Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, Трехстраничное представление зацеплений, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 237–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:41:52

ТРЕХСТРАНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

И. А. Дынников

Рассмотрим в 3-мерном пространстве $\mathbb{R}^3$ объединение $\mathbb{Y}$ трех попарно различных полуплоскостей P_1, P_2, P_3 (страниц), имеющих общую граничную прямую (линию переплета): $\partial P_1 = \partial P_2 = \partial P_3 = l$, которая ориентирована с помощью направляющего вектора $\vec{l}$. *Трехстраничной диаграммой зацепления* мы называем произвольную несамопересекающуюся замкнутую ломаную $L \subset \mathbb{Y}$ (имеющую, возможно, несколько компонент связности) такую, что для любого $i \in \mathbb{Z}_3$ каждая связная компонента пересечения $L \cap P_i$ (арка) состоит из двух прямолинейных отрезков равной длины, перпендикулярных друг другу. Точки пересечения $L \cap l$ мы обозначаем через $M_1, \dots, M_{n(L)}$ и нумеруем их в соответствии с ориентацией линии переплета l .

Каждую трехстраничную диаграмму зацепления мы будем кодировать некоторым словом в 12-буквенном алфавите $\mathbb{A} = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_3}$. Для этого определим сначала отображение $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Z}^3$ по формулам: $\varphi^i(a_j) = \delta_{j+1}^i + \delta_{j-1}^i$, $\varphi^i(b_j) = \delta_{j+1}^i - \delta_{j-1}^i$, $\varphi^i(c_j) = -\delta_{j+1}^i - \delta_{j-1}^i$, $\varphi^i(d_j) = -\delta_{j+1}^i + \delta_{j-1}^i$, где $i, j \in \mathbb{Z}_3$, и δ_i^j есть символ Кронекера. К каждой точке $M_p \in L \cap l$ примыкает два звена, скажем, $M_p Q$ и $M_p R$, ломаной L . Без ограничения общности можно считать, что $Q \in P_i$, $R \in P_{i+1}$, где $i \in \mathbb{Z}_3$. Мы говорим, что вершина M_p имеет тип $x \in \mathbb{A}$, если $\varphi^i(x) = \text{sgn}(\overrightarrow{M_p Q}, \vec{l})$, $\varphi^{i+1}(x) = \text{sgn}(\overrightarrow{M_p R}, \vec{l})$, $\varphi^{i-1}(x) = 0$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Диаграмме L мы сопоставляем слово $w_L = x_1 \cdots x_{n(L)}$, если для всех $p \leq n(L)$ вершина $M_p \in L \cap l$ имеет тип $x_p \in \mathbb{A}$.

Нетрудно видеть, что по слову w_L диаграмма L может быть восстановлена однозначно с точностью до изотопии в $\mathbb{Y}$. Понятно также, что отнюдь не любое слово кодирует некоторую трехстраничную диаграмму. Слова в алфавите $\mathbb{A}$, которые имеют вид w_L , где L — некоторая трехстраничная диаграмма, мы называем *сбалансированными*.

Рассмотрим теперь полугруппу S , порожденную множеством $\mathbb{A}$ и соотношениями

- (1) $a_i = a_{i+1}d_{i-1}, \quad b_i = a_{i-1}c_{i+1}, \quad c_i = b_{i-1}c_{i+1}, \quad d_i = a_{i+1}c_{i-1}$
- (2) $d_1d_2d_3 = 1,$
- (3) $b_id_i = d_ib_i = 1,$
- (4) $vw = wv,$

где $v \in \{a_{i-1}b_{i-1}, d_{i-1}c_{i-1}, b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}\}$, $w \in \{a_i, b_i, c_i, b_{i-1}d_id_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}_3$ (всего имеется 55 соотношений, из которых одно является следствием остальных). Для слова w в алфавите $\mathbb{A}$ мы обозначаем через $[w]$ элемент полугруппы S , соответствующий слову w .

ТЕОРЕМА 1. 1) Любое зацепление можно представить трехстраничной диаграммой;

2) две трехстраничные диаграммы L_1 и L_2 изотопны в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда $[w_{L_1}] = [w_{L_2}]$;

3) элемент $s \in S$ может быть представлен сбалансированным словом (т.е. задает некоторое зацепление в $\mathbb{R}^3$) тогда и только тогда, когда он центральный.

Таким образом, мы построили взаимно-однозначное соответствие между изотопическими классами неориентированных неупорядоченных зацеплений в $\mathbb{R}^3$ и центральными элементами полугруппы S . Единице полугруппы при этом соответствует пустое зацепление $\emptyset$, а умножение в центре полугруппы соответствует взятию объединения зацеплений.

ТЕОРЕМА 2. Группа G обратимых элементов полугруппы S порождается образующими d_1, d_2, d_3 и соотношениями

- (5) $d_1d_2d_3 = 1,$
- (6) $d_iu_i = u_id_i,$
- (7) $u_iu_j = u_ju_i,$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

где $u_i = d_{i+1}^{-1} d_{i-1} d_{i+1} d_{i-1}^{-1}$, $i, j \in \mathbb{Z}^3$.

Коммутант группы G изоморфен бесконечной группе кос B .

Пусть $G_i \subset G$ – подгруппа, порожденная элементами d_i и u_{i+1} ($= d_i^2 u_{i-1} d_i^{-2}$), $i \in \mathbb{Z}_3$. Тогда подгруппы $\hat{G}_i = G_{i+1} \cap G_{i-1}$ и G_i являются централизаторами друг друга для всех $i \in \mathbb{Z}_3$. Кроме того, подгруппа $\hat{G}_i$ изоморфна B для любого $i \in \mathbb{Z}_3$. Например, изоморфизм $B \rightarrow \hat{G}_1$ можно задать на стандартных образующих σ_k группы кос следующим образом: $\sigma_k \mapsto d_3^{-1} u_1 d_3^{1-k}$ ($= d_2^{1-k} u_1 d_3^{k-1}$), $k \geq 1$.

Так же, как и в случае обычных зацеплений, трехстраничный подход можно применить для ленточных зацеплений. Под ленточным зацеплением мы понимаем кусочно-линейное вложение некоторого числа колец $S^1 \times [0, 1]$ и лент Мёбиуса $S^1 \times [0, 1]$ в $\mathbb{R}^3$. Отличие этого понятия от общепринятого понятия оснащенного зацепления состоит лишь в том, что мы допускаем неориентируемые компоненты. Каждая трехстраничная диаграмма зацепления задает ленточное зацепление по правилу: каждую арку $L \cap P_i$ нужно заменить на замкнутую ε -окрестность этой арки в P_i . Таким образом, ленточные зацепления также можно кодировать словами в 12-буквенном алфавите $\mathbb{A}$. Для ленточных зацеплений имеется полный аналог теоремы 1, однако соответствующая полугруппа задается другим набором соотношений. Мы не выписываем их здесь, оставляя это для более подробной работы. Вместо этого мы укажем, как вычисляется скобка Кауффмана по трехстраничной диаграмме.

Пусть K – алгебра, порожденная множеством образующих $\{z\} \cup \mathbb{A}$ и соотношениями:

$$(8) \quad zx = xz \quad \forall x \in \mathbb{A},$$

$$(9) \quad a_i = z^3 a_{i+1} d_{i-1}, \quad z^3 b_i = a_{i-1} c_{i+1}, \quad z^3 c_i = b_{i-1} c_{i+1}, \quad d_i = z^3 a_{i+1} c_{i-1},$$

$$(10) \quad b_3 b_2 b_1 = z^3$$

$$(11) \quad b_i d_i = d_i b_i = 1,$$

$$(12) \quad vw = wv,$$

$$\text{где } v \in \{a_{i-1} b_{i-1}, d_{i-1} c_{i-1}, b_{i+1} d_{i-1} d_{i+1} b_{i-1}\}, \quad w \in \{a_i, b_i, c_i, b_{i-1} d_i d_{i-1}\},$$

$$(13) \quad b_{i-1} b_i + z d_{i+1} + z^2 c_i a_{i-1} = 0,$$

$i \in \mathbb{Z}_3$. Для слова w в алфавите $\{z\} \cup \mathbb{A}$ мы обозначаем через $\langle w \rangle$ соответствующий элемент алгебры K .

ТЕОРЕМА 3. Для любого ленточного зацепления L в алгебре K имеет место равенство $\langle w_L \rangle = -(z^4 + z^{-4}) \cdot \langle L \rangle (-z^2)$, где $\langle L \rangle$ есть скобка Кауффмана ленточного зацепления L .

Вернемся теперь к обычным (не ленточным) зацеплениям. Трехстраничное представление позволяет построить чрезвычайно эффективный частичный алгоритм распознавания тривиального узла (см. <http://mech.math.msu.su/~dynnikov>). Алгоритм представляет собой процедуру упрощения трехстраничной диаграммы узла (сложность трехстраничной диаграммы L определяется числом $n(L)$ точек пересечения L с линией переплета l) с помощью преобразований $L \rightarrow L'$, описанных в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть L и L' – две трехстраничные диаграммы зацепления, и для всех $i \in \mathbb{Z}_3$ выбраны: γ_i – некоторая незамкнутая связная компонента пересечения $L \cap (P_{i-1} \cup P_{i+1})$, γ'_i – некоторая незамкнутая связная компонента пересечения $L' \cap (P_{i-1} \cup P_{i+1})$ такие, что $\gamma_i \cap \gamma_{i+1} = \emptyset$, $\gamma'_i \cap \gamma'_{i+1} = \emptyset$, $\partial \gamma_i = \partial \gamma'_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}_3$. Предположим, что в $\mathbb{Y}$ существует сохраняющая границу изотопия от $L \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3)$ к $L' \setminus (\gamma'_1 \cup \gamma'_2 \cup \gamma'_3)$. Тогда зацепления L и L' изотопны в $\mathbb{R}^3$.