических иррациональностей, построенных по матрицам с нормой меньше семи, с точностью до описанного отношения эквивалентности многомерных цепных дробей, опираясь на свойства семейства матриц фробениусова типа. Под нормой матрицы здесь понимается сумма модулей ее коэффициентов. В заключение строится пример матрицы не фробениусова типа. Автор благодарен В. И. Арнольду за постоянное внимание к этой работе и полезные замечания.

Обозначим через $M(k, \mathbb{Z})$ множество $(k \times k)$ -матриц с целыми коэффициентами, характеристические многочлены которых неприводимы над полем $\mathbb{Q}$. Отметим, что не существует матриц множества $M(3, \mathbb{Z})$ с нормой меньше трех, а количество матриц множества $M(3, \mathbb{Z})$ с нормой четыре, пять и шесть равно, соответственно, 240, 1248 и 8112.

Пусть $H(k, \mathbb{Z})$ – подмножество матриц из $M(k, \mathbb{Z})$, по которым возможно построить многомерные цепные дроби, т.е. $H(k, \mathbb{Z})$ – подмножество *гиперболических* матриц, все собственные значения которых вещественны и различны. Количество матриц множества $H(3, \mathbb{Z})$ с нормой меньше четырех, пять и шесть равно соответственно 0, 48 и 912.

Фробениусовой матрицей $M_{a_1, \dots, a_k}$ называется $(k \times k)$ -матрица, полученная из единичной матрицы размера $(k-1) \times (k-1)$ дописыванием слева столбика из нулей, а затем снизу строки чисел $(a_k, \dots, a_1)$. Отметим, что характеристический многочлен такой матрицы равен $\chi(x) = (-1)^k (x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_{k-1} x - a_k)$. Кроме того, матрица $M_{a_1, \dots, a_k}$ совпадает с матрицей умножения на элемент x в поле $\mathbb{Q}[x]/(\chi(x))$.

Назовем матрицу множества $H(k, \mathbb{Z})$ матрицей *фробениусова типа*, если ее многомерная цепная дробь эквивалентна некоторой многомерной цепной дроби, построенной по какой-либо фробениусовой матрице с целыми коэффициентами. Или, что эквивалентно, матрица A из $H(k, \mathbb{Z})$ называется матрицей *фробениусова типа*, если существуют целые числа $a_1, \dots, a_k$ и матрица X из группы $SL(k, \mathbb{Z})$, при которых матрица XAX^{-1} коммутирует с $M_{a_1, \dots, a_k}$. Это определение естественно обобщается на матрицы множества $M(k, \mathbb{Z})$: нужно заменить $H(k, \mathbb{Z})$ на $M(k, \mathbb{Z})$.

ТЕОРЕМА 1. *Все матрицы множества $M(3, \mathbb{Z})$, норма которых не превосходит шести, являются матрицами фробениусова типа.*

Теорема 1 существенно облегчает классификацию двумерных цепных дробей кубических иррациональностей, построенных по матрицам с нормой, не превосходящей шести.

Итак, в множестве $H(3, \mathbb{Z})$ матриц с нормой меньше пяти нет. Если норма равна пяти, то двумерная цепная дробь, построенная по такой матрице, эквивалентна цепной дроби, построенной по матрице $M_{-1, 2, 1}$. Такая дробь называется *золотым сечением*. Триангуляция тора (геоморфный тип) этой двумерной цепной дроби для паруса, содержащего точку $(0, 0, 1)$:

– построена в работе Е. И. Коркиной (см. [2]). Если норма матрицы равна шести, то возможны только следующие три варианта: соответствующая цепная дробь эквивалентна либо золотому сечению

(для 480 матриц); либо цепной дроби матрицы $M_{-1, 3, 1}$:

(для 240 матриц); либо цепной дроби матрицы $M_{0, 3, 1}$:

(для 192 матриц). Приведенная классификация, а также доказательство теоремы 1 опирается на обобщение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Матрица $A = (a_{ij})$ из $M(2, \mathbb{Z})$, где $1 \leq i, j \leq 2$, является матрицей фробениусова типа тогда и только тогда, когда существует целочисленное реше-*

ние y следующего уравнения: $|Q_A(x, y)| = 1$, где $Q_A(x, y) = (a_{12}x^2 + (a_{22} - a_{11})xy - a_{21}y^2)(\text{НОД}(a_{12}, a_{21}, a_{22} - a_{11}))^{-1}$.

Через $\Xi(C)$ обозначим множество целочисленных матриц, коммутирующих с C . Множество матриц $\Xi(C)$, где матрица C из множества $M(k, \mathbb{Z})$, является группой по сложению, изоморфной $\mathbb{Z}^k$.

Пусть единичная матрица E и целочисленные матрицы A и B образуют базис группы $\Xi(C)$, где $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$. Поскольку B входит в группу $\Xi(C)$, $B = \alpha A^2 + \beta A + \gamma E$, где коэффициенты многочлена α, β и γ – рациональные числа. Пусть характеристический многочлен матрицы A равен $\chi(x) = -x^3 + a_1x^2 - a_2x + a_3$. Положим по определению

$$\begin{aligned} \bar{P}(m, n) = & m^3 + (2a_1\alpha + 3\beta)m^2n + ((a_2 + a_1^2)\alpha^2 + 4a_1\alpha\beta + 3\beta^2)mn^2 \\ & + ((a_1a_2 - a_3)\alpha^3 + (a_2 + a_1^2)\alpha^2\beta + 2a_1\alpha\beta^2 + \beta^3)n^3. \end{aligned}$$

Для матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ положим по определению $\langle ij, kl \rangle_{A, B} = a_{ij}b_{kl} - a_{kl}b_{ij}$ (все индексы пробегают целые числа от одного до трех). Зададим следующий многочлен:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{A, B}(x, y, z) = & \langle 12, 13 \rangle_{A, B}x^3 + \langle 23, 21 \rangle_{A, B}y^3 + \langle 31, 32 \rangle_{A, B}z^3 \\ & + (\langle 13, 11 \rangle_{A, B} + \langle 22, 13 \rangle_{A, B} + \langle 12, 23 \rangle_{A, B})x^2y \\ & + (\langle 22, 23 \rangle_{A, B} + \langle 23, 11 \rangle_{A, B} + \langle 13, 21 \rangle_{A, B})xy^2 \\ & + (\langle 33, 12 \rangle_{A, B} + \langle 12, 11 \rangle_{A, B} + \langle 32, 13 \rangle_{A, B})x^2z \\ & + (\langle 32, 33 \rangle_{A, B} + \langle 11, 32 \rangle_{A, B} + \langle 31, 12 \rangle_{A, B})xz^2 \\ & + (\langle 21, 22 \rangle_{A, B} + \langle 33, 21 \rangle_{A, B} + \langle 23, 31 \rangle_{A, B})y^2z \\ & + (\langle 31, 22 \rangle_{A, B} + \langle 33, 31 \rangle_{A, B} + \langle 21, 32 \rangle_{A, B})yz^2 \\ & + (\langle 11, 22 \rangle_{A, B} + \langle 22, 33 \rangle_{A, B} + \langle 33, 11 \rangle_{A, B} + 3\langle 13, 31 \rangle_{A, B})xyz. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Матрица C из $M(3, \mathbb{Z})$ является матрицей фробениусова типа тогда и только тогда, когда существует целочисленное решение следующего уравнения с целыми коэффициентами на неизвестные x, y, z, m и n : $|Q_{A, B}(x, y, z; m, n)| = 1$, где $Q_{A, B}(x, y, z; m, n) = \bar{P}_{A, B}(m, n)\tilde{P}_{A, A^\vee}(x, y, z)$. Здесь E, A и B – базис группы $\Xi(C)$, а через $A^\vee$ обозначена матрица, на (ij) -м месте которой стоит дополнительный минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 3. Следующая матрица не фробениусова типа:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & 29 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для базиса E, A и $B = \frac{A^2}{2} - 15A + \frac{29E}{2}$ класса $\Xi(A)$ уравнение $|Q_{A, B}| = 1$ не разрешимо в целых числах, поскольку оно не разрешимо по модулю семь. Следовательно, по теореме 3 матрица A – не фробениусова типа.

Норма построенной матрицы равна 42, о существовании матрицы не фробениусова типа с меньшей нормой автору ничего неизвестно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. И. Арнольд. Цепные дроби. М.: МЦНМО, 2002. [2] Е. И. Коркина // Труды МИАН. 1995. Т. 209. С. 143–166.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: karpnk@mccme.ru

Принято редколлегией
23.07.2004