Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О хроматическом числе пространства с метрикой l_q , УМН, 2004, том 59, выпуск 5, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:18:24

О ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ ПРОСТРАНСТВА С МЕТРИКОЙ l_q

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение и формулировка результата. В своей работе (см. [1] и [2]), которая была весьма популярна среди специалистов и тем не менее в течение четверти века оставалась неопубликованной, М. Бенда и М. Перлес ввели понятие хроматического числа метрического пространства, определяемого следующим образом. Пусть (X, ρ) – это некоторое метрическое пространство с метрикой ρ . Зафиксируем произвольное положительное вещественное число b и рассмотрим граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, у которого множество вершин $\mathcal{V}$ совпадает с X , а ребрами соединены те и только те пары вершин $x, y \in X$, расстояние между которыми равно b : $\rho(x, y) = b$. Тогда расстояние b называется “запрещенным” или “критическим”, а стандартное хроматическое число $\chi(\mathcal{G})$ графа $\mathcal{G}$ – хроматическим числом пространства (X, ρ) с этим запретом. Величину $\chi(\mathcal{G})$ принято обозначать, подчеркивая ее геометрическую природу, через $\chi((X, \rho), b)$. В существенной степени деятельность Бенды и Перлеса была мотивирована попытками подобраться к решению классической проблемы П. Эрмита и Г. Хадвигера (см. [3]) об отыскании хроматического числа арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, снабженного евклидовой метрикой. Однако к настоящему времени общая постановка вопроса носит практически столь же классический характер.

Здесь мы изучим два класса метрических пространств: класс $(\mathbb{R}^n, l_q)$ и класс $(\mathbb{Q}^n, l_q)$ (под $\mathbb{Q}^n$ мы понимаем множество всех n -мерных векторов с рациональными координатами, а под l_q – метрику вида $l_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (|x_1 - y_1|^q + \dots + |x_n - y_n|^q)^{1/q}$, $l_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$). Нас будут интересовать оценки соответствующих хроматических чисел при условии неограниченного роста размерности. Для начала мы выпишем вкратце известные результаты. В случае с $(\mathbb{R}^n, l_2)$ мы имеем дело с задачей Эрмита–Хадвигера, причем здесь значение критического расстояния не играет никакой роли: для всякого b выполнены неравенства $(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi((\mathbb{R}^n, l_2), b) \leq (3 + o(1))^n$ (нижняя оценка принадлежит автору [4], а верхняя – Д. Ларману и К.А. Роджерсу [5]). Для $\mathbb{Q}^n$ с той же, евклидовой, метрикой доказаны чуть более слабые утверждения: $\chi((\mathbb{Q}^n, l_2), b) \geq (1.173 \dots + o(1))^n$, $\chi((\mathbb{Q}^n, l_2), b) \geq \Omega((1.239 \dots + o(1))^n)$, где $b \in \mathbb{Q}$, $\chi((\mathbb{Q}^n, l_2), b) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$ для подходящих $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (см. [6]) и $\chi((\mathbb{Q}^n, l_2), b) \leq \chi((\mathbb{R}^n, l_2), b) \leq (3 + o(1))^n$. При $q = \infty$ легко убедиться в том, что оба наших хроматических числа равны 2^n , коль скоро, например, $b = 1$. Наконец, при любом $q < \infty$ Дж.-Х. Канг и З. Фюреди установили недавно оценку $\chi((\mathbb{R}^n, l_q), b) \leq (5 + o(1))^n$, а тот факт, что $\chi((\mathbb{R}^n, l_q), b) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$ непосредственно вытекает из работы П. Франкла и Р. Уилсона [7]. Ясно, что, в свою очередь, $\chi((\mathbb{Q}^n, l_q), b)$ ограничено сверху правой частью оценки Канга–Фюреди при каждом q и b . Что же касается нижней оценки для $\chi((\mathbb{Q}^n, l_q), b)$, то сразу можно сказать только, что для любого q найдутся b , при которых она совпадает с неравенством Франкла–Уилсона. Прежде чем переходить теперь к формулировке основного результата, заметим, что более подробный обзор по проблеме может быть найден в статье автора [6].

ТЕОРЕМА 1. 1. Для всякого $X \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n\}$ и для всякого b ($b \in \mathbb{R}$, если $X = \mathbb{R}^n$, и $b \in \mathbb{Q}$, если $X = \mathbb{Q}^n$) выполнена оценка

$$\chi((X, l_1), b) \geq \max_{a \in (0, \frac{1}{2})} \frac{C_n^{[an]} 2^{[an]}}{Q_1(n) C_n^{[an/4]} C_n^{[an/4]} C_n^{[an/4]}} = (1.365 \dots + o(1))^n.$$

Здесь $Q_1(n)$ – некоторая функция, растущая медленнее любой экспоненты, а максимум достигается при $a = (6 - \sqrt{12})/6$.

2. Пусть $q \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $b \in \mathbb{Q}$ выполнена оценка

$$\chi((\mathbb{Q}^n, l_q), b) \geq \min_{u \in (\frac{1}{2q+1}, \frac{1}{2})} \frac{C_n^{[un]}}{Q_2(n) C_n^{[un/2]}} = (1 + \varepsilon + o(1))^n,$$

где $Q_2(n)$ – субэкспоненциальная функция, $\varepsilon = \varepsilon(q) > 0$.

2. Эскиз доказательства теоремы 1. В этом параграфе мы по пунктам изложим основные шаги, необходимые нам для доказательства первой части теоремы. В действительности,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00912), гранта поддержки Ведущих научных школ НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ МК-3130.2004.1 и гранта ИНТАС 03-51-5070.

рассуждения, обосновывающие вторую часть нашего утверждения, в существенной степени параллельны нижеследующим, и в данной заметке мы на них не останавливаемся.

1. Пусть $a \in (0, \frac{1}{2})$. Рассмотрим $V_a = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : \text{card}\{i = 1, \dots, n : x_i = \pm 1\} = [an]\} \subset \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$. Ясно, что $\text{card } V_a = C_n^{[an]} 2^{[an]}$. Пусть p – минимальное простое число, удовлетворяющее соотношению $2p > [an]$, так что заведомо $p = p(n)$ асимптотически приближается к $[an]/2$ (см. [8]). Образует граф $G_a = (V_a, E_a)$, полагая $E_a = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_a \times V_a : l_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2p\}$.

2. С помощью довольно тонкой модификации линейно-алгебраического метода в комбинаторике (ср. [4], [6], [7] и [9]) можно показать, исходя из свойств p , что число независимости графа G_a (см. [10]) оценивается сверху величиной $Q_1(n) C_n^{[an/4]} C_{n-[an/4]}^{[an/4]}$. Стало быть, автоматически

$$\chi(G_a) \geq \frac{C_n^{[an]} 2^{[an]}}{Q_1(n) C_n^{[an/4]} C_{n-[an/4]}^{[an/4]}}.$$

3. Пусть $\mathcal{G}$ – граф, через посредство которого мы определяли величину $\chi((X, l_1), 2p)$, $X \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n\}$. Понятно, что $G_a \subset \mathcal{G}$, и, значит,

$$\chi((X, l_1), 2p) = \chi(\mathcal{G}) \geq \chi(G_a) \geq \frac{C_n^{[an]} 2^{[an]}}{Q_1(n) C_n^{[an/4]} C_{n-[an/4]}^{[an/4]}}.$$

Неравенство выполнено для каждого a , в силу чего мы вольны взять в его правой части максимум по $a \in (0, \frac{1}{2})$. Таким образом, при $b = 2p$ утверждение доказано. Однако, за счет свойств наших метрических пространств, мы теперь имеем право нормировать всю конструкцию графа G_a в случае $\mathbb{R}^n$ на произвольное вещественное, а в случае $\mathbb{Q}^n$ на произвольное рациональное число, что и завершает эскиз доказательства.

3. Дополнение. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, а $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = X$, $\mathcal{E} = \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \in \{b_1, \dots, b_r\}\}$, $b_1 > 0, \dots, b_r > 0$. Положим $\chi((X, \rho), b_1, \dots, b_r) = \chi(\mathcal{G})$. Задача об отыскании таких хроматических чисел восходит к П. Эрдешу, который рассматривал пространство $(\mathbb{R}^2, l_2)$ и установил оценку $\max_{b_1, \dots, b_r} \chi((\mathbb{R}^2, l_2), b_1, \dots, b_r) \geq cr \sqrt{\log r}$, $c > 0$. В случае, когда $(X, \rho) = (\mathbb{R}^n, l_2)$, задача изучалась автором в [6], где, в частности, обоснованы неравенства $\max_{b_1, b_2} \chi((\mathbb{R}^n, l_2), b_1, b_2) \geq (1.439 \dots + o(1))^n$ и $(\nu r)^{\mu n} \leq \max_{b_1, \dots, b_r} \chi((\mathbb{R}^n, l_2), b_1, \dots, b_r) \leq (3 + o(1))^{rn}$, $\nu > 0, \mu > 0$. Благодаря разработанной нами технике (модификация линейно-алгебраического метода, упомянутая в пункте 2 предыдущего параграфа), удается доказать следующую новую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Выполнены оценки $\max_{b_1, b_2} \chi((\mathbb{R}^n, l_1), b_1, b_2) \geq (1.607 \dots + o(1))^n$, $(\nu' r)^{\mu' n} \leq \max_{b_1, \dots, b_r} \chi((\mathbb{R}^n, l_1), b_1, \dots, b_r) \leq (5 + o(1))^{rn}$, где $\nu > 0, \mu > 0$ – абсолютные константы.*

Отметим, что верхняя оценка в последней серии неравенств мгновенно следует из упоминавшейся в первом параграфе работы Канга и Фюреди.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. D. Johnson, Jr. // Geombinatorics. 2000. V. 9. P. 110–112. [2] M. Benda, M. Perles // Geombinatorics. 2000. V. 9. P. 113–126. [3] H. Hadwiger // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 140–144. [4] А. М. Райгородский // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 147–148. [5] D. G. Larman, C. A. Rogers // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24. [6] А. М. Райгородский // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146. [7] P. Frankl, R. M. Wilson // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368. [8] К. Прахар. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. [9] L. Babai, P. Frankl. Linear algebra methods in combinatorics. Part 1. Preliminary version 2. Chicago: Department of Computer Science, Univ. Chicago, 1992. [10] Ф. Харари. Теория графов. М.: Мир, 1973.

Принято редколлегией
23.07.2004