Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Аносов, В. П. Лексин, Андрей Андреевич Болибрух в жизни и науке
(30.01.1950 – 11.11.2003), *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:22:09

**АНДРЕЙ АНДРЕЕВИЧ БОЛИБРУХ
В ЖИЗНИ И НАУКЕ
(30.01.1950 – 11.11.2003)**

Андрей Андреевич Болибрух родился в Москве 30 января 1950 г. в семье военнослужащего. Его отец, Андрей Власьевич Болибрух, был участником Великой Отечественной войны и продолжал службу в армии после нее, дойдя до звания генерал-лейтенанта и должности зам. командующего военным округом. Андрей Андреевич гордился своим отцом, особенно его героизмом в годы войны. Мама, Татьяна Ивановна, всецело посвятила себя воспитанию детей – Андрея и его сестры, тоже Татьяны.

Военнослужащим нередко приходится часто менять место службы. Поэтому Андрей учился в различных школах. Последняя из них уже не была непосредственно связана с местом службы отца – это была физико-математическая школа-интернат № 45 при ЛГУ. Но косвенная связь могла быть – отец тогда служил в Прибалтике, к которой Ленинград ближе Москвы. В эту школу Андрей поступил как призер Всесоюзной математической олимпиады школьников 1965 г. Большинство призеров этого года впоследствии стали известными математиками. Через тридцать лет, уже в 90-е годы, А.А. написал теплые воспоминания [102] об учителях, однокашниках и самой по-

становке обучения в ФМШ-45. Читая их, можно подумать, что они написаны если не профессиональным писателем, то представителем гуманитарной профессии – в личности А.А. была сильная гуманитарная компонента.

После окончания в 1967 г. этой школы с золотой медалью Андрей поступил на механико-математический факультет МГУ. Он сдал на “отлично” два необходимых для медалиста экзамена по математике, что в том году было делом довольно нетривиальным. Старший экзаменатор, который готовил задачи письменного вступительного экзамена, предложил лишь четыре, но достаточно трудоемкие задачи. Относительно четвертой задачи разгорелся спор с привлечением министра высшего и среднего специального образования СССР В.П. Елютина. Родители и школьники утверждали, что эта задача, в которой, в итоге, требовалось вычислить объем сферического многогранника, не соответствует ни школьной программе, ни программе вступительных экзаменов. В конце концов ее не стали учитывать при оценке работ, к радости тех, кто не добрался до четвертой задачи на экзамене. Так что “пять” можно было получить и за три точно решенных задачи. Андрей был одним из немногих, кто решил все задачи.

Все пять лет А.А. был круглым отличником и закончил университет с красным дипломом. После второго курса он выбрал, при специализации, кафедру высшей геометрии и топологии, а в качестве научного руководителя – М.М. Постникова, который блестяще читал лекции по линейной алгебре на его курсе. К тому же тогда алгебраическая топология и топология многообразий, после достижений французских математиков, а затем Милнора, Адамса, Смейла и Новикова, были в моде. Хорошие студенты как-то ухитрились об этом знать, хотя никакой топологии в обязательной программе тогда не было (да и сейчас имеется весьма немного).

В то время А.А. больше тяготел к алгебраическим методам в теории кобордизмов и в классической алгебраической топологии. Его дипломная работа была посвящена вычислениям кобордизмов многообразий с некоторыми соотношениями на характеристические классы их касательных расслоений. М.М. Постников предлагал А.А. выступить с докладом о полученных результатах на Всесоюзной топологической конференции в Тбилиси, но она совпадала по времени со вступительными экзаменами в аспирантуру, и потому А.А. отказался участвовать в конференции, а в дальнейшем он не стал публиковать результаты своих вычислений. В аспирантуре у М.М. Постникова А.А. получил задание самым детальным образом разобраться с классической спектральной последовательностью Адамса и ее обобщенными аналогами в теории кобордизмов, составить список актуальных задач в этой области и решить одну из них. Однако это направление работы уже не очень вдохновляло А.А.; возможно, что уже тогда, подспудно, у него формировалась и другая область интересов более аналитического характера¹. Он начал интересоваться вопросами комплексной топологии и живо откликнулся на предложение заняться многомерной проблемой Римана–Гильберта в составе небольшого неформального коллектива (его организатором был А.В. Чернавский, участниками – В.А. Голубева, В.П. Лексин и А.А.). В этой группе интерес

¹Известно, что некоторые аналитические вопросы (но не те, которые оказались в центре внимания Андрея) были не чужды и М.М. Постникову (они проявились в совместных работах М.М. Постникова и М.А. Евграфова) и некоторые “аналитические” темы он предлагал в качестве курсовых и дипломных работ, хотя его известность связана не с ними, а с топологией.

к данному вопросу привлекла В. А. Голубева, прежние работы которой были от этого вопроса не очень далеки. Осенью 1974 г. начал работать неформальный семинар с названными участниками, основная цель которого была вникнуть в постановки многомерной проблемы Римана–Гильберта и разобраться с подходами к ее решению.

В 1975 г. по окончании аспирантуры местом работы А.А. стал Московский физико-технический институт, где А.А. с 1972 по 1997 г. состоял на кафедре высшей математики. А.А. попал туда при содействии тогдашнего зав. кафедрой Л. Д. Кудрявцева. О той роли, которую Кудрявцев, Чернавский и Голубева сыграли в его жизни, А.А. всегда говорил с благодарностью. Мы специально упоминаем об этом, потому что позднее, когда А.А. оказался как бы на ярко освещенной сцене в МИАН, всем было ясно, какова была при этом роль нескольких руководящих деятелей МИАН; понятно также значение его прежнего научного руководителя; а вот о его первых шагах после аспирантуры знают только непосредственные свидетели.

В 1977 г. Андрей защитил в МГУ кандидатскую диссертацию “О фундаментальной матрице пфафовой системы фуксова типа”. Как видно, это была уже аналитическая теория дифференциальных уравнений в комплексной области. Соответственно, у него были два научных руководителя – М. М. Постников, отвечавший, видимо, больше за общую научную культуру Андрея, и А. В. Чернавский. Оппонентами были А. С. Мищенко и А. А. Дезин.

Думается, сменой ориентации отчасти объясняется тот факт, что Андрей защитил кандидатскую диссертацию только спустя некоторое время после окончания аспирантуры. Обычно способные аспиранты защищаются быстрее. А Болибрух был, несомненно, очень способным студентом и аспирантом. Но отличная учеба (отличная не в смысле формальных показателей, с которыми у него, конечно, тоже все было благополучно, а в смысле быстрого и полного освоения довольно большого материала, включая и понимание таких связей, на которых у руководителя и преподавателей не было случая остановиться) – это еще не совсем то же, что самостоятельная научная работа².

До 1988 г. основная научная работа А.А. была связана с многомерной проблемой Римана–Гильберта, однако затем громкий успех был им достигнут в одномерной проблеме, в которой уже долгое время не ожидалось никаких сюрпризов. Все же и в многомерной проблеме Р.–Г. им были достигнуты значительные результаты. Им посвящена отдельная статья В. П. Лексина, тогда как некоторые результаты А.А. по класси-

²Надо сказать, что творческий рост Андрея вообще был более медленным, чем у многих молодых московских математиков. Для сравнения: в моем поколении докторскую диссертацию многие защитили до 30 лет: я сам, Арнольд, Кириллов, Манин, Митягин, Новиков, Синай, Скляренко; возможно, я еще кого-нибудь упустил из виду; еще несколько человек защитили докторскую вскоре после своего 30-летия. А Андрей защитил ее только после 40 лет. Не уверен, что даже ближайшие друзья Андрея достаточно хорошо знали о его внутреннем росте в течение примерно 10 лет после защиты кандидатской диссертации, тем паче что в то время он много внимания уделял совсем другим вещам – например, трибонике, т.е. исследованию влияния различных типов трения на работы механических систем. Это была полезная деятельность, связанная с прикладной ориентацией физтеха и требовавшая известной квалификации, но не имевшая отношения к линейным дифференциальным уравнениям в комплексной области. Я несколько раз встречался с ним в то время и должен сознаться, что сильного впечатления он тогда на меня не произвел. (Д.В.А.)

ческой одномерной проблеме Р.–Г. излагаются в статье Ю. С. Ильяшенко; обе статьи опубликованы в настоящем журнале. Поэтому здесь мы ограничимся только формулировкой одномерной задачи Р.–Г. и укажем на своеобразные свойства первого его контрпримера к одномерной проблеме Р.–Г. Мы также упомянем о работах А.А., вышедших в 2003–2004 гг. Что же до многомерной задачи, то, обращаясь к ней в данной статье, мы позволили себе не давать формальных определений и точных формулировок, надеясь на их естественное сходство с одномерным случаем.

В одномерной проблеме Римана–Гильберта (она же – 21-я проблема Гильберта) речь идет о построении системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области, грубо говоря, с предписанным характером ветвления решений в особых точках и со сравнительно умеренным характером имеющихся в этих точках особенностей. Говоря точнее, мы интересуемся системами вида

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \quad \text{где } y \in \mathbb{C}^p, \quad (1)$$

причем коэффициенты матрицы p -го порядка $A(z)$ аналитичны и однозначны всюду на пополненной плоскости комплексного переменного $\overline{\mathbb{C}}$ вне нескольких особых точек $a_1, \dots, a_n$. (Бесконечно удаленная точка ∞ может быть, а может и не быть особой.) Ниже используется обозначение $S = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Решения $y(z)$ такой системы, вообще говоря, являются многозначными (вектор-) функциями; по существу, они рассматриваются как обычные голоморфные функции на универсальной накрывающей поверхности $\tilde{S}$ области S , и следовало бы писать $y(\tilde{z})$, где $\tilde{z} \in \tilde{S}$, но мы обычно будем следовать традиционному обозначению $y(z)$. Пусть $Y(z)$ – какая-нибудь фундаментальная матрица решений системы (1), т.е. решение матричного уравнения

$$\frac{dY}{dz} = A(z)Y, \quad \text{где } Y(z) \in GL(p, \mathbb{C}) \quad \text{при } z \in S. \quad (2)$$

При продолжении $Y(z)$ вдоль какого-нибудь замкнутого пути α , начинающегося и кончающегося в фиксированной “базисной точке” $b \in S$, $Y(z)$ переходит в некоторое другое решение $Y_1(z)$ системы (2); любые два ее решения получаются друг из друга умножением справа на некоторую постоянную матрицу; поэтому $Y(z) = Y_1(z)\chi(\alpha)$, где, как легко доказать, матрица $\chi(\alpha)$ получается одинаковой для всех начинающихся в b замкнутых путей в S , гомотопных друг другу. Описание “характера ветвлений” решений дается возникающим таким образом “представлением монодромии” $\chi: \pi_1(S, b) \rightarrow GL(p, \mathbb{C})$ (это действительно представление в том смысле, как понимается в алгебре)³. Что же до “сравнительно умеренного” характера особенности в точке a_i , то здесь имеются два различных варианта. Если коэффициенты $A(z)$ имеют в a_i полюс первого порядка, то особая точка называется фуксовой; система, все особые точки которой – фуксовы, сама называется фуксовой. (Забегая вперед, отметим, что (1) можно интерпретировать как связность в тривиальном расслоении $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^p$ над $\overline{\mathbb{C}}$ с особенностями

³ χ зависит от выбора фундаментальной матрицы Y , но эта зависимость не является существенной: при другой фундаментальной матрице получится представление χ_1 , эквивалентное χ . Зависимость от выбора базисной точки столь же несущественна, как и вообще в определении фундаментальной группы.

в (точнее, над) точками a_i . В случае фуксовой системы (1) эти особенности связности по понятным причинам называют логарифмическими.) Если при $z \rightarrow a_i$ решение растет или убывает с не более чем степенной скоростью, то особая точка называется регулярной; система, все особые точки которой – регулярные, сама называется регулярной. (Здесь надо уточнить: подразумевается, что z приближается к a_i , оставаясь в пределах некоторого угла с вершиной в a_i . Необходимость в такой оговорке объясняется тем, что если позволить z приближаться к a_i по спирали, то при любом логарифмическом ветвлении за счет большого числа оборотов можно набрать сколь угодно большой рост $y(z)$ сравнительно с ростом $1/|z - a_i|$.) Фуксовы особенности всегда регулярны, но не наоборот. Соответственно, надо различать два варианта 21-й проблемы Гильберта: существует ли фуксова (соответственно регулярная) система (1) с заданными особыми точками $a_1, \dots, a_n$, для которой представление монодромии совпадает с заданным гомоморфизмом $\chi: \pi_1(S, b) \rightarrow GL(p, \mathbb{C})$?⁴

В начале XX в. Й. Племель получил положительное решение “регулярного” варианта 21-й проблемы Гильберта и пытался вывести отсюда положительное решение “фуксова” варианта. Совсем другим путем теорему Племеня передоказал в 1957 г. Х. Рёрль. Он использовал алгебро-геометрические соображения, связанные с привлечением некоторых вспомогательных голоморфных векторных расслоений над S и $\overline{S}$. Именно такой подход получил в дальнейшем развитие применительно как к одномерному, так и к многомерному случаю.

Теперь легко если не точно сформулировать, то по крайней мере описать в общих чертах и многомерную проблему Римана–Гильберта. Она состоит в реализации представлений фундаментальной группы дополнения к дивизору в комплексном многообразии как представлений монодромии аналитических систем дифференциальных уравнений по возможности с максимально простыми особенностями на дивизоре. Например, если дивизор D в комплексном многообразии M является объединением неособых комплексных подмногообразий коразмерности 1 и допускает нетривиальные мероморфные дифференциальные формы с полюсами на нем, то под простейшими аналитическими дифференциальными уравнениями можно понимать линейные интегрируемые пфаффовы системы $dy = \omega y$ с логарифмическими полюсами первого порядка на D . Описанные системы называют системами Пфаффа типа Фукса или просто фуксовыми системами. В связи с многомерной проблемой Римана–Гильберта А.А. получил ряд результатов по вопросам смежного характера в теории таких систем (см. статью Лексина). Такие системы также можно понимать как плоские связности с логариф-

⁴У самого Гильберта речь шла только о первом (“фуксовом”) варианте (хотя из текста формулировки проблемы не ясно, говорит ли он о скалярном линейном дифференциальном уравнении высокого порядка или о системе уравнений первого порядка), и он был уверен, что проблема решается положительно. Но в начале века терминология еще не установилась, и не исключено, что он имел в виду второй вариант (отметим попутно, что свойства “регулярности” и “фуксовости” для скалярных уравнений совпадают). Однако нам кажется, что, скорее всего, Гильберта просто вообще не очень-то заботило различие между этими двумя вариантами (и уравнениями и системами также) – сознательно или, скорее, более или менее бессознательно оно казалось ему несущественным. И можно привести некоторые эвристические доводы в пользу такого отношения, только оно в конечном счете все-таки ошибочно, см. далее. Таким образом, здесь мы имеем довольно редкий случай, когда Гильберт оказался не совсем прав в своем предсказании – если он и не сделал формальной ошибки, то во всяком случае упустил из виду нечто весьма существенное.

мическими особенностями в тривиальном голоморфном расслоении. Такое понимание проблемы Р.–Г. включает и классическую проблему Р.–Г. на сфере Римана в том виде, как она сформулирована выше.

Первые результаты А.А. по многомерным фуксовым системам оказались связанными с “достижением” отрицательного характера. Действуя по схеме Рёрля и Делиня, Жерар в 1968 г. получил первый содержательный результат в многомерном случае, близкий к классическому пониманию проблемы: на стягиваемом многообразии Штейна и для любого дивизора в нем с нормальными пересечениями проблема Р.–Г. всегда разрешима в классе фуксовых систем. Он также предпринял попытку описать все возможные локальные решения проблемы Р.–Г., для чего ему потребовалось описать структуру фундаментальной матрицы решений фуксовой системы в окрестности нормальной особенности дивизора. Однако А.А. обнаружил, что это описание неверно. С обнаружения одной неточности в определениях Жерара, а также ошибочности его основного результата началась в начале 1975 г. “видимая” часть математической карьеры А.А.⁵

В дальнейшем А.А. в 1978–1988 гг. несколько отдалился от тематики многомерных мероморфных пфаффовых систем и проблемы Римана–Гильберта, но полностью не бросал ее, продолжая обдумывать и уточнять некоторые моменты своих работ.

Занимаясь пфаффовыми системами, А.А. доказал для них неразрешимость в общем случае многомерной фуксовой проблемы Римана–Гильберта [11]. Но для нескольких независимых переменных, кажется, никто и не высказывал гипотезы о положительной разрешимости этой задачи, и ничего особенного в соответствующем отрицательном результате не было. Он воспринимался примерно так: “раз в случае одной независимой переменной получен (как тогда думали, см. ниже) положительный результат, естественно поинтересоваться аналогичным вопросом для пфаффовых систем, поскольку для них вообще наблюдается известная аналогия с предыдущим случаем, но оказывается, что в отношении данного вопроса такой аналогии нет”. (Теперь, пожалуй, скорее можно сказать, что аналогия все-таки есть! Впрочем, “механизмы неразрешимости” в обоих случаях разные, так что глубокой аналогии нет.) Как нам кажется, этот контрпример помог А.А. преодолеть психологический барьер при работе над классической проблемой Римана–Гильберта. При попытке доказать разрешимость проблемы Римана–Гильберта на сфере Римана для трехмерных представлений появилось целое положительное число, которое имеет связь с нормированиями и которое не удавалось уменьшить “калибровочными преобразованиями”. “Многомерный опыт” побудил А.А. искать контрпример, что привело к успеху. Но об этом будет рассказано подробнее ниже.

⁵ Я тогда был членом панели, готовившей программу соответствующей секции Международного математического конгресса 1978 г. в Хельсинки, так что вопрос об оценке работы Жерара меня весьма интересовал (мое знакомство с Андреем было связано также с [4], но в соответствии со своими непосредственными интересами в тот момент основное внимание я обратил на критику Жерара). К счастью, перед этим я продумал “аксиоматику теории характеристических показателей Ляпунова”, предложенную Р. Э. Виноградом, и понял, что в ней речь идет о неархимедовом нормировании $\mathbb{R}^p$ или $\mathbb{C}^p$ над тривиальным нормированием числового поля; поэтому я легко понял соображения А.А., связанные с нормированиями, которые имеют другое происхождение, но сходный характер. (Д.В.А.)

В указанный период А.А. активно включился в прикладную тематику в коллективе своих коллег по МФТИ (см. [8]–[10], [12]–[18], [86]). А.А. вел большую работу со школьниками ЗФТШ при МФТИ и студентами МФТИ, несколько раз был старшим экзаменатором на вступительных экзаменах в МФТИ [88]–[99]. В этот же период А.А. создал семью и у него родился сын Андрей, а потом и дочь Екатерина. Так что снижение активности в области “теоретической математики” в некоторой степени было закономерным.

Однако в конце 1987 г. А.А. твердо решил покинуть область прикладных исследований и вернуться к активной работе в области “теоретической математики”, причем разбирать изучаемые работы других авторов “самым въедливым” образом. Это решение А.А. привело к нескольким ярким результатам, которые принесли ему международную известность.

Сперва мы расскажем о некоторых событиях, предшествовавших открытию сенсационного контрпримера к “фуксовой” проблеме Римана–Гильберта. В начале 1988 г. был возобновлен неформальный семинар по многомерной проблеме Римана–Гильберта и примыкающим вопросам, ранее работавший в 1974–77 гг. Осенью 1988 г. этот семинар работал уже как семинар на мехмате, под руководством Б.А. Дубровина (разбирались работы Т. Коно и Р. Хейна по многомерной проблеме Римана–Гильберта). А.А. начал изучать вторичные характеристические классы Чигера–Саймонса, с перспективой приложения к пространствам модулей плоских мероморфных связностей и описания подпространств логарифмических связностей, и сделал несколько докладов по этой тематике. Однако примерно в середине февраля 1988 г. один из авторов статьи (В.П.Л.) напомнил А.А. о совместном обсуждении в конце 70-х – начале 80-х темных мест в книге Племеля “Problems in the sense of Riemann and Klein” (особенно рассуждения в шп. 85 и 86, где “канонический” базис решений граничной задачи с кусочно-постоянной функцией скачка преобразуется мероморфными преобразованиями в “примитивный” базис решений) и указал на работу Деккерса (“The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $P^1(\mathbb{C})$ ”, Lecture Notes in Math., 1979, v. 712) как на альтернативный путь завершения рассуждений Племеля. Деккерс для регулярных систем второго порядка на сфере Римана доказал, что они без изменения монодромии могут быть преобразованы в фуксовы системы. Этот результат, через посредство результатов Рёря (или даже Племеля), приводит к решению проблемы Римана–Гильберта в классе фуксовых систем для двумерных представлений. Было высказано предположение, что, работая с фундаментальной матрицей решений, можно доказать аналог результата Деккерса для регулярных систем третьего порядка.

Отметим, что ранее, изучая многомерные мероморфные пфаффовы системы, А.А. всегда работал с фундаментальной матрицей решений системы и накопил богатый опыт отыскания преобразований, сохраняющих монодромию, но меняющих нормирования пространства решений системы. А.А. с интересом отнесся к работе Деккерса и уже через две недели (в первый вторник марта 1988 г.) доложил на семинаре свой вариант доказательства теоремы Деккерса, еще через пару недель рассказал о целом числе, которое препятствует провести рассуждения в трехмерном случае, чуть позже, к концу 1988 – началу 1989 г. он нашел “явный” контрпример к проблеме Рима-

на–Гильберта на сфере Римана. Этот контрпример был тщательно проверен и опубликован в сентябрьском номере “Математических заметок” [16].⁶

Здесь уместно более подробно, чем написано выше, рассказать об истории проблемы Римана–Гильберта. Проблема Римана–Гильберта берет начало от посмертно опубликованной заметки Римана, написанной в 1857 г. (см.: Б. Риман. Сочинения. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 176–186). Риман обсуждает, что можно сказать о конечной системе (вообще говоря, многозначных) аналитических функций $y_1(z), \dots, y_p(z)$ со следующими свойствами: эти функции голоморфны всюду на $\mathbb{C}$ вне заданного конечного набора точек $\{a_1, \dots, a_n\}$; имеется такой набор обратимых линейных преобразований (подстановок, как говорили в то время) $G_1, \dots, G_n$, что набор $(y_1(z), \dots, y_p(z))$ преобразуется с помощью матрицы G_i при аналитическом продолжении вокруг точки a_i . Риман рассматривал такой класс функций как следующий, по сложности, объект после алгебраических функций (которые полностью характеризуются своими особыми точками и монодромиями). В своей статье о гипергеометрическом уравнении он придерживался именно такой точки зрения на решения этого уравнения. Риман также дал решение задачи Римана–Гильберта, когда $p = 2$ и $n = 3$; в этом случае им было получено дифференциальное уравнение второго порядка класса Фукса, а не система. (Позже Л. Фукс доказал, что класс фуксовых дифференциальных уравнений – не систем! – совпадает с классом регулярных уравнений.) Для большего числа особых точек $n > 3$ или большего числа $p > 2$ А. Пуанкаре показал, что задача Римана в классе фуксовых дифференциальных уравнений не всегда разрешима. Его рассуждение основано на простом подсчете (восходящем к Риману) числа параметров, определяющих начальные данные задачи (т.е. монодromию и особые точки), и числа параметров, определяющих фуксовы дифференциальные уравнения. Пуанкаре предложил подход к решению проблемы Римана, основанный на изучении автоморфных рядов и их модификаций, которые строятся по группе, порожденной матрицами $G_1, \dots, G_n$, т.е. по группе монодромии, но существенных результатов на этом пути не достиг. Гильберт включил проблему Римана в список своих 23 знаменитых проблем под номером 21 и формулировал ее так: *доказать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии*. Скорее всего, имелись в виду фуксовы системы

⁶Когда в конце 80-х гг. О.В. Висков сказал мне, что Болибрух решил 21-ю проблему Гильберта, я не поверил. Я даже сказал Вискову, что Болибрух – это не тот уровень (прежние работы А.А. были хороши, но особого блеска в них не было). Но О.В. настаивал на своем, что в общем-то было даже странно – он же не был специалистом по дифференциальным уравнениям. Я решил проверить и попросил его передать А.А. приглашение связаться со мной. Можете представить мое удивление – передо мной предстал прекрасный сказочный андерсоновский лебедь, хотя, как мне казалось, лебедю вроде бы было неоткуда взяться.

Как я понимаю, другие люди (А.В. Чернавский и, видимо, М.М. Постников) тоже проверяли его работу. Но они не были специалистами по дифференциальным уравнениям, и вначале им не поверили. А я был таким специалистом и к тому же имел репутацию человека, умеющего вылавливать ошибки, так что мое суждение в данном случае воспринималось как более основательное. (Д.В.А.)

дифференциальных уравнений (в силу отрицательных результатов Пуанкаре)⁷

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - a_i} \right) y, \quad y \in \mathbb{C}^p$$

(где A_i , $i = 1, \dots, n$, – постоянные $(p \times p)$ -матрицы, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^n A_i = 0$, означающему, что в ∞ нет особой точки), что ее монодромия, при некотором выборе базиса в пространстве решений совпадает с группой матриц, порожденной матрицами G_i . Постепенно стала общепринятой его точка зрения, что класс фуксовых систем надо считать более простым, чем класс уравнений, и что он больше соответствует исходному замыслу Римана, а потому решать проблему Римана–Гильберта надо в этом классе. Такой же точки зрения придерживался и Дж. Биркгоф в своих исследованиях.

После того как Фредгольм и Гильберт разработали теорию интегральных уравнений, Гильберт применил ее к решению различных граничных задач в классе аналитических функций. На основе таких соображений он опубликовал (весьма громоздкое) решение “регулярной” задачи Р.–Г. в случае $p = 2$. В 1908 г. И. Племель решил “регулярную” задачу Р.–Г. в случае любого p . В конечном счете он использовал подход, предложенный Гильбертом, но сделал это намного изящнее. Кстати, при этом Племель фактически заложил основы теории сингулярных интегральных уравнений (формально он использовал только уже существовавшую тогда теорию Фредгольма–Гильберта, относящуюся к регулярным интегральным уравнениям, но его редукция исследуемой задачи к этим уравнениям включала в себя прообраз аналогичной редукции для сингулярных интегральных уравнений). Как уже говорилось, он пытался вывести отсюда решение и для “фуксова” случая. После этого широко распространилось мнение, что 21-я проблема Гильберта полностью решена Племелем.

Однако чуть позже работы Шлезингера и переписка с ним⁸, по-видимому, повлияли на подходы к решению и понимание проблемы Римана–Гильберта В. И. Смирновым и его учеником И. А. Лаппо-Данилевским. Решение с помощью интегральных уравнений считалось тогда неконструктивным, и они стремились к более конструктивному решению, приписывая чистую теорему существования Гильберту, Племелю и Биркгофу. Уже в 1918 г. Смирнов пытался решить проблему Римана–Гильберта в классе фуксовых систем порядка два с четырьмя особыми точками. К 1927 г. Лаппо-Данилевский разработал теорию аналитических функций от нескольких матричных переменных и дал конструктивное решение проблемы Римана–Гильберта для матриц монодромии $G_1, \dots, G_n$, близких к единичной матрице. Он также решил проблему Римана–Гильберта с произвольными матрицами монодромии для систем Гаусса, т.е. систем второго порядка с тремя особыми точками. В 1939 г. Н. П. Еругин уточнил

⁷ Во всяком случае, Л. Шлезингер с 1901 г. (соответствующая публикация появилась в 1905 г.) связывал решение 21-й проблемы Гильберта с отысканием такой фуксовой системы на $\overline{\mathbb{C}}$.

⁸ Известно, что в двадцатые годы Шлезингер приглашал Лаппо-Данилевского (см. статью о нем в книге серии “Выдающиеся ученые России”) к себе на стажировку, но болезни и ранняя смерть Л.-Д. помешали осуществиться этим планам.

его результаты, дав более явное выражения коэффициентов системы через матрицы монодромии и особые точки. В 1956 г. Б. Л. Крылов в своей работе на 250 страницах (в Трудах Казанского авиационного института) получил такие выражения через гипергеометрические функции. В 1937 г. Н. Е. Кочин решил проблему Римана–Гильберта для нильпотентных представлений порядка нильпотентности два. В 1941 г. Еругин решил проблему Римана–Гильберта для систем второго порядка с четырьмя особыми точками. Это решение опубликовано в 1975 г. (Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5; 1976, т. 12, № 5). В историческом обзоре он прямо указал, что Племель не решил проблему Римана в первоначальной постановке, т.е. в простейшем классе дифференциальных уравнений, но по-видимому, подразумевал при этом отсутствие конструктивности у Племеля. В общем, определенное недовольство работой Племеля было у специалистов довольно давно. В 1979 г., как уже говорилось выше, Деккерс решил проблему Римана–Гильберта для произвольного числа особых точек и произвольных матриц монодромии второго порядка, причем его рассуждения, по сути, реабилитировали темные места в рассуждении Племеля в двумерном случае (возможно, доказательство и проверялось только в этом случае). В 1983 г. Т. Кон, а в 1985 г. В. И. Арнольд и Ю. С. Ильяшенко акцентировали внимание на том, что прямолинейное использование рассуждений Племеля не приводит к цели⁹. Оказалось, что у Племеля получается достаточное условие разрешимости: если хоть одна из матриц G_i диагонализуема, то “фуксова” проблема Римана–Гильберта имеет решение¹⁰. Но ожидать, что иногда ответ бывает отрицательным, в силу перечисленных выше результатов не было оснований, ибо, повторим, положительный ответ получался и в некоторых случаях, когда рассуждения Племеля не проходят. Еще раз отметим работу Рёрля 1957 г., в которой для решения проблемы Римана–Гильберта привлекались новые алгебро-геометрические и топологические методы. На неформальном семинаре, который упоминался выше, еще в 1974 году было установлено, что его результат дает решение проблемы Римана–Гильберта лишь в классе регулярных систем.

Итак, попытка положительного решения проблемы Р.–Г. для трехмерных представлений привела А.А. к построению контрпримера. Что такой пример был найден для трехмерных представлений – это в некотором роде чудо, ибо для представлений размерности три все примеры отрицательного решения проблемы Р.–Г. являются в высшей мере неустойчивыми: при малейшем изменении положения любой особой точки (напомним, что они входят в исходные данные проблемы Р.–Г.) проблема, вообще говоря, становится разрешимой. Далее представление фундаментальной группы прокола той сферы Римана, которое не реализуется как представление монодромии фуксовой системы, определяется А.А. как представление монодромии некоторой явно выписанной регулярной системы, а затем, используя упомянутое выше целое число (фуксов вес

⁹Кстати, это примерно тогда же обнаружила та самая группа, в которую входил Болибрух, однако их обзор, где об этом упоминалось, не был принят к печати. Не может быть никаких приоритетных претензий на “непечатных” основаниях; мы хотим только отметить, что Болибрух должен был начать задумываться над 21-й проблемой еще до публикаций Кона–Арнольда–Ильяшенко.

¹⁰Удивительно, что Дж. Биркгоф тоже рассуждал в этой и других задачах так, как если бы жордановых блоков не существовало.

двумерного подпредставления¹¹), доказывалось, что это представление нельзя реализовать как монодромию фуксовой системы. Для представлений размерности большей, чем три, имеются “грубые” примеры представлений, когда проблема Р.–Г. имеет отрицательное решение при всех положениях особых точек.

В более широком плане отрицательный результат А.А. изменил саму постановку проблемы Р.–Г. Вскоре А.А. нашел несколько новых достаточных условий, когда проблема Р.–Г. разрешима. В частности, сначала он доказал, что для любого неприводимого трехмерного представления проблема Р.–Г. разрешима, а чуть позже теми же методами доказал этот результат (одновременно с В.П. Костовым) для представлений любой размерности. Как обнаружил А.А., неприводимость в разных своих ипостасях имеет важное значение для положительной разрешимости многих задач теории аналитических дифференциальных уравнений.

Сказанное – это несколько примеров неожиданного разнообразия мира фуксовых и регулярных систем, открытого А.А. Почти вся его дальнейшая работа была так или иначе связана с этим миром. Результат о неприводимых представлениях монодромии – пример вопроса, для которого формулировка и ответ не требуют вникать во внутренние понятия теории. Но в ней возникают и вопросы внутреннего характера, например, связанные с нормированиями и блочной структурой матриц монодромии. Кстати, результат о неприводимых представлениях монодромии был доказан А.А. с существенным использованием нормирований (хотя задним числом его можно получить и без них), а после него вопрос о роли того или иного типа блочных структур естественно выходит на первый план. Это иллюстрирует тесную связь внутреннего развития теории с ее “внешним выходом”. В последние годы жизни А.А. не только сам уделял большое (может быть, большее, чем раньше) внимание внутренним вопросам теории, но и привлекал к ним внимание своих учеников. Однако в том, что касается этих внутренних вопросов, сейчас было бы преждевременно подводить какие-либо (хотя бы промежуточные) итоги. (Почти все результаты, упоминаемые в [81], [82], – “внешние”.)

А.А. понял также, что к этой тематике непосредственно примыкают еще два круга вопросов: о голоморфном и мероморфном приведении системы возле регулярной или иррегулярной особой точки к специальной (так называемой биркгофовой) стандартной форме и об изомонодромных деформациях, которые в это же время совсем по другим поводам приобрели большое значение. Тот факт, что задача Римана–Гильберта имеет какое-то отношение к изомонодромным деформациям, кажется интуитивно вполне естественным (хотя само по себе это еще не подсказывает удачного образа действий), и это понимал еще Риман, соединив их исследование в одной своей работе, но вот что первая задача (явно имеющая глобальный характер) может быть связана с задачей о биркгофовой стандартной форме (которая явно

¹¹ Он тесно связан с некоторыми нормированиями в пространстве решений, явно введенными в локальной теории Левеля. Нормирования систематически используются и в других работах А.А. Надо сказать, что отдельные его результаты (в том числе и из лучших) можно изложить без нормирований (особенно если вместо них обращаться к нормальным формам). Это уже делалось (см. статью Ю.С. Ильяшенко в этом выпуске журнала), и это вполне подходит, когда речь идет только о том, чтобы дать некоторое представление об отдельных достижениях А.А. Но изложение в таком стиле всего комплекса его исследований, если и было бы возможным, то оказалось бы громоздким и привело бы к маскировке части его идей.

является локальной) – это было неожиданностью. Голоморфные расслоения и мероморфные связности в них, которые использовал А.А., являлись тем естественным математическим языком, который позволил “глобализовать” локальную задачу о биркгофовой стандартной форме. Надо сказать, что приведением линейной системы к биркгофовой стандартной форме А.А. заинтересовался в 1993 г., в период пребывания в Институте Макса Планка, где он познакомился с немецким математиком В. Бальзером, затем посетил его семинар в Ульме и обсудил эту задачу с ним и его коллегами. Но точка зрения А.А. на эту задачу оказалась новой. Прежние работы по этой задаче застопорились на системах очень малой размерности: два и три; А.А. удалось достичь заметного продвижения.

Методы исследования всех трех направлений обогатились благодаря осознанию еще одной связи – с так называемыми стабильными и полустабильными векторными расслоениями (здесь А.А. помогло его топологическое образование)¹². По-видимому, систематическое использование расслоений и связностей мотивировалось следующими соображениями. Первоначально почти все положительные результаты о проблеме Римана–Гильберта получались так: бралась регулярная система с заданным представлением монодромии χ и ее пытались преобразовать в фуксову систему с тем же χ . Регулярная же система, согласно Рёрлю и его последователям, получается из некоторой плоской связности в некотором главном $GL(p, \mathbb{C})$ -расслоении P (она доставляет координатную запись этой связности в координатах, отвечающих некоторому мероморфному сечению расслоения P). Возник вопрос: а не попытаться ли все время работать со связностями в векторных и главных расслоениях, не обращаясь “по дороге” к регулярным системам? Попытка подтвердила удобство такой точки зрения (или, если угодно, такого языка), причем для получения не только положительных, но и отрицательных результатов. Отрицательные формулировки (“чего-то не существует”) оказались связанными с более положительными утверждениями об используемых расслоениях со связностями (типа “они не бывают прямыми произведениями” (пока это тоже довольно-таки отрицательная формулировка), “потому что все они такие-то”). Наконец, новая точка зрения оказалась подходящей для исследования изомонодромных деформаций, – здесь, похоже, она еще нужнее.

В частности, язык стабильных расслоений оказался естественным для формулировки наиболее общего достаточного условия разрешимости проблемы Римана–Гильберта (правда, с некоторым условием неприводимости на систему), а полустабильность оказалась и вовсе необходимым условием ее разрешимости. Обо всем этом говорится в обзоре [82]. О направлениях, связанных с проблемой Римана–Гильберта и биркгофовой стандартной формой, говорится также в книге [101], написанной на основе лекций А.А. в МФТИ и МГУ, а также в университетах Нишцы и Страсбурга. Для обоих направлений в [82] намечается, а в [101] довольно подробно излагается путь, на котором получают наиболее известные достижения, а затем очень кратко формули-

¹² Сама по себе трактовка “риман-гильбертовской” проблематики в терминах плоских связностей в голоморфных векторных расслоениях была (как видно и из сказанного выше) известна и отчасти использовалась до работ А.А., но только в них (и то не сразу) связности стали гибким и удобным инструментом исследования.

руются другие результаты. А.А. предполагал написать еще книгу об изомонодромных деформациях, но не успел даже приступить к этой работе.

Добавим еще несколько слов о последних работах А.А. (но, как говорилось, все же оставляя в стороне многие вопросы “внутреннего” характера). Уже находясь в больнице, он начал разрабатывать новую тему: отыскание *минимальной* стандартной биркгофовой формы мероморфных систем в окрестности бесконечности при мероморфных “калибровочных” преобразованиях, не повышающих ранга Пуанкаре [79]. При таких преобразованиях, в отличие от случая аналитических преобразований, биркгофова стандартная форма существенно неединственна, и потому, естественно, поставить вопрос о минимальной биркгофовой форме. В указанной работе он привел пример, когда минимальная стандартная форма существует (достигается), а также пример несохранения структуры приводимости системы при ее приведении к минимальной стандартной форме. Здесь возникает большое число вопросов, которые остались без ответа.

В работе [83] параметрическая теорема Биркгофа–Гротендика, доказанная А.А. в [65], является центральным средством исследования изомонодромных деформаций иррегулярных систем и их редукции к уравнениям Пенлеве.

Еще в 1983 г. Б. Мальгранжем был использован язык голоморфных расслоений и логарифмических связностей для доказательства наличия свойства Пенлеве у решений уравнений Шлезингера изомонодромных деформаций фуксовых систем. А.А. использовал эти методы для описания всех изомонодромных деформаций фуксовых систем [56]. В последней своей работе [80], представленной им самим в печать, он по начальным данным уравнения Шлезингера тем же методом дает конструктивное локальное описание τ -функции уравнения Шлезингера и дивизора Мальгранжа, совпадающего с множеством нулей этой τ -функции.

После 1989 г. цепь новых успехов А.А. сопровождалась знаками признания его достижений. В 1991 г. А.А. защитил докторскую диссертацию “Проблема Римана–Гильберта”. Оппонентами были В.И. Арнольд, Б.А. Дубровин и М.А. Евграфов. С 1990 г. его основным местом работы стал МИАН, чему активно способствовали Е.Ф. Мищенко и А.А. Гончар¹³. Несколько лет он продолжал еще преподавать на физтехе, но в 1996 г. стал профессором мехмата МГУ и вскоре оставил физтех. В 1994 г. он был избран членом-корреспондентом РАН, в 1997 г. – действительным членом. В 1995 г. он был удостоен премии им. А.М. Ляпунова РАН, в 2002 г. – Государственной премии Российской Федерации, в 1999 г. стал почетным профессором МГУ, в 2003 г. – лауреатом гранта Благотворительного фонда содействия отечественной науке в области естественных и гуманитарных наук по номинации “Выдающиеся ученые” за 2003 г.

Помимо научной работы, в последние годы А.А. Болибрух проявил себя выдающимся организатором научной жизни. С 1996 г. он был зам. директора МИАН, затем, сохраняя этот пост, стал председателем математической секции Отделения математических наук РАН, вице-президентом ММО, членом Научного совета ИНТАС в 1996–99 гг., членом Научного совета Международного центра им. С. Банаха и членом попечительского совета МЦНМО. Это только часть его постов, ни один из ко-

¹³и Д.В. Аносов. (Прим. ред.)

торых не был символическим. В 2002 г. он стал членом исполкома Международного Союза математиков. Надо сказать о свойственном ему стиле работы. В личном общении неизменно проявлялась доброжелательность, сочетавшаяся с требовательностью и точной оценкой ситуации. В то же время он старался как бы опережать возникающие задачи, решая их до того, как они становились проблемами.

Трудно переоценить его роль в организации международного научного сотрудничества. В 1995–97 гг. он был приглашенным профессором в Университете Нишцы, в 1998–2002 гг. – приглашенным профессором Страсбургского университета. Он участвовал в работе многих международных конференций, часто будучи приглашенным пленарным докладчиком. Просто удивительно, как много он успел сделать! За 5 лет перед последними месяцами жизни, когда А.А. был неотлучно привязан к больнице, он выступил на 31 (!) научной конференции и в каждом из докладов рассказывал что-нибудь новое. На последней своей конференции, посвященной 100-летию А.Н. Колмогорова, когда некоторое улучшение состояния здоровья позволило ему покинуть больницу, он был оптимистичен, в хорошем настроении общался с участниками конференции, строил планы дальнейшей научной работы (переговоры о лечении во Франции шли к своему успешному завершению), как всегда блестяще сделал доклад и сразу после него направился на открытие памятного бюста Л.С. Понтрягину на Ленинском проспекте.

Участвуя в международных научных конференциях, А.А. всегда использовал встречи с иностранными коллегами для расширения международного сотрудничества не только в той области, в которой работал, но и в других областях. В России удачное проведение нескольких международных конференций в немалой степени было обязано его участию в их организации и его поддержке. Руководя в конце 2002 г. проведением конференции по теории динамических систем и небесной механике, посвященной памяти В.М. Алексеева, один из нас специально подчеркнул в одном из выступлений, что без Болибруха не удалось бы провести эту конференцию так, как она прошла, даром что он тогда уже был серьезно болен. О его роли то же могли бы сказать и организаторы ряда других конференций, но пока он был здоров, об этом как-то и не упоминали, поскольку это и так было ясно.

Одно из последних его организаторских достижений – организация нового издания МИАН “Современные проблемы математики”. В первом выпуске этой серии, вышедшем уже после его смерти, помещена его обзорная статья [82], которую он дорабатывал в больнице. Эта статья – своего рода завешание А.А.

У А.А. Болибруха, как и у всех, были интересы вне науки. У него это были литература, живопись, театр. Некоторая (очень точно дозированная) артистичность наряду с искренним дружелюбием помогали ему в личных контактах. Это трудно передать словами, но не случайно он приобрел много друзей во всем свете. В период своего быстрого научного и административного взлета он сумел сохранить естественные рабочие и дружеские отношения со своими коллегами и друзьями. “Остаться самим собой” – эту нравственную задачу он сознательно формулировал для себя.

Уже несколько лет у него были некоторые проблемы со здоровьем, которое раньше было отличным. Вначале возникли неприятности с щитовидной железой, с чем вроде бы удалось справиться, но что-то нехорошее в его организме по-прежнему по

временам проявлялось. Летом 2002 г. положение ухудшилось, и прозвучало зловещее слово “лимфома”. С этого времени он проводил все больше и больше времени в больнице. Зная, что при таком диагнозе выздоровление нельзя гарантировать, А.А. все же надеялся на лучшее. Но он не откладывал дела до своего гипотетического выздоровления, а, когда позволяли силы, продолжал работать и в больнице (интенсивная работа приводило в изумление персонал больницы) – этого требовала его деятельная натура. Там он закончил последнюю научную работу, написал воспоминания, оттуда продолжал отчасти руководить как МИАН’ом, так и своими аспирантами. Эта деятельность прекратилась только в самые последние недели, когда он в очередной раз попал в реанимацию . . .

Его смерть является не только трагедией для его родных и близких, но и ударом для многих людей во всем мире, даже и не очень-то с ним близких. Она является невосполнимой потерей для математики и для нашей страны.

Д. В. Аносов, В. П. Лексин

СПИСОК РАБОТ А. А. БОЛИБРУХА

І. Список научных публикаций и монографий

- [1] К локальной теории фуксовых систем // Труды XXI научной конференции МФТИ (1975). Сер. Аэрофизика и прикл. матем., 1976. С. 193–195
- [2] Условия фуксовости системы Пфаффа на комплексном аналитическом многообразии // Труды XXI научной конференции МФТИ (1975). Сер. Аэрофизика и прикл. матем., 1976. С. 196–197
- [3] О системах Пфаффа типа Фукса // УМН. 1977. Т. 32. № 2. С. 203–204
- [4] О фундаментальной матрице системы Пфаффа типа Фукса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 5. С. 1084–1109
- [5] Системы Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 1. С. 112–123
- [6] Фуксовы системы на компактном кэлеровом многообразии // Тезисы докладов VII Всесоюзной топологической конференции (Минск, 1977). С. 23
- [7] О фундаментальной матрице систем Пфаффа типа Фукса // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, механико-математический ф-т, 1977
- [8] Об интегральном уравнении стационарного износа цилиндров // Деп. в ВИНТИ № 479-79, 1979 (совм. с М. А. Галаховым)
- [9] Влияние качества поверхности, свойств материала и смазки на эксплуатационные характеристики опор качения // Тезисы докладов Всесоюзного научно-технического семинара “Влияние качества поверхности на эксплуатационные свойства подвижных сопряжений машин” (Москва, 1979). Ч. I. С. 30–31 (совм. с М. А. Галаховым, С. В. Резниченко)
- [10] Ограниченная смазка деталей машин // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции “Трибоника и антифрикционное материаловедение” (Новочеркасск, 1980). С. 33–34 (совм. с М. А. Галаховым)
- [11] Пример неразрешимой проблемы Римана-Гильберта на $\mathbb{C}P^2$ // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. № 2. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1980. С. 60–64
- [12] Управление вибрацией подшипниковых узлов // Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Управление качеством в механосборочном производстве” (Пермь, 1981). С. 91–92 (совм. с М. А. Галаховым, А. Н. Бурмистровым)
- [13] Толщина пленки в нестационарном эллиптическом контакте // Деп. в ВИНТИ № 4360-79, 1981 (совм. с М. А. Галаховым)

- [14] Математическое моделирование процесса смазки деформируемых тел // Сборник докладов Всесоюзной школы молодых ученых “Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики” (Москва, 1981). С. 34–36 (совм. с М. А. Галаховым, С. В. Резниченко)
- [15] Толщина смазочной пленки в контакте упругих тел при переменной нагрузке // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 5. С. 51–60 (совм. с М. А. Галаховым)
- [16] О некоторых топологических задачах в теории фуксовых систем // Тезисы Ленинградской международной топологической конференции (Ленинград, 1982). С. 20 (совм. с В. П. Лексиним)
- [17] Развитие теории смазки и ее применение к расчету подшипников // Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Трение и смазка в машинах” (Челябинск, 1983). С. 56–58 (совм. с М. А. Галаховым, В. В. Мартыновым)
- [18] Расчет режима смазки при ее ограниченной подаче // Тезисы Всесоюзной научно-технической конференции (Москва, 1983). Ч. II: Проектирование, изготовление, эксплуатация и диагностика узлов трения в машиностроении. С. 18–19 (совм. с Л. В. Курочкиной)
- [19] On some problems in the theory of Fuchsian systems of several complex variables // Short Communications of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983). P. 42
- [20] О некоторых задачах в теории многомерных фуксовых систем // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам математической физики. М.: МФТИ, 1985. С. 19–26 (совм. с В. П. Лексиним)
- [21] О поведении решений пфафовой системы в окрестности особой точки // Современная математика в физико-технических задачах. М.: МФТИ, 1986. С. 8–11
- [22] О монодромии фуксовой системы // Проблемы математики в физико-технических задачах. М.: МФТИ, 1987. С. 8–11
- [23] О монодромии фуксовой системы // Тезисы Бакинской международной топологической конференции (Баку, 1987). С. 47
- [24] О проблеме Римана–Гильберта для системы трех уравнений // Проблемы современной математики в задачах физики и механики. М.: МФТИ, 1989. С. 10–25
- [25] Проблема Римана–Гильберта на комплексной проективной прямой // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 118–120
- [26] Проблема Римана–Гильберта // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 3–47
- [27] О построении фуксова уравнения по представлению монодромии // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 22–34
- [28] Проблема Римана–Гильберта для системы четырех уравнений с тремя особыми точками // Некоторые проблемы математики в задачах физики, механики, экономики. М.: МФТИ, 1990. С. 7–10
- [29] Фуксовы системы в $\mathbb{C}^2$ с постоянными коэффициентами и дивизором $(z - a_1 u) \cdots (z - a_n u) = 0$ // Некоторые проблемы математики в задачах физики, механики, экономики. М.: МФТИ, 1990. С. 11–14 (совм. с А. В. Чернавским)
- [30] Фуксовы системы с приводимой монодромией и проблема Римана–Гильберта // Нелинейные операторы в глобальном анализе. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. С. 5–20
- [31] Проблема Римана–Гильберта // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1991
- [32] О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 9–19
- [33] Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann–Hilbert problem // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1520. P. 139–155
- [34] О выводе уравнений изомонодромной деформации фуксовой системы // Проблемы математики в задачах физики и техники. М.: МФТИ, 1992. С. 16–21
- [35] О приводимых фуксовых системах // Прикладная механика и математика. М.: МФТИ, 1992. С. 18–22
- [36] Hilbert's twenty-first problem for Fuchsian linear systems // Developments in Mathematics: The Moscow School / ed. V. I. Arnold and M. I. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993. P. 54–99

- [37] On analytic transformation to Birkhoff standard form // Preprint MPI/93-44. Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993
- [38] Fuchsian systems and holomorphic vector bundles on the Riemann sphere // Preprint № 347. Nice: Université de Nice, 1993
- [39] Fuchsian systems and holomorphic vector bundles on the Riemann sphere // ESP (Projet Européen sur les Singularités). № 42, 1993
- [40] Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 553–555
- [41] The Riemann–Hilbert Problem. Braunschweig: Vieweg, 1994. (Aspects Math. V. E 22.) (with D. V. Anosov)
- [42] Об аналитическом преобразовании к биркгофовой стандартной форме // Труды МИАН. 1994. Т. 203. С. 29–35
- [43] Sufficient conditions for a system of ODE to be analytically transformed to Birkhoff standard form // Preprint № 394. Nice: Université de Nice, 1994
- [44] 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // Труды МИАН. 1994. Т. 206
- [45] Vector bundles associated with monodromies and asymptotics of Fuchsian systems // J. Dynam. Control Systems. 1995. V. 1. № 2. P. 229–252
- [46] The Riemann–Hilbert problem and Fuchsian differential equations on the Riemann sphere // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994). Basel: Birkhäuser, 1995. P. 1159–1168
- [47] On movable singular points of Schlesinger equation of isomonodromic deformations // Preprint № 429. Nice: Université de Nice, 1995
- [48] Regular systems whose monodromies differ from the monodromies of Fuchsian systems // J. Math. Sci. 1996. V. 78. № 5. P. 530–541
- [49] On the Birkhoff standard form of linear system of ODE // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 174. P. 169–189
- [50] Holomorphic bundles, associated with linear differential equations and the Riemann–Hilbert problem // The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th Problem (Gröningen, 1995). River Edge, NJ: World Scientific, 1996. P. 51–70
- [51] On the existence of Fuchsian systems with given asymptotics // Preprint № 461. Nice: Université de Nice, 1996
- [52] Holomorphic vector bundles on the Riemann sphere and the 21st Hilbert problem // J. Math. Sci. 1996. V. 82. № 6. P. 3759–3764
- [53] К вопросу о существовании фуксовых систем с данными асимптотиками // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 32–44
- [54] Transformation of reducible equations to Birkhoff standard form // Ulmer Seminare über Funktionalanalysis und Differentialgleichungen. V. 2. Ulm: University of Ulm, 1997. P. 73–81 (with W. Balser)
- [55] Isomonodromic confluence of Fuchsian singularities // Abstracts of International Conference on Dynamical Systems (Rio de Janeiro, 1997)
- [56] On isomonodromic deformations of Fuchsian systems // J. Dynam. Control Systems 1997. V. 3. № 4. P. 589–604
- [57] Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей // Труды МИАН. 1998. Т. 221. С. 127–142
- [58] Isomonodromic confluences of regular singularities // Abstracts of International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L. S. Pontryagin (Moscow, 1998). P. 19–20
- [59] On isomonodromic confluences of Fuchsian singularities // Preprint № 16. Strasbourg: IRMA, Université Louis Pasteur, 1998
- [60] Levelt's valuation method and the Riemann–Hilbert problem // Differential and Difference Equations and Computer Algebra. In honor of A. H. M. Levelt's 65th birthday. Nijmegen: Department of Mathematics, University of Nijmegen, 1998. P. 1–9
- [61] О фуксовых системах с данными асимптотиками и монодромией // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 112–121

- [62] Meromorphic reduction to Birkhoff standard form // Abstracts of the International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, 1999). P. 20–21
- [63] Мероморфное преобразование к биркгофовой стандартной форме в малых размерностях // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 87–95
- [64] On sufficient conditions for the existence of a Fuchsian equation with prescribed monodromy // J. Dynam. Control Systems. 1999. V. 5. № 4. P. 453–472
- [65] Elementary proof of the Birkhoff–Grothendieck theorem with parameters // Ulmer Seminare über Funktionalanalysis und Differentialgleichungen. V. 4. Ulm: University of Ulm, 1999. P. 157–164
- [66] Fuchsian inequality on a compact Kähler manifold // Preprint № 2. Strasbourg: IRMA, Université Louis Pasteur, 2000
- [67] On orders of movable poles of the Schlesinger equation // J. Dynam. Control Systems. 2000. V. 6. № 1. P. 57–73
- [68] Generalized Fuchsian inequality // Abstracts of the International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (Suzdal, 2000). P. 16–19
- [69] Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients // Isomonodromic Deformations and Applications in Physics (Montréal, 2000). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. P. 3–25. (CRM Proc. Lecture Notes. V. 31)
- [70] Фуксовы неравенства на компактных кэлеровых многообразиях // Докл. РАН. 2002. Т. 380. № 4. С. 448–451
- [71] Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых // УМН. 2001. Т. 56. № 4. С. 135–136
- [72] Стабильные векторные расслоения с логарифмическими связностями и проблема Римана–Гильберта // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 1. С. 10–13
- [73] The Riemann–Hilbert problem and isomonodromic deformations // International Conference “Differential Equations and Related Topics” dedicated to the Centenary Anniversary of I. G. Petrovskii (2001). Book of Abstracts. P. 5–6
- [74] Movable singularities of the Schlesinger equation of isomonodromic deformations // Progress in Nonlinear Science. Abstracts of the International Conference dedicated to the 100th Anniversary of A. A. Andronov (Nizhny Novgorod, 2001). P. 9–10
- [75] Кратности нулей компонент решений систем с регулярными особыми точками // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 61–65
- [76] Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности // Труды МИАН. 2002. Т. 238. С. 55–69
- [77] The problem on the Birkhoff standard form in dimension four // Abstracts of International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (Suzdal, 2002). P. 154–155
- [78] On tau-function for the Schlesinger equation of isomonodromic deformations // Preprint № 7. Strasbourg: IRMA, Université Louis Pasteur, 2002
- [79] Минимальная биркгофова стандартная форма // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 723–730
- [80] О tau-функции уравнения изомонодромных деформаций Шлезингера // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 2. С. 184–191
- [81] Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 53–79
- [82] Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами // Современные проблемы математики. № 1. М.: МИАН, 2003. С. 29–82
- [83] On the Riemann–Hilbert–Birkhoff inverse monodromy problem and the Painlevé equations // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. № 1. С. 121–162 (with A. R. Its, A. A. Kapaev)
- [84] On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities // arXiv:math.CA/0410483 (with C. Mitschi, S. Malek)
- [85] Linear differential equations, Fuchsian inequalities and multiplicities of zeros // Manuscript, 40 p.

II. Научно-методические публикации

- [86] Математические основы трибоники. М.: МФТИ, 1983 (совм. с М. А. Галаховым, В. П. Ковалевым)
- [87] Анализ на многообразиях (методы дифференциальной геометрии в математической физике). М.: МФТИ, 1983 (совм. с А. Н. Черноплековым)
- [88] Задачи устного экзамена МФТИ // Квант. 1983. № 2. С. 28 (совм. с В. Уроевым, М. Шабунинным)
- [89] Квадратичный трехчлен // Квант. 1983. № 9. С. 26–28 (совм. с В. Уроевым, М. Шабунинным)
- [90] Метрические соотношения в треугольнике // Квант. 1985. № 4. С. 48–52 (совм. с В. Уроевым, М. Шабунинным)
- [91] Сборник задач по спецкурсу “Анализ на многообразиях”. М.: МФТИ 1985 (совм. с А. Н. Черноплековым)
- [92] Задачи на координатной плоскости // Квант. 1986. № 11. С. 48–52 (совм. с В. Уроевым, М. Шабунинным)
- [93] Решение систем тригонометрических уравнений // Квант. 1987. № 11. С. 46–49 (совм. с В. Уроевым, М. Шабунинным)
- [94] Квадратичные уравнения и неравенства (задание № 2 для 8-х кл., ЗФТШ МФТИ). Долгопрудный: МФТИ, 1987
- [95] Решение задания № 2 для 8-х кл., ЗФТШ МФТИ. Долгопрудный: МФТИ, 1987
- [96] Квадратичные уравнения и неравенства (задание № 2 для 9-х кл., ЗФТШ МФТИ). Долгопрудный: МФТИ, 1989
- [97] Системы нелинейных уравнений и неравенств // Факультативные курсы по математике для 10–11 классов. М.: Министерство народного образования РСФСР, 1989. С. 58–106
- [98] Простейшие уравнения и системы (задание № 4 для 9-х кл., ЗФТШ МФТИ). Долгопрудный: МФТИ, 1990
- [99] Решение задания № 4 для 9-х кл., ЗФТШ МФТИ. Долгопрудный: МФТИ, 1991
- [100] Проблемы Гильберта (100 лет спустя). М.: МЦНМО, 1999
- [101] Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000
- [102] Some memories of Boarding № 45 // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 174. P. 1–5
- [103] Уравнения Максвелла и дифференциальные формы. М.: МЦНМО, 2002
- [104] Воспоминания и размышления о давно прошедшем. М., 2003

III. Юбилейные статьи

- [105] Дмитрий Викторович Аносов (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 193–200
- [106] Владимир Игоревич Арнольд (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 235–255
- [107] Анатолий Дмитриевич Мышкис (к восьмидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2000. Т. 55. № 3. С. 195–196
- [108] Анатолий Михайлович Степин (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 201–204
- [109] Александр Сергеевич Мищенко (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2001. Т. 56. № 6. С. 167–170
- [110] Андрей Александрович Гончар (к семидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 185–190
- [111] Евгений Фролович Мищенко (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 9–10
- [112] Василий Сергеевич Владимиров (к восьмидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2003. Т. 58. № 1. С. 199–207
- [113] Виктор Матвеевич Бухштабер (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2003. Т. 58. № 3. С. 199–206

IV. Редактирование и комментарии

- [114] Дифференциальные уравнения и динамические системы. К 80-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко. М.: МАИК “Наука/Интерпериодика”, 2002. (Труды МИАН. Т. 236.)
- [115] Монодромия в задачах алгебраической геометрии и дифференциальных уравнений. М.: МАИК “Наука/Интерпериодика”, 2002. (Труды МИАН. Т. 238.)
- [116] Monodromy and Differential Equations. Dordrecht: Kluwer, 2003 (Acta Appl. Math. V. 75. № 1–3) (with M. Hazewinkel, V. Kulikov, M. Teicher)
- [117] Д. Гильберт. Избранные труды. Т. 2. М.: Факториал, 1998 (комментарии к проблемам Гильберта: с. 591–593, и к теории интегральных уравнений: с. 540)