Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Порывай, Принцип инвариантности для условных эмпирических процессов, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:15:06

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ УСЛОВНЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Д. В. ПОРЫВАЙ

Целью настоящей заметки является установление принципа инвариантности для условного эмпирического процесса, образованного зависимыми случайными величинами (с.в.). Изучение таких процессов представляет интерес с точки зрения финансовой математики, см., например, [1].

Пусть $Z = \{(X_i, Y_i), i \in \mathbb{Z}\}$ – строго стационарная последовательность случайных элементов, где X_i – векторы в $\mathbb{R}^d$, а Y_i принимают значения в польском пространстве S . Зависимость Y от значения x с.в. X описывается регрессионной функцией $F(f | x) = E(f(Y) | X = x)$, здесь f входит в некоторый класс $\mathcal{F}$ измеримых функций, отображающих S в $\mathbb{R}$. Для статистической оценки $F(f | x)$, следуя Надарая и Ватсону (см., например, [2]), используют величины

$$F_n(f | x) = \frac{\sum_{i=1}^n f(Y_i) K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)},$$

где ядро $K(\cdot) \geq 0$ задано на $\mathbb{R}^d$, $h > 0$ – параметр сглаживания, $f \in \mathcal{F}$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $n \in \mathbb{N}$. Асимптотическое поведение эмпирического процесса $\nu_n(f) = \sqrt{nh^d}(F_n(f | x) - F(f | x))$ исследуется в пространстве $l^\infty(\mathcal{F})$, состоящем из функционалов ν , заданных на $\mathcal{F}$, таких, что $\|\nu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\nu(f)| < \infty$. Далее для упрощения записи рассматривается случай действительных X_i .

Для оценки зависимости между любым k -набором $\{Z_{i_1}, \dots, Z_{i_k}\}$ (здесь $0 < n \leq i_1 < \dots < i_k$) и σ -алгеброй $M_0 = \sigma\{Z_i, i \leq 0\}$ будут использоваться (см., например, [3; гл. 1.3]) коэффициенты $\phi_{k,\infty}(n)$, где $k = 2$, $\psi_{k,\infty}(n)$ при $k = 1$, а также $\beta_{k,\infty}(n)$ при $k = \infty$. Нам потребуются $\phi_{1,1}(n)$, который определяется как коэффициент ϕ -зависимости между двумя σ -алгебрами $\sigma\{Z_0\}$ и $\sigma\{Z_n\}$.

Следуя [4], назовем l' -перемешивающейся схему серий $\{V_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$, если для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$l'_n(c, t) = \sup_{a, b: a+b+c \leq k_n} \left| \text{cov} \left\{ \exp \left(it \sum_{j=1}^a V_{nj} \right), \exp \left(-it \sum_{j=a+c}^{a+c+b} V_{nj} \right) \right\} \right| \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ таких, что $c < k_n$. Очевидно, $l'_n(c, t) \leq 16\alpha(c)$ для любых $n, c \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}$, где α – коэффициент сильного перемешивания.

Пусть существует ρ – плотность по мере Лебега распределения с.в. X_1 . Всюду далее предполагается, что $x \in \mathbb{R}$ фиксировано и $\rho(x) > 0$. Положим

$$V_{ni} = \sqrt{h/n} \tilde{f}(Y_i) K_h(X_i - x), \quad \tilde{f} = f - F(f | x), \quad K_h(z) = (1/h) K(z/h), \quad i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим следующие условия.

A1. Функции $\rho(z)$ и $F(f | z)$ для всех $f \in \mathcal{F}$ дважды непрерывно дифференцируемы по z в некоторой окрестности точки x .

A2. $\int_{\mathbb{R}} K(z) dz = 1$, $\int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) dz < \infty$, $K(-z) = K(z)$ для $z \in \mathbb{R}$, $z^3 K(z) \searrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

A3. $h = h(n)$ таковы, что $\sqrt{nh^5} \searrow c_0 < \infty$ и $nh \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

A4. $\{V_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ – схема l' -перемешивающихся величин. Кроме того, последовательность Z такова, что $\sum_{k=1}^n \psi_{1,\infty}(k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Совместное распределение (X_1, X_k) , где $k > 1$, имеет плотность $\rho_k(z_1, z_k)$ по мере Лебега такую, что при всех $(z_1, z_k) \in \mathbb{R}^2$

$$|\rho_k(z_1, z_k) - \rho(z_1)\rho(z_k)| \leq \theta(k)\rho(z_1)\rho(z_k), \quad \theta(k) < 1, \quad h \sum_{k=2}^n \theta(k) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00724).

А5. Функция $F(f_1 f_2 | z)$ непрерывна по z в точке x и $\sup_{k>1} \sup_{(z_1, z_k) \in \mathbb{R}^2} |E(\tilde{f}_1(Y_1) \tilde{f}_2(Y_k) | X_1 = z_1, X_k = z_k)| < \infty$ для всех $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$.

А5'. Функция $g(z_1, z_k) = E(|\tilde{f}_1(Y_1) \tilde{f}_2(Y_k)| | X_1 = z_1, X_k = z_k)$ для любого $k > 1$ дважды непрерывно дифференцируема по паре (z_1, z_k) , $\sup_{k>1} \partial^j g(z_1, z_k) / \partial^l z_1 \partial^m z_k < \infty$ при $l+m = j$, $l, m \geq 0$, $j = 2, 3$ в некоторой окрестности точки (x, x) для всех $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Кроме того, $F(f_1 f_2 | z)$ непрерывна по z в x для всех $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ и $z^4 K(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{F}$ – класс функций f таких, что $F(f^2|x) < \infty$, $E f^2(Y_1) < \infty$, и справедливы условия А1–А4, А5 (или А5'). Тогда для всех $m \geq 1$ и любых $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$ имеем

$$(\nu_n(f_1), \dots, \nu_n(f_m)) \xrightarrow{\text{law}} \mathcal{N}(c_0 \mu(x), \Sigma^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $\mathcal{N}$ – нормальный закон с параметрами $c_0 \mu(x) = c_0(\mu(f_1|x), \dots, \mu(f_m|x))$ и $\Sigma^2 = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$,

$$\begin{aligned} \mu(f | x) &= \frac{1}{2} \left(\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(f | x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} F(f | x) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x) \right) \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) dz / \rho(x), \\ \sigma_{ij} &= (F(f_i f_j | x) - F(f_i | x) F(f_j | x)) \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz / \rho(x). \end{aligned}$$

Перейдем к вопросу о плотности семейства $\{\nu_n(f), f \in \mathcal{F}\}$. Пусть пространство $(L, d_p(\cdot))$, $p \geq 1$, состоит из всех действительных функций, заданных на S , таких, что $d_p^p(f) = \sup_{z \in \mathbb{R}} F(|f|^p | z) < \infty$. Определение энтропии с включением $\mathbb{H}(\mathcal{F}, \varepsilon, d_p(\cdot))$ подмножества $\mathcal{F}$ пространства $(L, d_p(\cdot))$, $p \geq 1$, см., например, в [2]. Обозначим $I_{p,t} = \int_0^1 \sqrt{\mathbb{H}(\mathcal{F}, \varepsilon, d_p(\cdot))} d\varepsilon^t$.

А6. Условие (1) выполнено, $\sup_{f \in \mathcal{F}} |\partial^j / \partial z^j (F(f | z) \rho(z))| < \infty$ для $j = 2, 3$ в некоторой окрестности точки x и ядро $K(\cdot)$ ограничено.

В1. $\sum_{k>0} k \phi_{2,\infty}(k) < \infty$, $nh^{3(p-2)/(p-4)} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $I_{p,t} < \infty$ при $t = 3/(p-1)$ для некоторого $p > 7$.

В2. $\phi_{2,\infty}(k) = O(k^{-(b+1)/(b-1)})$, $nh^{b(p-2)/(p-b-1)} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $I_{p,t} < \infty$ при $t = b/(p-1)$ для некоторых $3 < b < 5$ и $p > (3b+5)/(5-b)$.

В3. $\beta_{\infty,\infty}(k) = O(k^{-b})$, $\sum_{k>0} \phi_{1,1}^{1/2}(k) < \infty$, $nh^{5/b^2} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) для некоторого $b > 1$, $I_{2,1} < \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия А1–А3 при $c_0 = 0$, А6 и одно из условий В1–В3. Тогда семейство распределений $\{\nu_n(f), f \in \mathcal{F}\}$ плотно в пространстве $(l^\infty(\mathcal{F}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$.

Полученные результаты расширяют область применений теоремы 3.4 из [5], а также теорем 2.2 и 2.3 из [2].

Автор благодарен профессору А. В. Булинскому за внимание к работе. Также автор признателен профессору W. Polonik за обсуждение работы [2] и профессору D. Q. Tuyen за указание на статью [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Franke, W. Härdle, J.-P. Kreiss // Recent Advances and Trends in Nonparametric Statistics / ed. M. G. Akritas, D. N. Politis. Elsevier, 2003. P. 303–314. [2] W. Polonik, Q. Yao // J. Multivariate Anal. 2002. V. 80. № 2. P. 234–255. [3] P. Doukhan. Mixing. Properties and Examples. New York: Springer-Verlag, 1994. (Lecture Notes in Statistics. V. 85.) [4] D. Q. Tuyen. Central limit theorems for mixing arrays // Vietnam J. Math. 2004 (to appear). [5] D. Bosq. Nonparametric Statistics for Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1998. (Lecture Notes in Statistics. V. 110.)