Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Дроздовский, В. В. Филиппов, Селекционная теорема для нового класса многозначных отображений, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 235–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:33:38

СЕЛЕКЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НОВОГО КЛАССА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. А. Дроздовский, В. В. Филиппов

В данной работе вводится новый класс многозначных отображений, включающий в себя все полунепрерывные снизу и полунепрерывные сверху многозначные отображения, для которого доказывается селекционная теорема.

Рассматриваемый класс многозначных отображений $\varphi: X \rightarrow \text{exr } Y$ определяется условием

- (*) для любой точки $x \in X$ и для любых открытого подмножества U пространства Y , содержащего множество $\varphi(x)$, и открытого подмножества V пространства Y , пересекающего множество $\varphi(x)$, существует такая окрестность W точки x , что для каждой точки $z \in W$ верно хотя бы одно из двух условий:

- 1) $\varphi(z) \subset U$;
- 2) $\varphi(z) \cap V \neq \emptyset$.

Основным результатом является

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – наследственно нормальный паракомпакт, Y – полное метрическое пространство, многозначное отображение $\varphi: X \rightarrow \text{exr}_c Y$ удовлетворяет условию (*). Тогда существует полунепрерывная сверху селекция $\psi: X \rightarrow \text{exr}_c Y$ отображения φ .

Теорема 1 имеет приложения к теории дифференциальных включений, а именно, при рассмотрении дифференциального включения $y' \in \varphi(t, y)$, правая часть которого компактнозначна и удовлетворяет условию (*), мы можем перейти к полунепрерывной сверху селекции ψ отображения φ . Дифференциальное включение $y' \in \psi(t, y)$ удовлетворяет условиям Дэви, и для него существует хорошо разработанная теория задачи Коши, см., например, [2]. В частности, мы имеем теорему существования решения задачи Коши для включения $y' \in \psi(t, y)$. Это сразу дает нам теорему существования решения задачи Коши для исходного включения $y' \in \varphi(t, y)$.

С другой стороны, в теории дифференциальных включений есть достаточно известные утверждения, где правая часть частью полунепрерывна сверху, частью полунепрерывна снизу, см. [3]–[5]. Вводимый класс многозначных отображений может оказаться удобным инструментом в исследовании таких ситуаций, являясь здесь максимально широким.

Необходимость требования наследственной нормальности пространства X в теореме 1 показывает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – T_1 -пространство, $Y = \{0; 1\}$ – дискретное двоеточие. Если любое многозначное отображение из X в $\text{exr } Y$ со свойством (*) имеет полунепрерывную сверху селекцию, то пространство X наследственно нормально.

Изложим кратко схему доказательства теоремы 1.

Тихоновское пространство X имеет абсолют $A(X)$, который экстремально несвязен. Соответствующее отображение $\pi_X: A(X) \rightarrow X$ совершенно. Так как X – паракомпакт, $A(X)$ тоже является паракомпактом.

Вследствие наследственной нормальности X и экстремальной несвязности $A(X)$ в каждой точке $x \in A(X)$ множество $\theta(x) = \liminf_{y \rightarrow x} \varphi \pi_X(y)$ непусто, и селекция $\theta: A(X) \rightarrow \text{exr}_c Y$ отображения $\varphi \pi_X$ полунепрерывна снизу.

Согласно компактнозначной теореме Майкла о селекциях [1], существует полунепрерывная сверху компактнозначная селекция η отображения θ . Отображение $\psi = \eta \pi_X^{-1}$ компактнозначно и является полунепрерывной сверху селекцией для φ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00061).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – наследственно нормальный паракомпакт, X_0 – его замкнутое подмножество, Y – полное метрическое пространство, многозначное отображение $\varphi: X \rightarrow \text{exr}_c Y$ полунепрерывно снизу. Тогда всякая полунепрерывная свертку селекция $\psi: X_0 \rightarrow \text{exr}_c Y$ отображения $\varphi|_{X_0}$ продолжается на все X до полунепрерывной свертку компактнозначной селекции отображения φ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в условиях следствия 1 отказаться от замкнутости множества X_0 , но предположить дополнительно локальную компактность пространства Y и непрерывность отображения φ , то утверждение следствия 1 останется в силе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Michael E. // Duke Math. J. 1959. V. 26. P. 647–652. [2] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993. [3] Aversa D., Marano S. A. // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. [4] Bressan A. // Pure Appl. Math. 1990. V. 133. P. 21–31. [5] Lojasiewicz S. // Banach Center Publ. 1985. V. 14. P. 625–643.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.04.1998