Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Спектральные подмногообразия главно поляризованного абелева многообразия, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm782>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:17:29

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ГЛАВНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО АБЕЛЕВА МНОГООБРАЗИЯ

А. Е. МИРОНОВ

В данной заметке построены коммутирующие матричные дифференциальные операторы по многим переменным, отвечающие алгебраическим подмногообразиям в главно поляризованном абелевом многообразии, а также многомерный аналог иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП).

Обозначим через X^g главно поляризованное абелево многообразие $\mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g\}$, где Ω – симметричная комплексная матрица, $\text{Im } \Omega > 0$. Через Y_{a_j} обозначим гладкую гиперповерхность, заданную уравнением

$$\theta_j(z - a_j) = 0, \quad a_j \in \mathbb{C}^g,$$

где $\theta_j(z)$ – тэта-функция степени $d_j \in \mathbb{N}$, т.е. аналитическая функция на $\mathbb{C}^g$ со свойством периодичности:

$$\theta_j(z + \Omega m + n) = \exp(-d_j \pi i \langle m, \Omega m \rangle - 2d_j \pi i \langle m, z \rangle) \theta_j(z), \quad m, n \in \mathbb{Z}^g.$$

Напомним, что пространство тэта-функций степени d имеет размерность d^g . Любая алгебраическая гиперповерхность в X^g задается как множество нулей некоторой тэта-функции подходящей степени. Гиперповерхность Y_{a_j} можно также задать с помощью тэта-функций с характеристиками.

Через Q обозначим гиперповерхность, заданную уравнением $\theta(z) = 0$, где $\theta(z)$ – тэта-функция степени $d > d_1 + \dots + d_k$. Обозначим через Y^k и Q^k соответственно пересечения $Y_{a_1} \cap \dots \cap Y_{a_k}$ и $Y^k \cap Q$, $k < g - 1$. Будем предполагать, что многообразия Y^j и Q^j , $j \leq k$, являются гладкими и неприводимыми и что Y^j пересекается с $Y_{a_{j+1}}$ трансверсально. Предположим также, что a_j находятся в общем положении, т.е. набор $(a_1, \dots, a_k)$ принадлежит некоторому открытому всюду плотному подмножеству в $X^g \times \dots \times X^g$.

ТЕОРЕМА 1. *Существует вложение L^k кольца мероморфных функций $\mathcal{A}^k$ на многообразии Y^k с полюсом на Q^k в кольцо $(N^k \times N^k)$ -матричных дифференциальных операторов по $g - k$ переменным с аналитическими в окрестности нуля коэффициентами*

$$L^k : \mathcal{A}^k \rightarrow \text{Mat}(N^k, g - k),$$

число N^k указано в формуле (1).

Существует семейство совместных собственных функций у операторов $L^k(\mathcal{A}^k)$, параметризованное точками многообразия Y^k , а именно, существует вектор-функция $\Psi(z, x)$, $z \in Y^k$, с существенной особенностью на Q^k такая, что

$$L^k(\lambda)\Psi = \lambda\Psi, \quad \lambda \in \mathcal{A}^k.$$

Для $\lambda, \mu \in \mathcal{A}^k$ операторы $L^k(\lambda)$ и $L^k(\mu)$ коммутируют.

Число N^k вычисляется по формуле

$$N^k = a_1^k + \dots + a_{g-k+1}^k, \quad (1)$$

где

$$a_n^k = \mathcal{F}^k(n) - a_1^k C_{n-1+g-k}^{n-1} - \dots - a_{n-1}^k C_{1+g-k}^1,$$

$$\mathcal{F}^k(n) = (dn)^g - \sum_i (dn - d_i)^g + \sum_{i,j} (dn - d_i - d_j)^g - \dots + (-1)^k (dn - d_1 - \dots - d_k)^g,$$

C_j^i – биномиальный коэффициент.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № НШ-2185.2003.1, 03-01-00403 и 03-01-06482).

Многообразие Y^k называется спектральным. Из формулы присоединения и теоремы Лефшеца о вложении вытекает, что Y^k является многообразием общего типа.

Первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов по многим переменным с матричными коэффициентами построены Накаяшики [1], [2]. Спектральными многообразиями в этих примерах служат абелевы многообразия. Ротштейн [3] построил операторы, где в качестве спектрального многообразия рассматривается поверхность Фано. Теорема 1 доказывается с помощью методов работы [4], где был рассмотрен случай $d = d_1 = \dots = d_k$.

Имеется аналогия между спектральными данными обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов Берчналла–Чаунди–Кричевера [5] и спектральными данными операторов $L^k(\mathcal{A}^k)$:

$$\{\Gamma, D, P, f\} \longleftrightarrow \{Y^k, \mathcal{L}^k, Q^k, \lambda\},$$

где Γ – компактная риманова поверхность рода g , D – неспециальный дивизор степени g , P – фиксированная точка на Γ , f – мероморфная функция на Γ с полюсом в точке P , $\mathcal{L}^k$ – некоторое линейное расслоение над Y^k . Аналогом функции Бейкера–Ахиезера служит вектор-функция Ψ .

С каждым вложением L^k связан аналог иерархии КП.

ТЕОРЕМА 2. *Существует многомерный матричный аналог иерархии КП*

$$[L_n - \partial_{t_n}, L_m - \partial_{t_m}] = 0,$$

где L_n и L_m – $(N^k \times N^k)$ -матричные дифференциальные операторы по переменным $x = (x_1, \dots, x_{g-k})$, коэффициенты которых зависят от x и от $t = (t_1, t_2, \dots)$.

Теоремы 1 и 2 могут быть обобщены на случай произвольного абелева многообразия, а также по схеме [4] на любой ранг $r > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Nakayashiki // Duke Math. J. 1991. V. 62. № 2. P. 315–358. [2] A. Nakayashiki // Amer. J. Math. 1994. V. 116. № 1. P. 65–100. [3] M. Rothstein // Duke Math. J. 1996. V. 84. № 3. P. 565–598. [4] А. Е. Миронов // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43. № 5. С. 1102–1114. [5] И. М. Кричевер // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 183–208.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: mironov@math.nsc.ru

Принято редколлегией
23.07.2004