Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, Теоремы сравнения для дивергентных эллиптических неравенств, содержащих члены с младшими производными, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:15:15

**ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ
ЧЛЕНЫ С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

А. А. Коньков

Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а L – дифференциальный оператор вида

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

с локально ограниченными измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности

$$C_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C_2 |\xi|^2, \quad C_1, C_2 > 0,$$

для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Договоримся о следующих обозначениях: $Q_r = \{x : |x| < r\}$, $B_r = \{x : |x| \leq r\}$ и $S_r = \{x : |x| = r\}$. По умолчанию будем предполагать, что $0 \leq R_0 < R \leq \infty$ и при этом $\Omega \cap S_r \neq \emptyset$ для любого $r \in (R_0, R)$.

Неотрицательная функция $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0}) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0})$ называется решением неравенства

$$Lu \geq F(x, u) \quad \text{в } \Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0}, \quad (1)$$

где $F: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, если $F(\cdot, u(\cdot)) \in L_{\infty,\text{loc}}(\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0})$ и при этом

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ & + \int_{\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0}} \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \geq \int_{\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0}} F(x, u) \varphi dx \end{aligned}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0})$ [1].

Пишем также, что

$$u|_{\partial\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0}} = 0, \quad (2)$$

если $\eta u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ для любой функции $\eta \in C_0^\infty(Q_R \setminus B_{R_0})$. В случае $\partial\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0} = \emptyset$ условие (2), очевидно, справедливо для всякой функции $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega \cap Q_R \setminus B_{R_0})$.

Обозначим, далее,

$$M(r; u) = \operatorname{ess\,sup}_{S_r \cap \Omega} u.$$

Вопросы, рассматриваемые в этом сообщении, исследовались рядом авторов [1]–[4]. Ниже мы приводим две теоремы сравнения для дивергентных эллиптических неравенств вида (1). В недивергентном случае аналогичные результаты были ранее доказаны автором в работе [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma > 1$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – некоторые вещественные числа, и пусть $b: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $f: [R_0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченные измеримые функции такие, что

$$\begin{aligned} b(r) &\geq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (B_{\frac{r}{\sigma}} \cup B_{R_0})} \sum_{i=1}^n |b_i(x)| \quad \text{для всех } r \in (R_0, \infty), \\ f(r, t) &\leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap Q_{r\sigma} \setminus (B_{\frac{r}{\sigma}} \cup B_{R_0})} F(x, t) \quad \text{для всех } r \in (R_0, \infty), t \in (0, \infty), \\ f(r, t-0) &= f(r, t) \quad \text{для всех } r \in (R_0, \infty), t \in (0, \infty), \\ f(r, t_1) &\leq f(r, t_2) \quad \text{для всех } r \in (R_0, \infty), 0 < t_1 \leq t_2. \end{aligned}$$

Предположим, что u – неотрицательное решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} M(R_0 + 0; u) &> 0, \\ M(r_1; u) &\leq M(r_2; u) \quad \text{для всех } R_0 < r_1 \leq r_2 < R. \end{aligned}$$

Тогда найдутся константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$, зависящие только от n , σ , k_1 , k_2 , а также от постоянных эллиптичности C_1 , C_2 оператора L , такие, что на промежутке $[R_0, R)$ существует решение задачи Коши

$$\begin{aligned} m'' + \left(\frac{1+k_1}{r} + k_2 b(r) \right) m' &= \alpha f(r, \beta m), \\ m(R_0) &= M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

для которого при всех $r \in (R_0, R)$ справедлива оценка

$$M(r; u) \geq m(r) > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $n \geq 3$, полагая $k_1 = n - 2$ и $k_2 = 1$, получим в левой части уравнения (3) радиальную компоненту оператора $\Delta + b(|x|)\nabla|x| \cdot \nabla$.

Теорема 1 вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда найдутся константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$, зависящие только от n , σ , k_1 , k_2 , C_1 , C_2 , такие, что для любого $r \in (R_0, R)$

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \alpha \int_{R_0}^r K(r, \xi) f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi,$$

где

$$K(r, \xi) = \int_{\xi}^r d\rho \left(\frac{\xi}{\rho} \right)^{1+k_1} e^{-k_2 \int_{\xi}^{\rho} b(s) ds}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. [2] А. А. Кор'ков // Nonlinear Anal. 2000. V. 42. №7. P. 1253–1270. [3] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Матем. сб. 1988. Т. 135. №3. С. 346–360. [4] Э. Митидиери, С. И. Похожаев // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 1–384.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: konkov@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.07.2004