Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Геометрия и динамика полей Галуа, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 23–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:25:36

УДК 51+519.22+512+511+514.144+517.987.5

Памяти А. Болибруха

ГЕОМЕТРИЯ И ДИНАМИКА ПОЛЕЙ ГАЛУА

В. И. Арнольд

Таблицы, задающие операции в конечных полях, обладают многими свойствами таблиц случайных чисел. Речь идет о своеобразном варианте автоморфизмов торов теории динамических систем, в котором число точек тора конечно.

Устанавливаются также действия преобразований Фробениуса конечных полей на проективные структуры конечных проективных пространств, описывающих геометрию поля.

Библиография: 1 название.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Построение таблицы поля	23
§ 2. Эргодические свойства таблиц полей Галуа	27
А) Гипотеза о равномерном распределении по площади таблицы	27
В) Гипотеза о случайности переходов	28
С) Гипотеза о случайности орбиты	28
D) Вариация таблицы	29
§ 3. Проективное многообразие поля Галуа	29
§ 4. Преобразования Фробениуса и их проективизации	32
§ 5. Проективные структуры поля Галуа из p^2 элементов, где $p = 11$	35
§ 6. Проективные структуры поля Галуа из p^2 элементов, где $p = 13$	38
Список литературы	40

§ 1. Построение таблицы поля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Поле Галуа* называется поле из конечного числа элементов.

Простейшим примером является поле $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ вычетов по простому модулю p . Оно состоит из p элементов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00655).

Классическая теорема об этих полях такова:

ТЕОРЕМА. Число элементов любого поля Галуа равно p^a , где p – простое число, a – натуральное число. Поле из такого числа элементов существует (для любого числа p^a), и оно единственно (с точностью, конечно, до изоморфизма полей).

Чтобы записать операции сложения и умножения в поле, перенумеруем его элементы следующим образом. В поле есть элемент нуль, 0 (определяемый однозначно условием “ $0 + x = x$ для любого элемента x ”), а все остальные элементы образуют группу (“мультипликативную группу $\mathcal{F} \setminus 0$ поля $\mathcal{F}$ ”) по умножению, т.е. имеют обратные элементы x^{-1} , для которых $xx^{-1} = 1$ (где элемент 1 однозначно определяется условием “ $y1 = y$ для любого элемента y ”).

Оказывается, мультипликативная группа поля – всегда циклическая группа (порядка $p^a - 1$ для поля из p^a элементов), т.е. ее элементы можно выразить через один из них, A (“мультипликативную образующую”), как

$$A, A^2, A^3, \dots, A^{p^a-1} = 1.$$

Образующая A может быть выбрана по-разному. A именно, за образующую можно взять любой элемент $B = A^k$, для которого k взаимно просто с $p^a - 1$.

Таким образом, число мультипликативных образующих равно значению функции Эйлера, $\varphi(p^a - 1)$.

ПРИМЕР. Для поля из $p^a = 49$ элементов число образующих есть $\varphi(48) = 16$, а именно, образующими являются элементы A^k , где

$$k = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47.$$

Все мультипликативные образующие образуют подгруппу по умножению (в кольце вычетов по модулю $p^a - 1$), например, для $p^a = 49$:

$$5 \cdot 5 = 25, \quad 7 \cdot 7 = 1, \quad 5 \cdot 11 = 7.$$

По сложению поле из p^a элементов представляет собой p -векторное пространство (коммутативную группу $(\mathbb{Z}_p)^a$), так что его p^a элементов можно записать в клеточки “конечного тора” размерности a ,

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_a e_a,$$

где $(e_1, \dots, e_a)$ – аддитивные образующие, а коэффициенты x_j – вычеты по модулю p .

ПРИМЕР. Поле из 49 элементов состоит из комбинаций

$$x = \alpha 1 + \beta A,$$

где 1 и A – элемент “единица” поля и мультипликативная образующая, обсужденная выше (в общем случае в качестве аддитивных образующих можно взять элементы $\{A, A^2, \dots, A^{p^a-1}, A^a = 1\}$).

Для поля из p^2 элементов мы заключаем, что

$$A^2 = \alpha 1 + \beta A \quad (1)$$

с некоторыми коэффициентами α и β из $\mathbb{Z}_p$.

Из соотношения (1) легко вывести формулы для всех элементов поля:

$$A^3 = A \cdot A^2 = \alpha A + \beta A^2 = \alpha A + \beta(\alpha 1 + \beta A) = p_3 1 + q_3 A,$$

где $p_3 = \alpha\beta$, $q_3 = \alpha + \beta^2$.

Точно так же находим

$$A^k = p_k 1 + q_k A, \quad (p_k = \alpha q_{k-1}, \quad q_k = \beta q_{k-1} + p_{k-1}).$$

Эти рекуррентные соотношения позволяют легко выписать многочлены p_k и q_k от α и β , коэффициенты которых – числа сочетаний. Многочлен p_k имеет степень $2k$, а многочлен q_k – степень $2k - 1$, если считать, что степень α есть 2, а степень β есть 1, как подсказывает соотношение (1).

Явные формулы для коэффициентов многочленов p_k и q_k получаются выписыванием ответов при $k = 4, 5, 6$:

$$\begin{aligned} p_4 &= \alpha^2 + \alpha\beta^2, & q_4 &= 2\alpha\beta + \beta^3; \\ p_5 &= 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^3, & q_5 &= \alpha^2 + 3\alpha\beta^2 + \beta^4; \\ p_6 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^4, & q_6 &= 3\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^3 + \beta^5, \end{aligned}$$

и их сравнением с треугольником Паскаля:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 \\ & 1 & & \boxed{4} & & 6 & & 4 & & 1 \\ \boxed{1} & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad \longleftarrow \boxed{q_6}$$

Выделены коэффициенты многочлена q_6 : они соответствуют биномиальным членам степени 5 при $\deg \beta = 1$, $\deg \alpha = 2$, т.е. член $\alpha^u \beta^v$ входит в q_6 при $2u + v = 5$ со своим биномиальным коэффициентом C_{u+v}^v .

Чтобы выбрать образующую A , нужно подобрать коэффициенты α и β (вычеты по модулю p) так, чтобы

$$A^k = 1 \quad \text{при} \quad k = p^2 - 1, \quad A^k \neq 1 \quad \text{при} \quad k < p^2 - 1.$$

Эти сравнения

$$\left[\begin{cases} p_k(\alpha, \beta) = 1 & \text{при } k = p^2 - 1, \\ q_k(\alpha, \beta) = 0 & (p_k, q_k) \neq (1, 0) \text{ при } k < p^2 - 1 \end{cases} \right]$$

легко решаются при конкретных p^2 . В случае p^a элементов поля рассуждения аналогичны, хотя в (1) вместо p^2 нужно рассматривать p^a (и вместо A^2 разлагать A^a).

После этого можно реализовать поле, считая уравнение (1) характеристическим для матрицы A , т.е. (при $a = 2$) выбирая в качестве A матрицу порядка 2 со следом β и определителем $-\alpha$, например, $(A) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР. Для $p^a = 49$ допустим выбор $\alpha = \beta = 2$, $(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Поле состоит из 49 матриц: 0 и A^k , $k = 1, \dots, 48$, причем $A^{48} = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Смысл матрицы A состоит в следующем. Оператор умножения всех элементов поля на элемент A является линейным оператором $(\mathbb{Z}_p)^a \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^a$ в векторном пространстве $(\mathbb{Z}_p)^a$ (в примере $a = 2$ – на плоскости из p^2 точек).

Базис этой плоскости образуют векторы $\boxed{1} = 1e_1 + 0e_2$ и $\boxed{A} = 0e_1 + 1e_2$ (где e_1 – это элемент $\boxed{1}$ поля, а e_2 – элемент $\boxed{A}$; элемент выделен для того, чтобы не спутать его с коэффициентом 1, принадлежащим $\mathbb{Z}_p$).

Оператор, переводящий любой элемент x поля в элемент Ax , линеен и имеет матрицей $(A) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, так как $A\boxed{1} = A$, $A\boxed{A} = A^2 = \alpha 1 + \beta A$, т.е. $(A) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(A) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Выбрав таким образом обозначения, мы можем заполнить последовательно каждую клеточку конечного “тора” $(\mathbb{Z}_p)^2$ стоящим в ней элементом поля: элемент

$$A^k = p_k \boxed{1} + q_k \boxed{A}$$

записывается в клетке с координатами (p_k, q_k) в виде своего номера k , последовательно, при $k = 1, 2, \dots, (p^2 - 1)$ (начиная с $A^1 = \boxed{A}$ в клетке $(0, 1)$ и кончая $A^{p^2-1} = \boxed{1}$ в клетке $(1, 0)$). Результат называется *таблицей поля* (для поля из p^a элементов таблица заполняет a -мерный куб над $\mathbb{Z}_p$).

ПРИМЕР. Для $p^a = 49$ эти вычисления дают таблицу

$\boxed{6A}$	25	44	7	30	3	45	42
$\boxed{5A}$	9	35	28	29	39	26	14
$\boxed{4A}$	17	37	22	36	34	43	47
$\boxed{3A}$	41	23	19	10	12	46	13
$\boxed{2A}$	33	38	2	15	5	4	11
$\boxed{1A}$	1	18	21	27	6	31	20
$\boxed{0A}$	∞	48	32	40	16	8	24
$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	

Например, здесь записаны формулы $A^{15} = 3\boxed{1} + 2\boxed{A}$, $A^{41} = 3\boxed{A}$, $A^{24} = -\boxed{1}$. Знак “ ∞ ” означает элемент 0 поля (не имеющий вида A^k).

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение, что $A^k A^l = A^{k+l}$, очевидно, но наши рассуждения доставляют гораздо менее очевидный факт: описание операции сложения в поле в терминах (логарифмической) нумерации его элементов,

$$A^k + A^l = A^{f(k,l)},$$

где если k стоит в клетке (p_k, q_k) таблицы и l – в клетке (p_l, q_l) , то $f(k, l)$ означает номер, стоящий в таблице в клетке $(p_k + p_l, q_k + q_l)$.

ПРИМЕР. $A^{15} + A^{41} = A^{29}$, $A^{14} = -A^9$ (так как $A^{24} = -\boxed{1}$).

§ 2. Эргодические свойства таблиц полей Галуа

Глядя на таблицы, вроде выписанной выше для $p^a = 49$, получаешь ощущение хаотичности или “случайности” расстановки номеров в клетках таблицы.

Я предполагаю, что этому ощущению можно придать смысл точного утверждения, допускающего если и не немедленное доказательство, то, во всяком случае, численную проверку, хотя бы путем компьютерного эксперимента.

Чтобы это выполнить, нужно охарактеризовать “хаотичность” каким-либо численным критерием. Я предложу ниже, не претендуя на окончательный выбор, несколько таких критериев (вдохновляясь иногда теорией информации, а иногда физическими и астрономическими исследованиями “хаотичности” и “случайности” таких объектов, как, например, галактики и даже скопления галактик в крупномасштабной структуре Вселенной).

А) Гипотеза о равномерном распределении по площади таблицы.

Разумеется, все $n = p^2$ (в общем случае p^a) элементов поля заполняют по разу все клеточки таблицы, поэтому число элементов в любой области (состоящей из целых клеточек) пропорционально объему (площади) этой области.

Однако если вместо всех $n = p^a$ элементов поля рассмотреть только первые $m < n$ элементов $(A, A^2, \dots, A^m)$, то они заполнят не все клеточки, а только m из них, и тогда можно посмотреть, сколько из них попадет в данную область.

Например, мы можем рассмотреть область (скажем, с гладкой границей) G на евклидовом квадрате площади 1, а затем поле из большого числа элементов $n = p^2$ и выбрать, скажем, первые $m = \theta n$ элементов поля, где $0 < \theta < 1$.

Гипотеза состоит в том, что при $p \rightarrow \infty$ число $\mathcal{N}(G, p)$ элементов A^k , $k \leq m$, попавших в лежащие в области G клеточки таблицы поля из p^2 элементов, будет асимптотически пропорционально площади этой области:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(G, p)}{\theta p^2} = \text{mes } G.$$

В этом исследовании, разумеется, выбор $m = \theta n$ можно заменить другими выборами, рассматривая даже случай большего, но фиксированного (не зависящего от p) числа m , или изучая характер зависимости указанного выше предельного перехода от параметра θ .

Разумеется, предположение $a = 2$ было сделано выше только для того, чтобы возможно упростить формулировку: при других значениях a (включая даже $a = 1$) задача столь же интересна.

Для численного исследования можно рассматривать, в качестве примера, специальные области G , например, выделенные условиями

$$\{u \boxed{1} + v \boxed{A} \mid 0 < u < p/2\} \quad \text{или} \quad \{u \boxed{1} + v \boxed{A}, 0 < u < v\}$$

в квадрате $(\mathbb{Z}_p)^2$.

Вместо условия гладкости границы области G можно было бы наложить условие ее достаточно простого алгоритмического описания (что позволило бы включить, например, “области”, заданные условиями “число u четно”).

В) Гипотеза о случайности переходов.

Предположим, что вся таблица разбита на две части, I и II (скажем, область G , рассматривавшаяся выше, и ее дополнение).

Рассматривая последовательность точек A^k , $k = 1, 2, \dots, m$, можно выделить четыре случая:

- 1) $A^k \in I$, $A^{k+1} \in I$; 2) $A^k \in I$, $A^{k+1} \in II$;
 3) $A^k \in II$, $A^{k+1} \in I$; 4) $A^k \in II$, $A^{k+1} \in II$.

Естественная “гипотеза хаотичности” состоит здесь в том, что числа значений k этих четырех типов пропорциональны произведениям вероятностей событий, т.е. если $\text{mes } I = q$, $\text{mes } II = r$ (где $q + r = 1$), то для чисел N_j значений k типа $j = 1, \dots, 4$ ожидаются следующие асимптотики:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_j}{m} = (q^2, qr, rq, r^2).$$

Эта асимптотика интересна даже для всей последовательности элементов поля, выбирая $m = n = p^2$ (или p^a в случае поля из p^a элементов).

Можно также рассматривать более длинные цепочки $(A^k, A^{k+1}, \dots, A^{k+s})$, где также можно предполагать аналогичное асимптотическое перемешивание.

Я не уверен, что эти вопросы достаточно исследованы даже и в аналогичной теории обычных динамических систем, где нет параметра p , но рассматриваются асимптотики все более длинных отрезков траектории системы.

С) Гипотеза о случайности орбиты.

Рассмотрим первые m точек поля, A^k , $k = 1, 2, \dots, m$, как подмножество в целочисленном квадрате $(\mathbb{Z}_p)^2$ (или в евклидовом квадрате $[0, 1]^2$, или в a -мерном кубе $(\mathbb{Z}_p)^a$ или $[0, 1]^a$, или торе $\mathbb{R}^a / \mathbb{Z}^a$).

Спрашивается, насколько случайно это множество – насколько его статистические характеристики отличаются от стохастических характеристик, например, случайно и независимо друг от друга набросанных в то же пространство m точек?

В качестве стохастических характеристик множества точек можно рассмотреть, например, следующие числа:

- a) минимальное расстояние между двумя точками множества;
- b) максимальный радиус шара, не содержащего точек множества;
- c) сумма квадратов расстояний от каждой точки множества до всех остальных (или только до ближайшей точки);
- d) перколяционный радиус.

Последнее число определяется так. Если положительное число ρ достаточно мало, то шары радиуса ρ с центрами в точках нашего множества, если и пересекаются, образуют все же небольшие кластеры.

Напротив, при достаточно большом значении ρ по цепочкам последовательно пересекающихся шаров можно уйти далеко.

То значение радиуса ρ , при котором происходит переход от кластеров к длинным цепям (например, соединяющим противоположные стороны квадрата) называется перколяционным параметром (“перколяция” – это “просачивание”), и, интерпретируя шары как дефекты оболочки сосуда, мы определяем размер и плотность дефектов, вызывающих нарушение его герметичности.

Разумеется, перколяционный радиус сильно зависит от систематичности расположения центров. Например, если центры лежат на кривой (в трехмерном кубе радиуса 1), то перколяционный радиус будет, вообще говоря, порядка $1/m$, а если центры образуют кристаллическую решетку, то радиус гораздо больше ($1/\sqrt[3]{m}$).

Сравнение асимптотики перколяционного радиуса орбиты $\{A^k, 1 \leq k \leq m\}$ с перколяционным радиусом системы m случайно набросанных в $[0, 1]^a$ точек (скажем, при пуассоновском их распределении) показывает степень хаотичности орбиты.

Разумеется, кроме описанных выше численных критериев стохастичности возможны и многие другие, так что задача состоит здесь более всего в том, чтобы выбрать разумный критерий, а не только проэкспериментировать с его вычислением: здесь важна простота вычисления критерия. Предложу еще один вариант.

Д) Вариация таблицы.

Эта величина измеряет степень различия номеров k , заполняющих близкие клетки таблицы. Например, в случае квадратной таблицы из p^2 элементов (или из $p^2 - 1$ вычета по модулю $p^2 - 1$) можно рассмотреть сумму всех расстояний между соседними в таблице номерами (исключая номер ∞). Разумеется, расстояние между вычетами a и b по модулю M – это меньшее из чисел $|a - b|$ и $M - |a - b|$ (скажем, расстояние между вычетами 1 и 6 по модулю 7 равно 2). Сумма всех $[4(p^2 - 1) - 8]/2$ расстояний в таблице характеризует хаотичность ее заполнения $p^2 - 1$ вычетом (сравнивать со случайным заполнением).

§ 3. Проективное многообразие поля Галуа

Проективизация векторного пространства $(\mathbb{Z}_p)^a$ определяется как многообразие прямых, проходящих через точку 0 этого пространства:

$$P^{a-1}(\mathbb{Z}_p) = ((\mathbb{Z}_p)^a \setminus 0) / (\mathbb{Z}_p \setminus 0).$$

ПРИМЕР. При $a = 2$, $p = 7$ мы получаем из 49 точек $u \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix}$ плоскости $\mathbb{Z}_7^2$ восемь прямых

$$\{(u, v) : v = \lambda u\}, \text{ где } \lambda = 0, 1, 2, \dots, 6, \infty.$$

Уравнение $v = \infty u$ означает прямую $u = 0$, так что проективная прямая $P^1(\mathbb{Z}_p)$ состоит из $p + 1$ точки; p из них составляют аффинную прямую ($\lambda = 0, 1, \dots, 6$ в нашем примере), а последняя точка называется бесконечно-удаленной и обозначается символом $\lambda = \infty$.

Все эти точки равноправны, и в окрестности точки $\lambda = \infty$ за координату можно взять, например, вычет $\mu = 1/\lambda$, через который уравнение прямой записывается в виде $\{(u, v) : u = \mu v\}$.

На многообразии P^{a-1} действует, переставляя его точки, группа проективных преобразований: это спроектированные из пространства $(\mathbb{Z}_p)^a$ на P^{a-1} линейные преобразования.

Например, при $a = 2$ эти преобразования проективной прямой из $p+1$ точки имеют вид

$$\lambda \mapsto \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

где $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования плоскости $(\mathbb{Z}_p)^2$, т.е. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – вычеты по модулю p .

Эти преобразования переставляют точки проективного пространства P^{a-1} специальным образом: возникающая подгруппа обычно гораздо меньше всей группы перестановок из $p+1$ элемента проективной прямой P^1 в случае $a = 2$. Например, для $p = 7$ число всех перестановок 8 элементов равно $8! = 56 \cdot 720$, а число проективных перестановок не превосходит $(7^2 - 1)/(7 - 1) = 400$.

Применим эти конструкции к полю из p^2 элементов. Умножение на элемент поля действует на плоскости $\mathbb{Z}_p^2$ как линейное преобразование.

Прямые, проходящие через точку 0 поля, определены структурой поля однозначно, независимо от выбора той мультипликативной образующей, при помощи которой мы реализовали поле как плоскость $\mathbb{Z}_p^2$. Действительно, такая прямая состоит из p элементов вида $\{B, B + B, B + B + B, \dots\}$.

ТЕОРЕМА. Преобразование Фробениуса $\Phi_k: F \rightarrow F$, заданное возведением в степень k ,

$$\Phi_k(x) = x^k \quad \text{для всех } x \text{ из } F \quad (2)$$

(где k взаимно просто с p для поля F из p^2 элементов) действует на проективную прямую $P^1(\mathbb{Z}_p)$ как некоторое отображение $P\Phi_k$ точек этой проективной прямой. Чтобы это отображение было перестановкой, k должно быть взаимно просто с $p^a - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению (2),

$$\Phi_k(cx) = c^k \Phi_k(x) \quad \text{для } c \text{ из } \mathbb{Z}_p,$$

поэтому образы точек x и cx при отображении Фробениуса Φ_k лежат на одной проходящей через нуль прямой пространства $(\mathbb{Z}_p)^a$ (что доказывает и теорему о действии преобразования Фробениуса в поле из p^a элементов на множестве $P^{a-1}(\mathbb{Z}_p)$).

ПРИМЕР. Проективная прямая $P^1(\mathbb{Z}_7)$ состоит из восьми точек. Каждая из этих точек – прямая, состоящая из нуля и еще шести точек, а именно:

$$\lambda = 0: \{48, 32, 40, 16, 8, 24\};$$

$$\lambda = 1: \{18, 2, 10, 34, 26, 42\};$$

$$\lambda = 2: \{38, 22, 30, 6, 46, 14\};$$

$$\lambda = 3: \{23, 7, 15, 39, 31, 47\};$$

$$\lambda = 4: \{37, 21, 29, 5, 45, 13\};$$

$$\lambda = 5: \{35, 19, 27, 3, 43, 11\};$$

$$\lambda = 6: \{44, 28, 36, 12, 4, 20\};$$

$$\lambda = \infty: \{1, 33, 41, 17, 9, 25\}.$$

Элементы поля, отличные от нуля, обозначены здесь, как в таблице поля, своими логарифмами. Например, число 48 означает матрицу

$$A^{48} = \boxed{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

число 1 означает матрицу

$$A^1 = \boxed{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

число 24 означает матрицу

$$A^{24} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -\boxed{1} \pmod{7}.$$

ТЕОРЕМА. *Структура проективной прямой, определенная координатой λ на множестве $P^1(\mathbb{Z}_p)$ при помощи мультипликативной образующей A поля из p^2 элементов, совпадает со структурой проективной прямой, определенной на том же множестве при помощи любой другой мультипликативной образующей, $\tilde{A} = A^k$ (где вычит числа k по модулю $p^2 - 1$ взаимно прост с этим модулем).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и любой элемент поля, образующая $\boxed{A}$ выражается через $\boxed{\tilde{A}}$ как точка на плоскости, порожденной элементами $\boxed{1}$ и $\boxed{\tilde{A}}$:

$$\boxed{A} = \xi \boxed{1} + \eta \boxed{\tilde{A}}, \quad \text{где } \xi \in \mathbb{Z}_p, \quad \eta \in \mathbb{Z}_p.$$

Предположим, что (ненулевой) элемент x поля лежит на прямой, соответствующей данному номеру λ (на плоскости, порожденной элементами $\boxed{1}$ и $\boxed{A}$):

$$x = u \boxed{1} + v \boxed{A}, \quad \text{где } v = \lambda u.$$

Тогда выражение этого элемента x через $\boxed{1}$ и $\boxed{\tilde{A}}$ имеет вид

$$x = \tilde{u} \boxed{1} + \tilde{v} \boxed{\tilde{A}}, \quad \text{где } \tilde{u} = u + v\xi, \quad \tilde{v} = v\eta.$$

Эта точка лежит на прямой $\tilde{v} = \tilde{\lambda} \tilde{u}$ плоскости $\langle \boxed{1}, \boxed{\tilde{A}} \rangle$, где

$$\tilde{\lambda} = \frac{v\eta}{u + v\xi} = \frac{\lambda\eta}{1 + \lambda\xi}.$$

Мы получили дробно-линейное выражение координаты $\tilde{\lambda}$ в построенной по мультипликативной образующей $\tilde{A}$ системе координат через координату λ в построенной по мультипликативной образующей A системе.

Эта дробно-линейность и означает независимость заданной этим выбором структуры проективной прямой на множестве $P^1(\mathbb{Z}_p)$ от выбора мультипликативной образующей.

Аналогичная теорема верна и для проективного многообразия $P^{a-1}(\mathbb{Z}_p)$ и доказывается теми же рассуждениями.

ПРИМЕР. Для поля из 49 элементов и для числа $k = 5$ мы находим из предыдущих таблиц для каждого значения λ элемент x соответствующей прямой, его выражение $\tilde{x}$ через $\boxed{1}$ и $\boxed{\tilde{A}} = \boxed{A}^5$, а затем номер $\tilde{\lambda}$ проходящей через $\tilde{x}$ прямой на плоскости, порожденной $\boxed{1}$ и $\boxed{\tilde{A}}$ (опять из приведенных таблиц):

λ	0	1	2	3	4	5	6	∞
x	$A^{48} = \boxed{1}$	A^2	A^6	A^7	A^5	A^3	A^4	A^1
$\tilde{x}$	$\boxed{1}$	$5\boxed{1} + \boxed{\tilde{A}}$	$2\boxed{1} + 4\boxed{\tilde{A}}$	$4\boxed{1} + 3\boxed{\tilde{A}}$	$\boxed{\tilde{A}}$	$6\boxed{1} + 3\boxed{\tilde{A}}$	$\boxed{1} + \boxed{\tilde{A}}$	$5\boxed{1} + 4\boxed{\tilde{A}}$
$\tilde{\lambda}$	0	3	2	6	∞	4	1	5

В этом примере $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2}$. Это не противоречит значениям $\xi = 5, \eta = 4$ (указанным в последнем столбце таблицы), так как по модулю 7

$$\frac{\lambda}{3\lambda + 2} \equiv \frac{4\lambda}{1 + 5\lambda} \quad (\text{поскольку } 3 \cdot 4 \equiv 5, 2 \cdot 4 \equiv 1).$$

Выбирая в качестве мультипликативной образующей $\tilde{A} = A^7$ или A^{11} , мы получили бы, соответственно, значения проективных координат на $P^1(\mathbb{Z}_7)$, равные

$$\lambda_7 = -\frac{\lambda}{2\lambda + 1}, \quad \lambda_{11} = \frac{\lambda}{\lambda + 2}.$$

Поэтому четыре изученные нами проективные координаты на $P^1(\mathbb{Z}_7)$ связаны друг с другом так:

λ	0	1	2	3	4	5	6	∞
λ_5	0	3	2	6	∞	4	1	5
λ_7	0	2	1	∞	5	4	6	3
λ_{11}	0	5	4	2	3	∞	6	1

§ 4. Преобразования Фробениуса и их проективизации

Определенные выше формулой (2) преобразования Фробениуса $\Phi_k: F \rightarrow F$ (где число k взаимно просто с $p^a - 1$ для поля из p^a элементов) образуют коммутативную группу, элементы которой действуют на множестве точек проективной прямой $P^1(\mathbb{Z}_p)$ при $a = 2$ как некоторые перестановки $P\Phi_k$ ее $p + 1$ точек (по предыдущей теореме).

Исследуем эти группы $\{\Phi_k\}$ и $\{P\Phi_k\}$. Обозначим через Γ мультипликативную группу (Эйлера), образованную $\varphi(n)$ взаимно простыми с $n = p^2 - 1$ вычетами по модулю n (для поля из 49 элементов группа $\Gamma = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ состоит из 16 вычетов

$$\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47\},$$

причем в качестве образующих трех описанных сомножителей можно взять, например, вычеты 5, 7 и 17).

Описанные выше конструкции определяют гомоморфизмы коммутативных групп,

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi} \{\Phi_k\} \xrightarrow{\psi} \{P\Phi_k\},$$

которые мы сейчас вычислим для поля из 49 элементов.

Действия преобразований Фробениуса на $P^1(\mathbb{Z}_7)$ вычисляются по предыдущей таблице точек прямых. Например, $\Phi_5(A) = A^5$, поэтому на прямые преобразование Φ_5 действует так:

$$\Phi_5(\{1, 33, \dots\} \in P^1) = (\{5, 45, \dots\} \in P^1).$$

Итак, $P\Phi_5(\{\lambda = \infty\}) = \{\lambda = 4\}$.

Такие же вычисления для других значений λ показывают, что преобразование Фробениуса $P\Phi_5$ осуществляет следующую перестановку восьми точек:

$\lambda(x)$	0	1	2	3	4	5	6	∞
$\lambda(\Phi_5(x))$	0	1	2	5	∞	3	6	4

Иными словами, четыре точки $\lambda = 0, 1, 2$ и 6 остаются на месте, а члены пар $(3, 5)$ и $(4, \infty)$ переставляются внутри пары.

Из этого следует, что *перестановка Φ_5 не является проективным преобразованием* (иначе, оставляя на месте четыре точки, она не сдвигала бы ни одной).

Аналогичные вычисления для всех 16 преобразований Фробениуса Φ_k ($k \in \Gamma$) показывают, что они осуществляют всего четыре разных перестановок восьми точек проективной прямой, а именно $P\Phi_k$ переводит точку x с координатой $\lambda(x) = 0, 1, \dots, 6, \infty$ в точку, координата λ которой задана следующей таблицей:

k	$\lambda(P\Phi_k(x))$							
1, 17, 25, 41	0	1	2	3	4	5	6	∞
5, 13, 29, 37	0	1	2	5	∞	3	6	4
7, 23, 31, 47	0	2	1	∞	5	4	6	3
11, 19, 35, 43	0	2	1	4	3	∞	6	5

Итак, все эти четыре перестановки являются инволюциями (их квадраты – тождественные преобразования), подобными притом отражениям следующих фигур в горизонтальной оси симметрии:

Преобразования $P\Phi_1 = 1$ и $P\Phi_7$ проективные:

$$\lambda(P\Phi_1(x)) \equiv \lambda(x), \quad \lambda(P\Phi_7(x)) = \frac{-\lambda(x)}{2\lambda(x) + 1}.$$

Преобразования $P\Phi_5$ и $P\Phi_{11}$ проективными не являются (они не сохраняют описанную выше проективную структуру на $P^1(\mathbb{Z}_7)$, а переводят ее в другую). При этом оба они переводят ее в одну и ту же другую структуру, поскольку $\Phi_5\Phi_7 = \Phi_{35}$ и $P\Phi_{35} = P\Phi_{11}$, так что $P\Phi_{11} = (P\Phi_5)(P\Phi_7)$, а $P\Phi_7$ сохраняет стандартную структуру. Эта стандартная структура переходит под действием перестановок $P\Phi_5$ и $P\Phi_{11}$ в одну и ту же нестандартную проективную структуру на $P^1(\mathbb{Z}_7)$.

Это же рассуждение показывает, что преобразование $P\Phi_7$ сохраняет и нестандартную проективную структуру, описанную выше.

Из всего этого следует, что группа преобразований Фробениуса $\{\Phi_k\}$ является изоморфным образом группы Эйлера Γ при гомоморфизме φ , отображающем вычет k в преобразование Φ_k . Гомоморфизм проективизации $\psi: \{\Phi_k\} \rightarrow \{P\Phi_k\}$ отображает этот образ на группу $\mathbb{Z}_2^2$ из четырех выписанных выше перестановок.

Ядро этого гомоморфизма состоит из четырех преобразований $\{\Phi_1, \Phi_{17}, \Phi_{25}, \Phi_{41}\}$, также образующих группу $\mathbb{Z}_2^2$. В отличие от своих проективизаций $P\Phi_k$, эти преобразования, кроме Φ_1 , не оставляют все элементы поля на местах, так как, например,

$$\Phi_{17}(A^k) = 4^k A^k, \quad \Phi_{25}(A^k) = 6^k A^k, \quad \Phi_{41}(A^k) = 3^k A^k.$$

Сохранение проективной структуры преобразованием Φ_7 объясняется тем, что это преобразование является автоморфизмом поля Галуа: для этого взаимно однозначно отображения f поля в себя при любых x и y

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Все автоморфизмы поля из p^a элементов образуют циклическую группу $\mathbb{Z}_a$ из a элементов, образующей является автоморфизм Фробениуса Φ_p .

Например, группа автоморфизмов поля $\mathbb{Z}_p$ вычетов по модулю p состоит из одного лишь тождественного преобразования. Группу автоморфизмов поля из 49 элементов легко вычислить так. Автоморфизм обязан быть преобразованием Фробениуса, поскольку он сохраняет операцию умножения. Но из операций Фробениуса Φ_k сложение сохраняют только Φ_1 и Φ_7 . Сравнение $(x + y)^7 \equiv x^7 + y^7$ следует из делимости на 7 остальных биномиальных коэффициентов C_7^u .

Группа автоморфизмов поля из 49 элементов состоит поэтому из двух элементов: это $\mathbb{Z}_2 = \{1, f\}$, где $f(x) \equiv x^7$. При этом $f^2(x) = f(f(x)) \equiv (x^7)^7 = x^{49} \equiv x$, так что $f^2 = 1$.

Действие преобразований Фробениуса и их проективных вариантов $P\Phi_k$ на проективные структуры многообразий $P^{a-1}(\mathbb{Z}_p)$ для полей из $p^a > 49$ элементов, даже в случае $a = 2$, заслуживает, по моему мнению, изучения, аналогичного проведенному выше для $p^a = 49$.

Можно даже надеяться на связь этих вопросов со сравнениями для биномиальных и мультиномиальных коэффициентов, обобщающими малую теорему Ферма и ее доказанный Эйлером вариант на матрицы с целыми элементами. Гипотетическое обобщение сравнения Эйлера–Ферма имеет вид

$$\text{tr } A^n \equiv \text{tr } A^{n-\varphi(n)} \pmod{(n = p^a)}. \quad (3)$$

Это сравнение доказано сейчас в [1] для $a = 1, 2$ и 3, а для $a = 4$ оно доказано при $p \leq 29$ (причем, повидимому, это доказательство указывает на то, что вопрос о справедливости сравнения (3) для всех целочисленных матриц A (любого конечного порядка) алгоритмически разрешим, по меньшей мере для каждого фиксированного простого числа p , при $a = 4$).

Однако, например, для $n = 6$ сравнение (3) неверно – это и подсказывает возможность его связи с полями Галуа.

Сравнения для биномиальных коэффициентов, упомянутые выше, начинаются с исследования удивительной функции $x(a, b)$, заданной уравнением

$$C_{pa}^{pb} - C_a^b = p^{x(a,b)} z, \quad \text{где } (z, p) = 1. \quad (4)$$

Например, для $a = 4, b = 2$ разность биномиальных коэффициентов делится на удивительно большую степень простого числа $p = 2$:

$$C_8^4 - C_4^2 = 70 - 6 = 2^6.$$

Функция $x(a, b)$, определенная соотношением (4), сама обладает удивительной двоякой p -периодичностью, нарушаемой после p повторений, но вся эта картина обладает двоякой p^2 -периодичностью, нарушаемой лишь в масштабе p^3 , и так далее. К сожалению, эта своеобразная p -модулярность остается чисто экспериментальным компьютерным наблюдением, не связанным пока ни с эллиптическими функциями, подсказываемыми двоякой периодичностью, ни с полями Галуа, на роль которых указывает появление p^a . Можно только надеяться, что привлечение полей Галуа может пролить свет на эти эмпирические сравнения, чем и объясняется появление настоящей статьи.

§ 5. Проективные структуры поля Галуа из p^2 элементов, где $p = 11$

Для $p = 11$ в качестве мультипликативной образующей можно взять матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Элементы поля представляются тогда 121 матрицей $\{0, A^k\}$, где $1 \leq$

$k \leq 120$, из вычетов по модулю 11 (причем $A^{120} = 1$); операции поля – сложение и умножение матриц. Запишем эти матрицы в виде

$$A^k = u_k \boxed{1} + v_k \boxed{A}$$

(где $\boxed{1} = A^{120}$, $\boxed{A} = A^1$). Числа (точнее, вычеты по модулю p) u_k и v_k определяют следующую таблицу логарифмов (заполнение “тора” $(\mathbb{Z}_p)^2$ числами k , изображающими матрицы A^k , и символом ∞ , изображающим нулевую матрицу) из псевдослучайных чисел (точнее, вычетов по модулю $n = p^2 - 1 = 120$):

$\boxed{10A}$	61	11	15	76	22	43	78	53	62	56	105
$\boxed{9A}$	25	42	95	17	99	26	40	20	106	69	7
$\boxed{8A}$	13	94	14	83	115	8	87	30	57	28	5
$\boxed{7A}$	109	4	6	104	59	70	101	33	63	91	110
$\boxed{6A}$	37	32	29	19	52	107	81	38	54	118	111
$\boxed{5A}$	97	51	58	114	98	21	47	112	79	89	92
$\boxed{4A}$	49	50	31	3	93	41	10	119	44	66	64
$\boxed{3A}$	73	65	88	117	90	27	68	55	23	74	34
$\boxed{2A}$	85	67	9	46	80	100	86	39	77	35	102
$\boxed{1A}$	1	45	116	2	113	18	103	82	16	75	71
$\boxed{0A}$	∞	120	84	72	48	96	36	108	12	24	60
v/u	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$

Вычисление этой таблицы поля сокращается вдвое ее очевидной симметрией (относительно отмеченного кружочком центра):

$$(u_{k+(n/2)}, v_{k+(n/2)}) + (u_k, v_k) = (p-1, p-1).$$

Это соотношение вытекает из того, что $A^{n/2} = -1$.

Из приведенной выше таблицы поля следует описание прямых $\{v = \lambda u\}$, нумеруемых аффинной координатой λ в $P^1(\mathbb{Z}_{(p=11)})$: такая прямая образована парами (u_k, v_k) , где k указано в следующей таблице

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$k \pmod{12}$	0	9	7	5	2	3	8	4	10	6	11	1

Это описание прямых объясняется тем, что матрица $A^{p+1} (= A^{12})$ скалярная, поэтому $(cA)^{k+(p+1)} = cA^k$. Число скалярных матриц A^m равно $p-1$, поэтому для скалярной матрицы показатель m делится на число $(p^2-1)/(p-1) = p+1$ ¹.

¹Для поля из p^a элементов прямые характеризуются остатками от деления показателей k на число $(p^a-1)/(p-1) = p^{a-1} + \dots + p + 1$ точек проективного пространства $P^{a-1}(\mathbb{Z}_p)$.

Из приведенных формул видно, что прямая $\{v = \lambda u\}$ переводится преобразованием Фробениуса Φ_m (заданным условием $\Phi_m(x) = x^m$ для всякого элемента x нашего поля) в прямую $\{v = \lambda_m u\}$, где λ_m получается из λ некоторой перестановкой $P\Phi_m: P^1(\mathbb{Z}_p) \rightarrow P^1(\mathbb{Z}_p)$ $p+1$ точки конечной проективной прямой. А именно, алгоритм вычисления $\lambda_m(\lambda)$ таков:

$$\lambda \mapsto k \pmod{p+1} \mapsto mk \pmod{p+1} \mapsto \lambda_m$$

(где соответствие между λ и k указано выше).

Вычисление по этому алгоритму перестановок $P\Phi_m$ приводит к приведенному в следующей таблице ответу для тридцати двух ($= \varphi(120 = p^2 - 1)$) взаимно простых с $p^3 - 1$ значений,

$$m = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, \dots, 119$$

(вместе с m в списке есть и $120 - m$).

Мультипликативная группа взаимно простых с числом 120 вычетов есть

$$\Gamma = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3 \quad (\text{образующие: } m = 7 \text{ в } \mathbb{Z}_4, m = 11, 19, 61 \text{ в } \mathbb{Z}_2^3).$$

Она отображается на группу преобразований Фробениуса $\{\Phi_m\}$ изоморфно.

Отображение проективизации, $\psi: \{\Phi_m\} \rightarrow \{P\Phi_m\}$, имеет ядро из восьми элементов,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \psi &= \{\Phi_m : m = 1, 13, 37, 49, 61, 73, 97, 109\} \approx \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \\ \mathbb{Z}_4: \{1, 13, 13^2 \sim 49, 13^3 \sim 37, (13^4 \sim 1)\}, \\ \mathbb{Z}_2: \{1, 61\}; \quad 61 \cdot 13 \sim 71, \quad 61 \cdot 49 \sim 109, \quad 61 \cdot 37 \sim 97. \end{aligned}$$

Образ $\{P\Phi_m\} = \text{Im } \psi$ отображения проективизации ψ состоит из четырех перестановок (первая из них тождественна): $\text{Im } \psi = \{P\Phi_1, P\Phi_7, P\Phi_{11}, P\Phi_{17}\} \approx \mathbb{Z}_2^2$:

$\lambda_1(x) = \lambda(P\Phi_1(x))$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$\lambda_7(x) = \lambda(P\Phi_7(x))$	0	5	∞	10	4	1	6	7	8	9	3	2
$\lambda_{11}(x) = \lambda(P\Phi_{11}(x))$	0	5	3	2	8	1	7	6	4	9	∞	10
$\lambda_{17}(x) = \lambda(P\Phi_{17}(x))$	0	1	10	∞	8	5	7	6	4	9	2	3

Тождественное преобразование $P\Phi_1$ и преобразование $P\Phi_{11}$ (доставляемое автоморфизмом Φ_{11} поля из 11^2 элементов) сохраняют естественную проективную структуру $P_1 = P_{11}$ проективной прямой, определяемую аффинной координатой λ , а преобразования $P\Phi_7$ и $P\Phi_{17}$ переводят ее в другую проективную структуру, $P_7 = P_{17}$ (одну и ту же), для которой аффинной координатой является, например, функция λ_7 , заданная тождеством $\lambda_7(x) = \lambda(P\Phi_7(x))$, или проективно связанная с ней функция,

$$\lambda_{17} = -\lambda_7 / (\lambda_7 + 1).$$

Точно так же связаны и аффинные координаты $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_{11} = -\lambda/(\lambda + 1)$ проективной структуры $P_1 = P_{11}$.

Заметим, что “естественная” проективная структура P_1 на множестве $P^1(\mathbb{Z}_{11})$ определена выбором мультипликативной образующей A поля Галуа, и переход к другой образующей, A^m , осуществляется преобразованием Фробениуса Φ_m , так что все проективные структуры на множестве $P^1(\mathbb{Z}_p)$, соответствующие разным выборам мультипликативной образующей, получаются друг из друга проективизированными преобразованиями Фробениуса, $P\Phi_m$.

При $p = 11$ все 32 образующие A^m порождают лишь две структуры, P_1 и P_7 . Преобразование $P\Phi_{11}$ сохраняет обе проективные структуры, а преобразования $P\Phi_7$ и $P\Phi_{17}$ переставляют их.

§ 6. Проективные структуры поля Галуа из p^2 элементов, где $p = 13$

Для $p = 13$ годится образующая матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Элементы поля представляются 169-ю матрицами $\{0, A^k\}$ из вычетов по модулю $p = 13$, где $1 \leq k \leq 169$ (операции – сложение и умножение матриц). Соответствующая выбору образующей A таблица поля (составленная из вычетов по модулю $p^2 - 1 = 168$) образована следующими псевдослучайными числами (вычетами):

$12A$	85	45	161	165	13	76	58	47	158	122	23	166	64
$11A$	15	145	143	88	91	52	95	121	111	96	6	162	156
$10A$	141	10	132	101	79	114	49	54	103	53	120	46	69
$9A$	113	51	75	41	73	26	18	104	21	92	150	86	25
$8A$	127	32	39	40	100	87	164	55	106	89	35	65	118
$7A$	71	152	108	33	62	151	31	50	9	144	44	167	147
$6A$	155	63	83	128	60	93	134	115	67	146	117	24	68
$5A$	43	34	149	119	5	22	139	80	3	16	124	123	116
$4A$	29	109	2	66	8	105	20	102	110	157	125	159	135
$3A$	57	153	130	36	137	19	138	133	30	163	17	48	94
$2A$	99	72	78	90	12	27	37	11	136	7	4	59	61
$1A$	1	148	82	107	38	74	131	142	160	97	81	77	129
$0A$	∞	168	98	56	28	42	154	70	126	112	140	14	84
v/u	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$

Из этой таблицы поля следует, что прямая $\{v = \lambda u\}$, соответствующая значению λ аффинной координаты в $P^1(\mathbb{Z}_{13})$, заполнена элементами A^k , для которых остаток от деления k на $p + 1$ связан с λ таблицей

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	∞
$k \pmod{14}$	0	8	2	13	11	6	7	12	4	9	10	5	3	1

Взаимно простые с числом $p^2 - 1 = 168$ вычеты образуют мультипликативную группу $\Gamma \approx \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2^3$ из 48 элементов,

$$m = 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 55, 59, 61, \\ 65, 67, 71, 73, 79, 83, 85, \dots, 167$$

(включающую вместе с вычетом m вычет $168 - m$). Группа преобразований Фробениуса, $\{\Phi_m\}$, изоморфна группе вычетов Γ .

Ядро гомоморфизма проективизации $\psi: \{\Phi_m\} \rightarrow \{P\Phi_m\}$ состоит из тех восьми преобразований Фробениуса Φ_m , для которых m сравнимо с 1 по модулю 14 (вследствие чего матрица A^m скалярна): $m = 1, 29, 43, 71, 85, 113, 127, 155$, $\text{Ker } \psi \approx \mathbb{Z}_2^3$. Эти восемь преобразований оставляют каждую точку проективной прямой $P^1(\mathbb{Z}_{13})$ на месте.

Фактор-группа $\{\Phi_m\}/(\text{Ker } \psi) \approx \mathbb{Z}_6 \approx \text{Im } \psi\{P\Phi_m\}$ представлена преобразованиями $P\Phi_m$, где $m = 1, 13, 5, 11, 17, 37$.

За образующую этой циклической группы можно выбрать преобразование $P\Phi_5$: остальные четыре перестановки четырнадцати точек прямой $P^1(\mathbb{Z}_{13})$ даются формулами

$$P\Phi_{11} = (P\Phi_5)^2, \quad P\Phi_{13} = (P\Phi_5)^3, \quad P\Phi_{37} = (P\Phi_5)^4, \quad P\Phi_{17} = (P\Phi_5)^5.$$

Все эти шесть перестановок четырнадцати точек проективной прямой определяются в аффинной координате λ на проективной прямой $P^1(\mathbb{Z}_{13})$ функциями $\lambda_m(x) = \lambda(P\Phi_m(x))$, заданными таблицей

$m = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	∞
$m = 5$	0	7	10	9	3	2	6	8	5	12	1	4	∞	11
$m = 11$	0	8	1	12	9	10	6	5	2	∞	7	3	11	4
$m = 13$	0	5	7	∞	12	1	6	2	10	11	8	9	4	3
$m = 17$	0	10	5	4	11	8	6	1	7	3	2	∞	9	12
$m = 37$	0	2	8	11	∞	7	6	10	1	4	5	12	3	9

Разумеется, $(P\Phi_5)^6 = 1$, $(P\Phi_{11})^3 = 1$, $(P\Phi_{13})^2 = 1$, $(P\Phi_{37})^3 = 1$, $(P\Phi_{17})^6 = 1$ (в группе $\mathbb{Z}_6$).

Преобразование $P\Phi_{13}$ (соответствующее автоморфизму Φ_{13} поля Галуа) сохраняет проективную структуру P_1 , заданную на множестве $P^1(\mathbb{Z}_{13})$ аффинной координатой $\lambda_1 = \lambda$:

$$\lambda_{13} = -\lambda/(4\lambda + 1), \quad \text{поэтому} \quad P_{13} = P_1.$$

Напротив, преобразования $P\Phi_5$, $P\Phi_{11}$, $P\Phi_{37}$, $P\Phi_{17}$ переводят структуру P_1 в две другие структуры, $P_5 = P_{37}$ и $P_{11} = P_{17}$. Эти структуры получились бы, если бы за мультипликативную образующую, вместо A , был бы выбран элемент A^5 или A^{37} в первом случае и A^{11} или A^{17} во втором. Преобразование $P\Phi_{13}$ сохраняет и эти структуры.

Таким образом, группа $\text{Im } \psi \approx \mathbb{Z}_6$ действует на тройку проективных структур (P_1, P_5, P_{11}) , циклически переставляя их: $(P\Phi_5)P_1 = P_5$, $(P\Phi_5)P_5 = P_{11}$, $(P\Phi_5)P_{11} = P_1$. Мы построили по полю из 169 элементов группу $\mathbb{Z}_3$ циклических перестановок трех проективных структур на множестве $P^1(\mathbb{Z}_{13})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Arnold. Fermat dynamics of matrices, finite circles and finite Lobachevsky planes // Cahiers du CEREMADE. № 0434. Paris: Université Paris-Dauphine, 3 juin 2004.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
18.08.2004