Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шакин, О функциях Гильберта и числах Бетти однородных идеалов
во внешней алгебре, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 5, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 12:42:01

О ФУНКЦИЯХ ГИЛЬБЕРТА И ЧИСЛАХ БЕТТИ ОДНОРОДНЫХ ИДЕАЛОВ ВО ВНЕШНЕЙ АЛГЕБРЕ

Д. А. Шакин

Рассмотрим внешнюю алгебру $E_n = k\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ над полем k и зафиксируем в ней некоторый мономиальный идеал I . Для всякого однородного идеала $J \subseteq E_n$ обозначим через H_J его функцию Гильберта (т.е. $H_J(d) = \dim_k J_d$ – размерность градуированной компоненты идеала J степени d). В данной заметке излагаются некоторые результаты о функциях Гильберта и градуированных числах Бетти идеалов в E_n , содержащих идеал I .

Задача описания функций Гильберта однородных идеалов в E_n (т.е. случай $I = 0$) была рассмотрена в работах [1] и [2], где было доказано, что функция $H: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ является функцией Гильберта некоторого однородного идеала $J \subseteq E_n$ тогда и только тогда, когда существует такой лекссегментный идеал L (см. определение ниже), что $H_L = H$. Для обобщения этого результата на случай, когда $I \neq 0$, потребуются следующие два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Идеал $L \subseteq E_n$ называется *лекссегментным*, если вместе с каждым мономом u степени d идеал L содержит и все мономы степени d , большие u по лексикографическому порядку. Если зафиксирован некоторый мономиальный идеал I , то идеал L называется *I -лекссегментным*, если его можно представить в виде $L = I + L'$, где L' – некоторый лекссегментный идеал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $I \subseteq E_n$ – мономиальный идеал. Если для всякого однородного идеала $J \subseteq E_n$, содержащего I , существует I -лекссегментный идеал $L^I(J)$ с условием $H_J = H_{L^I(J)}$, то идеал I называется *M -идеалом*.

Как следует из определения, если I есть M -идеал, то все функции Гильберта однородных идеалов, содержащих I , исчерпываются функциями Гильберта I -лекссегментных идеалов. В частности, результаты работ [1] и [2] показывают, что нулевой идеал в E_n является M -идеалом. Следующие две теоремы устанавливают важные свойства M -идеалов:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $I \subseteq E_n$ – M -идеал. Тогда $IE_{n+1} \subseteq E_{n+1}$ – тоже M -идеал.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $I \subseteq E_n$ – M -идеал, L – лекссегментный идеал. Тогда $I + L$ – тоже M -идеал.

Довольно очевидно, что все лекссегментные идеалы являются M -идеалами. Теоремы 1 и 2 позволяют обобщить этот результат на более широкий класс идеалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Идеал $I \subseteq E_n$ называется *кусочно лекссегментным*, если его можно представить в виде $I = L_1 E_n + \dots + L_n E_n$, где $L_i \subseteq E_i$ – некоторые лекссегментные идеалы.

ТЕОРЕМА 3. Всякий кусочно лекссегментный идеал $I \subseteq E_n$ является M -идеалом.

Общий ответ на вопрос, какие именно идеалы являются M -идеалами, по-видимому, довольно сложен; однако оказывается возможным описать все M -идеалы в важном классе сильно устойчивых идеалов, которые возникают как идеалы старших членов при общей линейной замене переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мономиальный идеал $J \subseteq E_n$ называется *сильно устойчивым*, если для любого монома $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \in J$, $i_1 < \dots < i_d$, для любого $j \notin \{i_1, \dots, i_d\}$ и для любого $k \in \{1, \dots, d\}$ имеем $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_j \in J$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $I \subseteq E_n$ – сильно устойчивый идеал. Идеал I является M -идеалом тогда и только тогда, когда он кусочно лекссегментный.

Напомним, что всякому однородному идеалу $J \subseteq E_n$ можно сопоставить идеал $\text{Gin}(J)$, называемый общим идеалом старших членов, следующим образом: сначала рассматривается общая линейная замена переменных f с верхнетреугольной матрицей, а потом от получившегося идеала $f(J)$ берется идеал старших членов относительно некоторого порядка на мономах (здесь мы будем рассматривать обратный лексикографический порядок); иначе говоря, $\text{Gin}(J) = \text{In}(f(J))$, где In – операция взятия идеала старших членов. Тот факт, что все кусочно лекссегментные идеалы оказываются сильно устойчивыми, позволяет сформулировать следующую теорему.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00468).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $I \subseteq E_n$ – мономиальный идеал, причем $I' = \text{Gin}(I)$ – кусочно лекссегментный. Если функция $H: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ является функцией Гильберта некоторого однородного идеала J , содержащего I , то существует такой I' -лекссегментный идеал L , что $H_L = H$.

Известно (см., например, [3], [4]), что лекссегментные идеалы в алгебре E_n имеют максимальные градуированные числа Бетти среди всех однородных идеалов с фиксированной функцией Гильберта. Как показывается следующая теорема, это справедливо и для I -лекссегментных идеалов.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\text{char } k = 0$. Пусть также $I \subseteq E_n$ – кусочно лекссегментный идеал, а J – однородный идеал, содержащий I . Тогда для всех $i, j \geq 0$ выполнены неравенства

$$\beta_{ij}^{E_n}(J) \leq \beta_{ij}^{E_n}(L^I(J)), \quad \beta_{ij}^{A_n}(S(J)) \leq \beta_{ij}^{A_n}(S(L^I(J))),$$

где $A_n = k[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо коммутативных многочленов над k , а $S(J)$ – однородный идеал в A_n , порожденный такими бесквадратными многочленами $f(x_1, \dots, x_n) \in A_n$, что $f(e_1, \dots, e_n) \in J$.

Пусть $\delta(I)$ – максимальная из степеней порождающих идеала I . Несложно заметить, что если I – M -идеал, а $V \subseteq (E_n)_d$ – однородное векторное пространство, причем $d \geq \delta(I)$ и $I_d \subseteq V$, то выполнено следующее неравенство:

$$\dim_k eV \geq \dim_k eL^I(V), \quad (1)$$

где $L^I(V) = (L^I(VE_n))_d$, а $eV \subseteq (E_n)_{d+1}$ – векторное пространство, порожденное произведениями вида $f \wedge e_i$, где $f \in V$. Особый интерес представляют пространства, для которых неравенство (1) превращается в равенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пространство $V \subseteq (E_n)_d$ называется I -гоцмановым, если выполнены следующие условия: $d \geq \delta(I)$, $I_d \subseteq V$ и $\dim_k eV = \dim_k eL^I(V)$. Идеал $J \subseteq E_n$ называется I -гоцмановым, если $J_d = I_d$ при $d < \delta(I)$ и J_d является I -гоцмановым при $d \geq \delta(I)$.

Справедлива следующая теорема, обобщающая результаты работ [5] и [3].

ТЕОРЕМА 7. Пусть $I \subseteq E_n$ – кусочно лекссегментный идеал, а $V \subseteq (E_n)_d$ – I -гоцманово векторное пространство, тогда eV – тоже I -гоцманово.

Из определения I -гоцманова идеала следует, что нулевые градуированные числа Бетти I -гоцманова идеала J и соответствующего ему I -лекссегментного идеала $L^I(J)$ совпадают. Как показывает следующая теорема, это справедливо и для старших чисел Бетти.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\text{char } k = 0$. Пусть также $I \subseteq E_n$ – кусочно лекссегментный идеал, а J – I -гоцманов идеал. Тогда для всех $i, j \geq 0$ выполнено равенство

$$\beta_{ij}^{E_n}(J) = \beta_{ij}^{E_n}(L^I(J)).$$

Если, в дополнение, идеал J является мономиальным, то

$$\beta_{ij}^{A_n}(S(J)) = \beta_{ij}^{A_n}(S(L^I(J))).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Kruskal // Mathematical Optimization Techniques / ed. R. Bellman. Berkley: Univ. of California Press, 1963. P. 251–278. [2] G. Katona // Theory of Graphs / ed. P. Erdős, G. Katona. New York: Academic Press, 1968. P. 187–207. [3] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi // J. Algebra. 1997. V. 191. № 1. P. 174–211. [4] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi // J. Algebraic Combin. 2000. V. 12. № 3. P. 207–222. [5] G. Gotzmann // Math. Z. 1978. V. 158. № 1. P. 61–70.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: dshakin@online.ru

Принято редколлегией
23.07.2004