Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Соловьев, В. В. Белокуров, Е. Т. Шавгулидзе, Существование функциональных интегралов в квантовом поле модели на пространстве петель, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:39:10

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В КВАНТОВОПОЛЕВОЙ МОДЕЛИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПЕТЕЛЬ

Ю. П. СОЛОВЬЕВ, В. В. БЕЛОКУРОВ, Е. Т. ШАВГУЛИДЗЕ

На пространстве петель построим обобщение квантовой теории поля следующим образом. В качестве импульсного пространства выберем $\mathcal{P} = C(S^1, \mathbb{R}^4)$ – банахово пространство всех непрерывных отображений окружности единичной длины в $\mathbb{R}^4$ с нормой $\|p\|_{\mathcal{P}} = \max_{\tau \in S^1} \|p(\tau)\|$, где $\|\cdot\|$ – каноническая норма в пространстве $\mathbb{R}^4$.

На пространстве $\mathcal{P}$ задано представление группы $G = \text{Diff}_+^3(S^1)$ трижды непрерывно дифференцируемых диффеоморфизмов $g \in G = \{g : S^1 \rightarrow S^1, g'(\tau) > 0\}$.

Представим пространство $\mathcal{P}$ в виде декартова произведения $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \times \mathcal{P}_0$, где $\mathcal{P}_0 = \{p \in \mathcal{P} : p(0) = 0\}$, $p(\tau) = r + \xi(\tau)$, $p \in \mathcal{P}$, $r \in \mathbb{R}^4$, $\xi \in \mathcal{P}_0$.

Зададим на $\mathbb{R}^4$ меру Лебега l и на $\mathcal{P}_0$ броуновский мост w_λ^0 с коэффициентом дисперсии $\sqrt{\lambda}$, т.е. условную меру Винера ($p(0) = p(1) = 0$) на отрезке $[0, 1]$ (полуинтервал $[0, 1)$ отождествляется с окружностью S^1).

Тем самым на пространстве $\mathcal{P}$ задана мера Винера $w_\lambda = l \otimes w_\lambda^0$.

Обозначим через E пространство всех квадратично интегрируемых по мере Винера функций $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $\varphi(p) = \overline{\varphi(-p)}$ для любых $p \in \mathcal{P}$.

Пространство E является гильбертовым пространством над вещественным полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\varphi, \phi)_E = \int_{\mathcal{P}} \varphi(p) \overline{\phi(p)} w_\lambda(dp)$.

Функции φ и ϕ реализуют регулярное унитарное представление группы диффеоморфизмов G в гильбертовом пространстве E .

Зададим свободное действие, которое инвариантно относительно группы G :

$$\mathcal{A}_0[\varphi] = \int_{\mathcal{P}} |\varphi(p)|^2 \Omega^2(p) w_\lambda(dp), \quad \Omega^2(p) \equiv \left(\int_{S^1} \frac{d\tau}{\|p(\tau)\|^2} \right)^{-1} + m^2.$$

В пределе оно переходит в свободное действие скалярного поля,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_0[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^4} |\varphi(r)|^2 (\|r\|^2 + m^2) dr.$$

Взаимодействие, в локальном пределе переходящее в φ^4 , может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1[\varphi] = & \int_{\mathcal{P}} \cdots \int_{\mathcal{P}} \varphi(p_1) \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_1) \Delta(p_1, p_5) \varphi(p_2) \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_2) \Delta(p_2, p_6) \varphi(p_3) \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_3) \Delta(p_3, p_7) \\ & \times \varphi(p_4) \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_4) \Delta(p_4, p_8) \Delta(p_5, -p_6 - p_7 - p_8) \\ & \times \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_5) \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_6) \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_7) \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p_8) w_\lambda(dp_1) \cdots w_\lambda(dp_8). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta(p_1, p_5) & \equiv \int_{S^1} \frac{d\tau}{\|p_1(\tau)\|^2} \int_{S^1} \delta(p_1(\tau_1) - p_5(\tau_1)) \|p_1(\tau_1)\|^2 d\tau_1, \\ \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p) & \equiv \int_G \exp \left\{ \frac{\lambda}{8} \int_{S^1} \mathcal{S}_g(\tau) \|p(\tau)\|^2 d\tau \right\} \mu_{\alpha\lambda}(dg), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{S}_g = \frac{g'''(\tau)}{g'(\tau)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(\tau)}{g'(\tau)} \right)^2$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00371).

– шварциан и $\mu_{\alpha\lambda}$ – мера на группе G , которая строится следующим образом [1]. Возьмем подгруппу $G_0 = \{g \in G : g(0) = 0\}$ и введем отображение $A: G_0 \rightarrow C_0([0, 1], \mathbb{R}) = \{u \in C_0([0, 1], \mathbb{R}) : u(0) = u(1) = 0\}$, полагая $(Ag)(\tau) = \left(\frac{g''(\tau)}{g'(\tau)}\right)' - \frac{g'''(0)g'(0) - (g''(0))^2}{(g'(0))^2}$. Пусть $\mu_{\alpha\lambda}^0$ – прообраз броуновского моста на $C_0([0, 1], \mathbb{R})$ с коэффициентом дисперсии $\sqrt{\alpha\lambda}$ относительно отображения A .

Как топологическое пространство G представляет собой декартово произведение $S^1 \times G_0$,

$$g(\tau) = \sigma + g_0(\tau) \quad (g \in G, \sigma = g(0) \in S^1, g_0 \in G_0).$$

Зададим на окружности S^1 меру Лебега l_S . В итоге на группе G получим меру $\mu_{\alpha\lambda} = l_S \otimes \mu_{\alpha\lambda}^0$.

При $\alpha \rightarrow +\infty$ и $\lambda \rightarrow +\infty$ $\mathcal{A}_1[\varphi]$ переходит в

$$\int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \delta(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \varphi(r_1) \varphi(r_2) \varphi(r_3) \varphi(r_4) dr_1 dr_2 dr_3 dr_4.$$

Полный функционал действия равен

$$\mathcal{A}[\varphi] = \mathcal{A}_0[\varphi] + \kappa \mathcal{A}_1[\varphi].$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. При произвольном положительном κ и любом $\psi \in E$ существует интеграл

$$\int_E e^{-\mathcal{A}[\varphi] - i(\varphi, \psi)_E} d\varphi. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\varphi \in E$ функционал $\mathcal{A}_1[\varphi]$ принимает неотрицательные значения, поэтому функционал $e^{-\kappa \mathcal{A}_1[\varphi] - i(\varphi, \psi)_E}$ ограничен на пространстве E . Следовательно, для доказательства сходимости интеграла (1) достаточно убедиться в существовании интеграла $\int_E \mathcal{A}_1[\varphi] e^{-\mathcal{A}_0[\varphi]} d\varphi$. Последнее вытекает из следующей серии лемм.

ЛЕММА 1. Существует $c_1 > 0$ такое, что для любого $r \in \mathbb{R}^4$, $r \neq 0$, выполнено

$$\|r\|^2 \int_{\mathcal{D}_0} \left(\int_{S^1} \frac{d\tau}{\|r + \xi(\tau)\|^2} \right) w_\lambda^0(d\xi) \leq c_1.$$

ЛЕММА 2. Существует $c_2 > 0$ такое, что для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^4$ и $t_1, t_2 \in S^1$, $t_1 \neq t_2$, справедлива оценка

$$\int_{\mathcal{D}} \|p(t_1)\|^2 \delta(p(t_1) - r_1) \|p(t_2)\|^2 \delta(p(t_2) - r_2) \left(\int_{S^1} \frac{d\tau}{\|p(\tau)\|^2} \right)^2 w_\lambda(dp) \leq c_2.$$

ЛЕММА 3. Существует $c_3 > 0$ такое, что для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^4$ и $t_1, t_2 \in S^1$, $t_1 \neq t_2$, выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} [\Omega^2(p_1)]^{-1} \delta(p(t_1) - r_1) \|p(t_1)\|^2 \delta(p(t_2) - r_2) \|p(t_2)\|^2 \\ & \times \left(\int_{S^1} \frac{d\tau}{\|p(\tau)\|^2} \right)^2 (\mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p))^2 w_\lambda(dp) \leq c_3. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Существует $c_4 > 0$ такое, что для любых $r \in \mathbb{R}^4$ и $t \in S^1$ имеет место оценка

$$\int_{\mathcal{D}} \delta(p(t) - r) \|p(t)\|^2 \int_{S^1} \frac{d\tau}{\|p(\tau)\|^2} \mathcal{U}_{\alpha\lambda}(p) w_\lambda(dp) \leq c_4.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. Т. Shavgulidze // Russian J. Math. Phys. 2000. V. 7. № 4. P. 464–472.