Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Котельникова, О лакунах в спектре одного эллиптического оператора на периодической сетке, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:59:27

О ЛАКУНАХ В СПЕКТРЕ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СЕТКЕ

А. А. КОТЕЛЬНИКОВА

На плоскости рассматривается периодический связный граф $F = F_1 \cup F_0$ с ячейкой периодичности $\square = [0, 1)^2$ (см. рис. 1). На каждом ребре графа F зададим периодическую нормированную меру μ , пропорциональную мере Лебега. Определим также ε -периодическую меру μ_ε равенством $\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^2 \mu(\varepsilon^{-1}B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^2$ и, следуя [1] и [2], введем соболевское пространство $H^1(\mathbb{R}^2, d\mu_\varepsilon)$.

Рис. 1

В связи с изучением моделей “двойной пористости” [1] ставится задача исследования поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2, d\mu_\varepsilon)$ уравнения

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + u_\varepsilon = f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad a_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_{\varepsilon,1}, \\ \varepsilon^2, & x \in F_{\varepsilon,0}, \end{cases} \quad (1)$$

где $F_{\varepsilon,1}, F_{\varepsilon,0}$ – гомотетические сжатия множеств F_1, F_0 ; $F_\varepsilon = F_{\varepsilon,1} \cup F_{\varepsilon,0}$.

Мы рассматриваем также более реалистичскую задачу, когда ребра графа $F_\varepsilon^h = F_{\varepsilon,1}^h \cup F_{\varepsilon,0}^h$ имеют толщину $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом аналогом (1) служит

$$\mathcal{A}_\varepsilon^h u_\varepsilon^h + u_\varepsilon^h = f, \quad \mathcal{A}_\varepsilon^h = -\operatorname{div}(a_\varepsilon^h \nabla), \quad (2)$$

где $a_\varepsilon^h = 1$ на $F_{\varepsilon,1}^h$ и $a_\varepsilon^h = \varepsilon^2$ на $F_{\varepsilon,0}^h$. Через μ_ε^h обозначим соответствующую рассматриваемой задаче ε -периодическую меру. Решения $u_\varepsilon^h \in H^1(\mathbb{R}^2, d\mu_\varepsilon^h)$ имеют сильный двухмасштабный предел:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} |u_\varepsilon^h(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon^h = 0,$$

где $u(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \square, dx \times d\mu)$ периодична по y и принадлежит классу

$$V \equiv \{u(x, y) = u_1(x) + u_0(x, y); u_1 \in H^1(\mathbb{R}^2), u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2, H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)), u_0|_{F_1} = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u = u_1 + u_0 \in V$ называется решением предельного уравнения, если для любой функции $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0 \in V$ справедливо интегральное тождество

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\square} \nabla_y u_0 \cdot \nabla_y \varphi_0 dx d\mu + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\square} u \varphi dx d\mu = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\square} f \varphi dx d\mu. \quad (3)$$

Здесь ∇_y – градиент функции, заданной на графе F_0 .

Левая часть (3) задает замкнутую симметрическую билинейную форму на V , и потому предельное уравнение записывается в виде $\mathcal{A}u + u = f$, где $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в гиль-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00114).

бертовом пространстве $H = \overline{V}$ – замыкании V в $L^2(\mathbb{R}^2 \times \square, dx \times d\mu)$. Предельное уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 u_1 + u_1 + \int_{F_0 \cap \square} u_0 d\mu = f \text{ в } \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{A}_0 u_0 + u_1 + u_0 = f \text{ на } F_0 \cap \square. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $-2\mathcal{A}_1 = \Delta_x$ – классический лапласиан в $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}_0$ – оператор в $L^2(F_0, d\mu)$, равный прямой сумме лапласианов, отвечающих задачам Дирихле на каждом ребре F_0 . Спектр оператора $\mathcal{A}_0$ состоит из собственных значений $\alpha_k = (2k)^2 \pi^2 / l^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\omega_k = (2k-1)^2 \pi^2 / l^2$, $k = 1, 2, \dots$, где $l \in (0, 1)$ – длина ребра F_0 . Положим

$$\beta(s) = s + s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\omega_n - s}, \quad c_n = \int_{F_0 \cap \square} \varphi_n d\mu, \quad \mathcal{A}_0 \varphi_n = \omega_n \varphi_n, \quad \int_{F_0 \cap \square} \varphi_n^2 d\mu = 1$$

и обозначим нули функции $\beta(s)$ через ν_k ($k \in \mathbb{N}$).

Рис. 2

ТЕОРЕМА 1. *Непрерывный спектр предельного оператора $\mathcal{A}$ состоит из объединения отрезков $\bigcup_{k=1}^{\infty} [\nu_k, \omega_k]$. Если $0 < l \leq \frac{1}{3}$, то дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ пуст. Если $\frac{3}{4} < l < 1$, то при достаточно большом k собственное значение α_k попадает в интервал (ω_k, ν_{k+1}) и, таким образом, принадлежит дискретному спектру $\mathcal{A}$.*

На рис. 2 выделена бесконечная система интервалов, где функция $\beta(s)$ отрицательна. Эти интервалы могут содержать лишь точки дискретного спектра оператора $\mathcal{A}$ из множества $\{\alpha_k\}$, в которых $\beta(\alpha_k) < 0$. Смежные отрезки, на которых $\beta(s) \geq 0$, принадлежат непрерывному спектру $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^h$ сходится по Хаусдорфу к спектру оператора $\mathcal{A}$. В частности, спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^h$ имеет лакуны, число которых неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, для случая ограниченной области и $h = 0$ установлены в [3]. Автор благодарит В. В. Жикова за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Жиков // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72. [2] В. В. Жиков // Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 22. М.: Изд-во МГУ, 2002. С. 105–120. [3] A. A. Kotelnikova, V. V. Zhikov. Spectral aspects in double-porosity models // Abstracts of the International Workshop ANASTHEM, Saint Petersburg, Russia, 2000. P. 38–41.