Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Бахтин, Е. И. Динабург, Я. Г. Синай, О решениях с бесконечной энергией и энтропией системы Навье–Стокса, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 55–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 09:26:15

УДК 517.957

Памяти А. А. Болибруха

О РЕШЕНИЯХ С БЕСКОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ
И ЭНСТРОФИЕЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА

Ю. Ю. БАХТИН, Е. И. ДИНАБУРГ, Я. Г. СИНАЙ

Для системы Навье–Стокса во всем пространстве рассматриваются локальные и глобальные теоремы существования и единственности решений задачи Коши с начальными данными, преобразование Фурье которых имеет степенную особенность в окрестности нуля и степенное убывание на бесконечности. Наряду с обзором известных фактов статья содержит некоторые новые результаты.

Библиография: 18 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	55
2. Убывание по t решений в пространстве $\Phi(2, 2)$	59
3. Явное построение решения системы Навье–Стокса в $\mathbb{R}^3$ с помощью случайных каскадов. Некоторые следствия	64
Список литературы	72

1. Введение

Система уравнений Навье–Стокса, описывающая движение несжимаемой жидкости или газа в d -мерном пространстве, имеет вид:

$$\frac{\mathcal{D}u}{dt} = \nu \Delta u - \nabla p + g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_d)$ есть d -мерный вектор скорости в точке $x \in \mathbb{R}^d$ и в момент времени $t > 0$, имеющий компоненты $u_j = u_j(x, t)$, $1 \leq j \leq d$;

$$\left(\frac{\mathcal{D}u}{dt} \right)_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_k} u_k$$

Авторы благодарны РФФИ (грант № 02-01-00158) за финансовую поддержку этого исследования. Я. Г. Синай благодарен также NSF (грант DMS-9706794), а Ю. Ю. Бахтин благодарен Фонду содействия отечественной науке и гранту МК-2475.2004.1 Президента Российской Федерации.

есть основная нелинейность в системе; $\nu > 0$ – коэффициент вязкости, который мы принимаем равным 1; скалярная функция p – давление; $g(x, t)$ – d -мерный вектор внешней силы. Система (1) является одной из простейших систем гидродинамического типа, но даже для нее основные проблемы существования и единственности решений являются открытыми при $d \geq 3$. Преобразование Фурье

$$\begin{aligned} v(k, t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle k, x \rangle} u(x, t) dx, & u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} v(k, t) e^{i\langle x, k \rangle} dk, \\ f(k, t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle k, x \rangle} g(x, t) dx, & g(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(k, t) e^{i\langle x, k \rangle} dk \end{aligned}$$

переводит систему (1) в следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v(k, t)}{\partial t} = -|k|^2 v(k, t) - i \int_{\mathbb{R}^d} \langle k, v(k - k', t) \rangle P_k v(k', t) dk' + f(k, t). \quad (2)$$

При этом $v(k, t)$ есть d -мерный вектор, $v(k, t) \perp k$ и P_k – оператор ортогонального проектирования на подпространство, ортогональное k . Давление p при такой записи пропадает.

В этом и следующем разделах мы рассматриваем систему Навье–Стокса в отсутствие внешней силы, т.е. при $g(x, t) = 0$. Интегрируя обе части уравнения (2) по времени, получим систему нелинейных интегральных уравнений, при широких условиях эквивалентную исходной системе Навье–Стокса (1):

$$v(k, t) = e^{-|k|^2 t} v_0(k) - i \int_0^t e^{-|k|^2(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \langle k, v(k - k', \tau) \rangle P_k v(k', \tau) dk'. \quad (3)$$

Здесь $v_0(k)$ – начальное условие при $t = 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать основной случай $d = 3$, хотя некоторые из наших рассуждений могут быть перенесены на случай $d > 3$ и даже $d = 2$.

Во многих задачах гидродинамики, в том числе в теории турбулентности, возникает необходимость рассматривать решения, имеющие степенные особенности около $k = 0$ и $k = \infty$. В связи с этим в работе [18] были введены функциональные пространства $\Phi(\alpha, \omega)$ функций, имеющих такие особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $v(k)$, $k \in \mathbb{R}^3$, со значениями в $\mathbb{C}^3$ принадлежит пространству $\Phi(\alpha, \omega)$, если

1) при $0 < |k| \leq 1$ она допускает представление

$$v(k) = \frac{c(k)}{|k|^\alpha}, \quad \text{где } c(k) \text{ непрерывна при } k \neq 0 \text{ и } \sup_{0 < |k| \leq 1} |c(k)| = c < \infty;$$

2) при $|k| \geq 1$ функция $v(k)$ допускает представление

$$v(k) = \frac{d(k)}{|k|^\omega} \quad \text{и } d(k) \text{ непрерывна, } \sup_{|k| \geq 1} |d(k)| = d < \infty.$$

Разумеется, в этом определении вместо единицы можно было бы взять любое другое положительное число.

Мы полагаем $\|v\| = c + d$. Ясно, что $\Phi(\alpha', \omega') \subseteq \Phi(\alpha, \omega)$, если $\alpha' \leq \alpha$, $\omega' \geq \omega$. Для нас важен только случай $\alpha < 3$, $\omega \geq 2$, так как только при таких α, ω правая часть (3) имеет смысл. Условие ортогональности $v(k) \perp k$ переходит в условие ортогональности $c(k) \perp k$, $d(k) \perp k$. Можно было бы потребовать существования пределов $c(k)$, когда $k \rightarrow 0$ по любому направлению, но это свойство нам не потребуется.

Для $v \in \Phi(\alpha, \omega)$ введем значения энергии и энтропии:

$$E(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle v, v \rangle dk, \quad \Omega(v) = \int_{\mathbb{R}^3} |k|^2 \langle v, v \rangle dk.$$

При $\omega > 2$, $\alpha < 1.5$ энергия конечна, а при $\alpha > 1.5$ она может быть и бесконечной, энтропия конечна при $\alpha < 2.5$, $\omega > 2.5$ и может быть бесконечной при нарушении одного из этих неравенств. Если энергия бесконечна, то она сосредоточена в основном в окрестности $k = 0$.

В работе [18] были доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha < 3$, $\omega > 2$. Тогда для любого $v \in \Phi(\alpha, \omega)$ существует $t_0 = t_0(v) > 0$ такое, что система уравнений (3) имеет единственное решение на отрезке $[0, t_0]$ с начальным данным v , принадлежащее при каждом $t \in [0, t_0]$ пространству $\Phi(\alpha, \omega)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны $\alpha < 3$, $\omega > 2$ и $t_0 > 0$. Тогда найдется такое $h = h(\alpha, \omega, t_0)$, что для всякого $v \in \Phi(\alpha, \omega)$, $\|v\| \leq h$, на отрезке времени $[0, t_0]$ существует единственное решение (3) с начальным данным v , принадлежащее при всех $t \in [0, t_0]$ пространству $\Phi(\alpha, \omega)$.

В обычной ситуации малость начального условия порождает существование глобального решения при всех $t > 0$ (см. [13]). В данном случае нет оснований считать, что соответствующее утверждение остается верным. Исключение составляет случай $\alpha = \omega = 2$, когда v можно записать в виде: $v(k) = \frac{c(k)}{|k|^2}$, где $c(k) \perp k$ при всех k и $\sup_{k \in \mathbb{R}^3} |c(k)| = c < \infty$. В работах И. Ле Жана и А. С. Шнитмана [12], а также М. Каноне [4] и М. Каноне и Ф. Планшона [5] была доказана следующая теорема (см. также [18]).

ТЕОРЕМА 3. Если c достаточно мало, то система уравнений (3) имеет единственное глобальное решение, определенное при всех $t > 0$ и принадлежащее пространству $\Phi(2, 2)$.

Ч. Фефферман объяснил одному из нас (Я.Г.С.), как с помощью масштабных соображений можно вывести утверждение теоремы 3 из локальной теоремы существования. По-видимому, возможны такие начальные данные $v \in \Phi(2, 2)$ с большим значением c , при которых даже локальная теорема существования не имеет места. Построение таких начальных данных, вероятно, далеко не просто.

Ясно, что $E(v)$, $\Omega(v)$ для $v \in \Phi(2, 2)$ могут быть бесконечными. Пусть $c = c(v)$ настолько мало, что применима теорема 3. Соответствующее решение запишем в виде $v(k, t) = \frac{c(k, t)}{|k|^2}$. Возникает естественный вопрос о поведении $c(k, t)$ при $t \rightarrow \infty$. В разделе 2 мы приводим теорему, которая утверждает, что $c(k, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

для любого фиксированного k . Более того, $c(k, t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ не медленнее некоторой экспоненты $\exp\{-(|k|^2 t)^{\frac{1}{2}-\delta}\}$, $\delta > 0$ мало.

В разделе 3 приводится краткий обзор результатов работы [12] и некоторые ее следствия. В частности, показывается, как с помощью методов этой работы также можно получить аналогичные результаты об убывании $c(k, t)$, хотя и без явных оценок.

В работе [18] предложен возможный сценарий появления особенностей за конечное время у решений из пространства $\Phi(\alpha, \omega)$ при α , близких к 3. А именно, рассмотрим последовательность приращений $\Delta^{(n)}$ на оси времени t таких, что $\sum_n \Delta^{(n)} < \infty$. В действительности, как будет видно позже, $\Delta^{(n)}$ убывают экспоненциально по n . Тогда в формуле (3) естественно пренебречь зависимостью от τ и рассмотреть последовательность преобразований

$$v^{(n+1)}(k) = e^{-|k|^2 \Delta^{(n)}} v^{(n)}(k) + i \frac{1 - e^{-|k|^2 \Delta^{(n)}}}{|k|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle k, v^{(n)}(k-k') \rangle P_k v^{(n)}(k') dk'. \quad (4)$$

На малых интервалах времени последовательность (4) служит хорошим приближением для системы Навье–Стокса. Поскольку мы рассматриваем (4) в пространствах $\Phi(\alpha, \alpha)$, то при всех n мы можем пользоваться представлением $v^{(n)}(k) = \frac{c^{(n)}(k)}{|k|^\alpha}$, $k \in \mathbb{R}^3$, и

$$\begin{aligned} c^{(n+1)}(k) &= e^{-|k|^2 \Delta^{(n)}} c^{(n)}(k) + i |k|^{\alpha-2} (1 - e^{-|k|^2 \Delta^{(n)}}) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, c^{(n)}(k-k') \rangle P_k c^{(n)}(k') dk'}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

С функцией $c^{(n)}(k)$ связан естественный масштаб $\varkappa = k\sqrt{\Delta^{(n)}}$. Сделаем следующее предположение: $c^{(n)}(k) = V^{(n)} f^{(n)}(k\sqrt{\Delta^{(n)}})$, где множитель $V^{(n)}$ выбран так, что

$$\sup_{\varkappa} |f^{(n)}(\varkappa)| = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &V^{(n+1)} f^{(n+1)}(k\sqrt{\Delta^{(n+1)}}) \\ &= e^{-|k|^2 \Delta^{(n)}} V^{(n)} f^{(n)}(k\sqrt{\Delta^{(n)}}) + i (V^{(n)})^2 |k|^{\alpha-2} (1 - e^{-|k|^2 \Delta^{(n)}}) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, f^{(n)}((k-k')\sqrt{\Delta^{(n)}}) \rangle P_k f^{(n)}(k'\sqrt{\Delta^{(n)}}) dk'}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим $\beta^{(n+1)} = \frac{V^{(n+1)}}{V^{(n)}}$, $\varkappa = k\sqrt{\Delta^{(n)}}$ и перепишем (6) в виде

$$\begin{aligned} \beta^{(n+1)} f^{(n+1)}\left(\varkappa \sqrt{\frac{V^{(n+1)}}{V^{(n)}}}\right) &= e^{-\varkappa^2} f^{(n)}(\varkappa) + i V^{(n)} (\Delta^{(n)})^{\frac{\alpha-2}{2}} |\varkappa|^{\alpha-2} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \varkappa, f^{(n)}(\varkappa - \varkappa') \rangle P_{\varkappa} f^{(n)}(\varkappa') d\varkappa'}{|\varkappa - \varkappa'|^\alpha |\varkappa'|^\alpha}. \end{aligned}$$

Выберем $\Delta^{(n)}$ так, чтобы $V^{(n)}(\Delta^{(n)})^{\frac{\alpha-2}{2}}$ было при всех n постоянной, которую мы обозначим a . В проводимых в настоящее время численных расчетах $a = 1$.

Наше основное допущение состоит с том, что функции $f^{(n)}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к пределам. Поскольку при α , близких к 3, энергия может быть бесконечна, то соответствующий процесс описывает нелинейное распространение энергии от малых k в сторону больших k . Этот процесс становится все более интенсивным с ростом n и гасит действие вязкости. Поэтому энергия уходит на бесконечность за конечное время и решение стремится к бесконечности для каждого k и $n \rightarrow \infty$.

Введем нелинейное преобразование $\mathcal{R}$, $g = \mathcal{R}f$, в пространстве $\Phi(\alpha, \alpha)$, отвечающее $a = 1$:

$$\beta \cdot g(\varkappa h) = e^{-\varkappa^2} f(\varkappa) + i(1 - e^{-\varkappa^2}) |\varkappa|^{\alpha-2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \varkappa, f(\varkappa - \varkappa') \rangle P_{\varkappa} f(\varkappa') d\varkappa'}{|\varkappa - \varkappa'|^\alpha |\varkappa'|^\alpha},$$

где

$$\beta = \max_{\varkappa} \left| e^{-\varkappa^2} f(\varkappa) + i(1 - e^{-\varkappa^2}) |\varkappa|^{\alpha-2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \varkappa, f(\varkappa - \varkappa') \rangle P_{\varkappa} f(\varkappa') d\varkappa'}{|\varkappa - \varkappa'|^\alpha |\varkappa'|^\alpha} \right|$$

и значение h находится из соотношения

$$h = \beta^{-\frac{1}{\alpha-2}}.$$

Неподвижные или периодические точки отображения $\mathcal{R}$ со средним геометрическим вдоль периода, большим 1, и надлежащими свойствами гиперболичности могли бы дать доказательство появления особенности у системы Навье–Стокса, использующее результаты численных экспериментов. В настоящее время проводится численное исследование преобразования $\mathcal{R}$.

2. Убывание по t решений в пространстве $\Phi(2, 2)$

Пусть $v_0(k) = \frac{c(k)}{|k|^2} \in \Phi(2, 2)$, $c = \sup_{k \in \mathbb{R}^3} |c(k)|$ и достаточно мало, $c < c_0$. В этом разделе мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Решение $v(k, t)$, $t \geq 0$, $v(k, 0) = v_0(k)$, системы (3) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно вне любой окрестности начала координат. Более точно, для любого $\delta > 0$ существуют функции $B_1 = B_1(c)$, $B_2 = B_2(c)$ и $T = T(\delta, c)$ такие, что*

$$|c(k, t)| = |k|^2 |v(k, t)| \leq B_1 e^{-B_2(|k|^2 t)^{\frac{1}{2}-\delta}} \quad (7)$$

при $t > T(\delta, c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем следующие факты (см. [18]):

- 1) глобальное решение системы (3) существует, если $c \leq c_0$, где c_0 – абсолютная постоянная; при этом $v(k, t) = \frac{c(k, t)}{|k|^2} \in \Phi(2, 2)$ и $\|v(k, t)\| \leq c_1$, где c_1 – другая абсолютная постоянная;
- 2) глобальные решения (3) строятся при помощи метода последовательных приближений, при котором

$$v^{(n)}(k, t) = v^{(0)}(k, t) - i \int_0^t e^{-|k|^2(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \langle k, v^{(n-1)}(k - k', \tau) \rangle P_k v^{(n-1)}(k', \tau) dk'$$

и $v^{(0)}(k, t) = e^{-|k|^2 t} v_0(k)$; эти приближения сходятся к $v(k, t)$ по норме в пространстве $\Phi(2, 2)$ равномерно по k , и при $n \geq 1$

$$c^{(n)}(t) \leq c + A_1 (c^{(n-1)}(t))^2, \quad (8)$$

где A_1 — абсолютная постоянная, $c^{(n)}(t) = \|v^{(n)}(k, t)\| = \sup_k |k|^2 |v^{(n)}(k, t)|$.

ЛЕММА 1. Положим $c_2 = A_1 c$. Для $c^{(n)}(t)$ справедливо неравенство

$$c^{(n)}(t) \leq \sum_{l=1}^{2^{n-1}} a_l^{(n)} c c_2^{l-1}, \quad (9)$$

где $a_1^{(n)} = 1$, а при $l > 1$

$$a_l^{(n)} = \sum_{p=1, l-p \geq 1}^{2^{n-2}} a_p^{(n-1)} a_{l-p}^{(n-1)}. \quad (10)$$

Коэффициенты $a_l^{(n)}$ стабилизируются: $a_l^{(n+1)} = a_l^{(n)}$ при $n \geq l$.

Для решения $v(k, t)$ выполняется оценка

$$c(t) \leq \sum_{l=1}^{\infty} a_l c c_2^{l-1}, \quad (11)$$

где

$$a_l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_l^{(n)}, \quad a_1 = 1, \quad a_l = \sum_{p=1}^{l-1} a_p a_{l-p}, \quad l \geq 2.$$

Ряд в правой части (11) сходится при достаточно малом c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (8) вместо $c^{(1)}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ их оценки через c , получим искомое выражение. Чтобы убедиться в этом, проведем индукцию по номеру приближения m .

Для $m = 1$ соотношения (9) и (10) выполнены, так как $a_1^{(1)} = 1$ и $c_1^{(1)}(t) = c$. Предположим, что для $m = n - 1$

$$c^{(n-1)}(t) \leq \sum_{l=1}^{2^{n-2}} a_l^{(n-1)} c c_2^{l-1}.$$

Тогда при $m = n$ из (8) следует, что

$$\begin{aligned} c^{(n)}(t) &\leq c + A_1 \left(\sum_{l=1}^{2^{n-2}} a_l^{(n-1)} c c_2^{l-1} \right)^2 \\ &= c + \sum_{l=2}^{2^{n-1}} \left(\sum_{p \geq 1, l-p \geq 1} a_p^{(n-1)} a_{l-p}^{(n-1)} A_1 c^2 c_2^{l-2} \right) = \sum_{l=1}^{2^{n-1}} a_l^{(n)} c c_2^{l-1}, \end{aligned}$$

где

$$a_l^{(n)} = \sum_{p \geq 1, l-p \geq 1} a_p^{(n-1)} a_{l-p}^{(n-1)}, \quad l \geq 2, \quad a_1^{(n)} = 1.$$

Тем самым (9) и (10) доказаны для $m = n$.

Теперь докажем равенство $a_l^{(n+1)} = a_l^{(n)}$ при $l \leq n$. Для $l = 1$ оно выполняется. Если мы предположим, что $a_l^{(n)} = a_l^{(n-1)}$ для $l \leq n-1$, то при $l \leq n-1$ имеет место соотношение

$$a_l^{(n+1)} = \sum_{p=1}^{l-1} a_p^{(n)} a_{l-p}^{(n)} = \sum_{p=1}^{l-1} a_p^{(n-1)} a_{l-p}^{(n-1)} = a_l^{(n)}.$$

Для $a_n^{(n)}$ имеем:

$$a_n^{(n)} = \sum_{p=1}^{n-1} a_p^{(n-1)} a_{n-p}^{(n-1)}.$$

В последнюю сумму входят все возможные произведения $a_p^{(n-1)} a_{l-p}^{(n-1)}$, $1 \leq p \leq l-1$, и, следовательно, она не изменяется при переходе от n к $n+1$.

Таким образом, для каждого n существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_l^{(n)} = a_l$ и

$$a_l = \sum_{p=1}^{l-1} a_p a_{l-p}$$

при $l \geq 2$, $a_1 = 1$. Можно показать, что a_l растут медленнее некоторой экспоненты и, значит, ряд в (11) сходится при достаточно малых c . Лемма доказана.

Теперь мы оценим $c(k, t)$ в зависимости от t .

Нам понадобится следующее простое утверждение.

ЛЕММА 2. Для любых $a > 0$ и $b > 0$

$$|k'|^2 a + |k - k'|^2 b \geq |k|^2 \frac{ab}{a+b}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$|k'|^2 a + |k - k'|^2 b \geq |k'|^2 a + (|k| - |k'|)^2 b \geq \min\{|k'|^2 a + (|k| - |k'|)^2 b\} = |k|^2 \frac{ab}{a+b}.$$

Лемма доказана.

Положим $Q_1(k, t) = e^{-|k|^2 t} c$ и при $l > 1$

$$Q_l(k, t) = A_1 |k|^2 \sum_{p=1}^{l-1} \int_0^t e^{|k|^2(\tau-t)} d\tau \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|k| Q_p(k - k', \tau) Q_{l-p}(k', \tau)}{|k - k'|^2 |k'|^2} dk' \right].$$

ЛЕММА 3. При $l \geq 1$ справедливо любое из двух неравенств:

$$Q_l(k, t) \leq a_l c c_2^{l-1}, \quad (12)$$

$$Q_l(k, t) \leq l! e^{-\frac{|k|^2}{t} t} c c_2^{l-1}, \quad (13)$$

где a_l — коэффициенты ряда из (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по l . Для $l = 1$ неравенства (12) и (13) очевидны. Пусть они справедливы при всех $p < l$.

Тогда

$$\begin{aligned} Q_l(k, t) &\leq |k|^2 A_1 \int_0^t e^{|k|^2(\tau-t)} d\tau \left(\sum_{p=1}^{l-1} a_p a_{l-p} \right)^2 c^2 c_2^{l-2} \\ &= (1 - e^{-|k|^2 t}) c c_2^{l-1} \sum_{p=1}^{l-1} a_p a_{l-p} \leq a_l c c_2^{l-1}, \end{aligned}$$

и (12) доказано. Для доказательства (13) используем неравенство

$$Q_l(k, t) \leq |k|^2 \int_0^t e^{|k|^2(\tau-t)} d\tau A_1 \sum_{p=1}^{l-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p! (l-p)! e^{-\left(\frac{|k|^2}{l-p} + \frac{|k-k'|^2}{p}\right)\tau} c^2 c_2^{l-2} |k|}{|k-k'|^2 |k'|^2} dk'.$$

Из леммы 2 следует, что

$$\exp \left\{ - \left(\frac{|k|^2}{l-p} + \frac{|k-k'|^2}{p} \right) t \right\} \leq \exp \left\{ - |k|^2 t \frac{(l-p)^{-1} p^{-1}}{(l-p)^{-1} + p^{-1}} \right\} = \exp \left\{ - \frac{|k|^2}{l} t \right\}.$$

Кроме того, $p! (l-p)! \leq (l-1)!$ при $1 \leq p \leq l-1$. Поэтому

$$\begin{aligned} Q_l(k, l) &\leq e^{-\frac{|k|^2}{l} t} (l-1)! (l-1) A_1 c_0^2 c_2^{l-1} |k|^2 \int_0^t e^{\frac{|k|^2(l-1)}{l}(\tau-t)} d\tau \\ &= e^{-\frac{|k|^2}{l} t} (l-1)! (l-1) \frac{l}{l-1} c_0 c_2^{l-1} (1 - e^{-\frac{l-1}{l} |k|^2 t}) < l! e^{-\frac{|k|^2}{l} t} c c_2^{l-1}, \end{aligned}$$

и неравенство (13) доказано.

ЛЕММА 4. *Справедлива оценка*

$$|c(k, t)| \leq \sum_{l \geq 1} Q_l(k, t), \quad (14)$$

и ряд (14) сходится равномерно по t при достаточно малых c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения (14) воспользуемся очевидным неравенством для последовательных приближений $v^{(n)}(k, t) c^{(n)}(k, t) / |k|^2$:

$$|c^{(n)}(k, t)| < e^{-|k|^2 t} c + |k|^2 \int_0^t e^{|k|^2(\tau-t)} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|k| |c^{(n-1)}(k-k', \tau)| |c^{(n-1)}(k', \tau)|}{|k-k'|^2 |k'|^2} dk'.$$

Из него вытекает неравенство

$$|c^{(n)}(k, t)| \leq \sum_{l=1}^{2^{n-1}} a_l^{(n)} c c_2^{l-1},$$

где $a_l^{(n)}$ определены в (10), а из существования глобального решения и леммы 1 следует возможность перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$. Из предыдущей леммы следует равномерная по t сходимость ряда. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Для любого $m \geq 1$

$$|c(k, t)| \leq \sum_{l=1}^m l! e^{-\frac{|k|^2}{l}t} c c_2^{l-1} + \sum_{l>m} a_l c c_2^{l-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим первые m членов ряда (14) с помощью неравенства (13), а остаток ряда с помощью неравенства (12). Лемма доказана.

ЛЕММА 6. При достаточно малом c существуют такие постоянные $D = D(c)$ и $\mu = \mu(c) < 1$, что для любого m

$$R_m = \sum_{l>m} a_l c c_2^{l-1} < D(c) \mu^m. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что степенной по c_2 ряд (14) сходится при достаточно малых c_2 .

ЛЕММА 7. Положим

$$S_m(k, t) = \sum_{l=1}^m l! e^{-\frac{|k|^2}{l}t} c c_2^{l-1}.$$

Справедлива оценка:

$$S_m(k, t) < D_1 e^{-\frac{|k|^2}{m}t + m \ln m}, \quad (16)$$

где $D_1 = D_1(c) > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$S_m(k, t) < m! e^{-\frac{|k|^2}{m}t} \sum_{l=1}^m c c_2^{l-1} < D_1(c) e^{-\frac{|k|^2}{m}t + m \ln m}.$$

ЛЕММА 8. Пусть $|k| \geq k_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t_0 = t_0(k_0, \varepsilon)$, что при $t > t_0$

$$|c(k, t)| < \varepsilon$$

для всех $|k| \geq k_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем m так, чтобы

$$R_m < \frac{\varepsilon}{2},$$

и $t_0(k_0, \varepsilon)$ так, чтобы

$$S_m(k_0, t_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $S_m(k, t)$ будет меньше $\varepsilon/2$ при всех $|k| \geq k_0$ и $t > t_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Существуют такие постоянные $B_1 = B_1(c)$ и $B_2 = B_2(c)$, что для любого $\delta > 0$ найдется $T_0 = T_0(c, \delta)$ такое, что при $t \geq T_0$*

$$|c(k, t)| < B_1 e^{-B_2(|k|^2 t)^{\frac{1}{2}-\delta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы видели в доказательстве леммы 7, при фиксированном $|k|$ выполнено неравенство $|c(k, t)| \leq 2D_1 \mu^m$, если $e^{-\frac{|k|^2}{m}t + m \ln m} \leq D_1 \mu^m$ и, значит,

$$-\frac{|k|^2}{m}t + m \ln m < m \ln \mu + \ln D_1.$$

Поэтому при

$$|k|^2 t > D_2 m^{2+\delta_1},$$

т.е. при

$$\left(\frac{|k|^2}{D_2}t\right)^{\frac{1}{2+\delta_1}} > m,$$

где D_2 – некоторая постоянная, зависящая от c , справедливы неравенства

$$|c(k, t)| < 2D_1 \mu^m < 2D_1 \exp\left\{-\frac{|\ln \mu| |k|^2 t^{\frac{1}{2+\delta_1}}}{D_3}\right\},$$

где $D_3 = (D_2)^{\frac{1}{2+\delta_1}}$.

Полагая $2D_1 = B_1$, $\frac{|\ln \mu|}{D_3} = B_2$, получим искомое неравенство. Заметим, что δ_1 может быть выбрано сколь угодно малым, если $|k|^2 t$ достаточно велико. Эта лемма завершает доказательство теоремы 4.

3. Явное построение решения системы Навье–Стокса в $\mathbb{R}^3$ с помощью случайных каскадов. Некоторые следствия

В этом разделе мы опишем вероятностное представление решений системы Навье–Стокса в $\mathbb{R}^3$, принадлежащее И. Ле Жану и А. С. Шнитману (см. [12]), и укажем некоторые следствия, которые можно из него вывести. Так, например, с помощью этого красивого представления, основанного на понятии случайного каскада, в [12] доказана теорема существования и единственности для решения задачи Коши при внешней силе и начальных данных, удовлетворяющих определенным условиям малости и гладкости. Там же, а также в [2] эта конструкция используется для доказательства некоторых свойств регулярности решения, а в [1] она играет ключевую роль в доказательстве существования и единственности решений, стационарных по времени в вероятностном смысле, если внешняя сила сама представляет собой стационарный по времени случайный процесс.

Мы будем рассматривать систему Навье–Стокса (1) в $\mathbb{R}^3$ с внешней силой и решения, убывающие на бесконечности, но все построения легко переносятся и на случай периодических краевых условий, т.е. на трехмерный тор $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

Применим формулу вариации постоянных к уравнению (2):

$$\begin{aligned} v(k, t) = & e^{-\nu|k|^2(t-t_0)} v(k, t_0) \\ & - i \int_0^{t-t_0} e^{-|k|^2 s} P_k \int_{\mathbb{R}^3} \langle k, v(l, t-s) \rangle v(k-l, t-s) dl ds \\ & + \int_0^{t-t_0} e^{-|k|^2 s} f(k, t-s) ds, \quad k \neq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Мы будем искать решение v в виде

$$v(k, t) = \chi(k, t)h(k),$$

где функция $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что $h(k) > 0$, $h * h(k) = \int_{\mathbb{R}^3} h(l)h(k-l) dl < \infty$ при $k \neq 0$ и $h(0) = 0$. Это представление полностью аналогично представлению, введенному в определении 1. Функция h определяет характер поведения решения в нуле и на бесконечности. Дополнительные условия на нее, связанные с поведением свертки $h * h(k)$, будут даны позже. В частности, можно выбрать

$$h(k) = C_{\alpha, \beta} \frac{e^{-\alpha|k|^\beta}}{|k|^{2-\beta}}, \quad (18)$$

где $\alpha > 0$, $0 \leq \beta \leq 1$ и $C_{\alpha, \beta}$ достаточно мало. При $\beta = 0$ получаем квадратичное убывание h на бесконечности, а при $\beta = 1$ – экспоненциальное.

Перепишем уравнение еще раз в терминах преобразованного решения χ :

$$\begin{aligned} \chi(k, t) = & e^{-(t-t_0)|k|^2} \chi(k, t_0) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} |k|^2 e^{-|k|^2 s} m(k) P_k \int_{\mathbb{R}^3} \langle e_k, \chi(l, t-s) \rangle \chi(k-l, t-s) H(k, l) dl ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} |k|^2 e^{-|k|^2 s} \varphi(k, t-s) ds, \quad k \neq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$m(k) = -\frac{2i h * h(k)}{|k|h(k)}, \quad e_k = \frac{k}{|k|}, \quad H(k, l) = \frac{h(l)h(k-l)}{h * h(k)}, \quad \varphi(k, t) = \frac{2f(k, t)}{|k|^2 h(k)}.$$

Эти обозначения введены в уравнение (19), чтобы прояснить основную конструкцию. Используя эту конструкцию, мы получим результаты о существовании и единственности решения задачи Коши в терминах преобразованного решения χ . Затем в теореме 9 эти результаты будут даны в терминах исходной функции v .

Пусть $\chi(\cdot, \cdot)$ – решение задачи Коши на временном промежутке $[t_0, t_1]$. Для любых $k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ и $t \in (t_0, t_1]$ определим случайную величину $X_{k, t}$ на некотором вероятностном пространстве следующим образом. Пусть S , κ и k_1 – независимые в совокупности случайные величины, принимающие значения в $\mathbb{R}_+$, $\{0, 1\}$ и $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ соответственно, при этом S распределена экспоненциально с параметром $|k|^2$ (напомним, что $P\{S > t\} = e^{-|k|^2 t}$ при $t \geq 0$, а плотность распределения случайной величины S в

точке $t \geq 0$ равна $|k|^2 e^{-|k|^2 t}$, κ принимает значения 0 и 1 с равными вероятностями, а плотность случайной величины в точке $l \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ равна $H(k, l)$. Пусть также $k_2 = k - k_1$. Тогда

$$X_{k,t} = \begin{cases} \chi(k, t_0), & t - S \leq t_0, \\ \varphi(k, t - S), & t - S > t_0, \kappa = 0, \\ P_k \langle e_k, \chi(k_1, t - S) \rangle \chi(k_2, t - S), & t - S > t_0, \kappa = 1. \end{cases} \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 5. Если $\chi(\cdot, \cdot)$ – решение задачи Коши на временном промежутке $[t_0, t_1]$, то для любых $k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ и $t \in (t_0, t_1]$

$$EX_{k,t} = \chi(k, t). \quad (21)$$

Теорема моментально следует из уравнения (19) и определения величины $X_{k,t}$.

Заметим теперь, что при фиксированных значениях S, k_1, k_2 в определении (20) в последней строке случайные векторы $\chi(k_1, t - S), \chi(k_2, t - S)$ можно в свою очередь представить в виде математических ожиданий случайных векторов $X_{k_1, t-S}$ и $X_{k_2, t-S}$ соответственно.

Более того, если эту процедуру итерировать, мы придем к понятию случайного ветвящегося блуждания или случайного каскада, играющему главную роль в построении решения задачи Коши. Сначала мы опишем нужный нам случайный каскад неформально.

В момент времени t одна частица помещается в точку k . Частица живет “обратно во времени” случайное время S , экспоненциально распределенное с параметром $|k|^2$, до момента $t - S$ оставаясь в точке k . Если она доживает до момента задания начальных данных t_0 , то эволюция частицы на этом и заканчивается. Если она не доживает до t_0 , то с вероятностью $1/2$ она не оставляет потомков, а с вероятностью $1/2$ она оставляет двух потомков в точках k_1 и k_2 , которые выбираются случайно согласно распределению, определяемому плотностью $H(k, k_1)$. В последнем случае для каждой из новых частиц разыгрывается тот же самый сценарий независимым образом. С вероятностью единица общее случайное число частиц, вовлеченных в это построение, будет конечным, и по случайной реализации генеалогического дерева этих частиц, вложенного в $\mathbb{R}^3$, мы, отправляясь от формулы (20), определим функционал, математическое ожидание которого даст нам решение задачи Коши. Искомый функционал будет определен сначала для частиц, не оставивших потомков (это соответствует первой и второй строкам определения (20)), а затем для частиц, оставивших потомство, с помощью модификации третьей строки определения (20) и уже построенных значений этого функционала на дочерних частицах. Применяя последовательно это правило и идя от листьев генеалогического дерева к его корню, мы и получим нужное значение функционала в корне дерева.

Далее мы излагаем строгое построение требуемого случайного каскада и формулируем точный результат о соответствующем представлении решения задачи Коши, а также о существовании и единственности решения.

Введем сначала некоторые обозначения и соглашения. Пусть

$$V = \bigcup_{j=0}^{\infty} \{1, 2\}^j = \{\emptyset, (1), (2), (1, 1), \dots\}$$

– полное двоичное дерево, каждая вершина которого закодирована словом из алфавита $\{1, 2\}$. Пустое слово θ является корнем этого дерева.

Для $v = (v_1, \dots, v_m) \in V$ и $1 \leq n \leq m$ обозначим $v|n = (v_1, \dots, v_n)$ и $v|0 = \theta$. Если $v \in V$ и $b \in \{1, 2\}$, то конкатенация (v, b) обозначает дочернюю вершину для v .

Для конечного поддерева W дерева V с тем же корнем определим ∂W как множество всех вершин W , у которых нет дочерних вершин, принадлежащих W .

Для $k \in Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ нам понадобится случайный процесс $(k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}$, индексированный вершинами двоичного дерева V и удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $P\{k_v \in Q, \kappa_v \in \{0, 1\}, S_v \in \mathbb{R}_+\} = 1$ для всех $v \in V$;
- 2) случайные величины k_θ, κ_θ и S_θ независимы; $P\{k_\theta = k\} = 1$; $P\{\kappa_\theta = i\} = \frac{1}{2}$ при $i = 0, 1$, а $P\{S_\theta > s\} = e^{-|k|^2 s}$ при $s \geq 0$;
- 3) если W – поддерево V с корнем θ , а $v \in \partial W$, то для любых борелевских множеств $A_1, A_2 \subset Q$

$$\begin{aligned} & P\{k_{(v,1)} \in A_1, \kappa_{(v,1)} = i_1, S_{(v,1)} \geq s_1, k_{(v,2)} \in A_2, \kappa_{(v,2)} = i_2, S_{(v,2)} \geq s_2 \mid \mathcal{F}_W\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{l \in A_1, k-l \in A_2} H(k_v, l) e^{-|l|^2 s_1} e^{-|k-l|^2 s_2} dl, \quad i_1, i_2 \in \{0, 1\}, \quad s_1, s_2 \geq 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_W = \sigma\{(k_w, \kappa_w, S_w)_{w \in W}\}$.

Последнее свойство означает, что эволюция произвольной частицы и ее потомков не зависит от эволюции остальных частиц. Описанную конструкцию мы и будем называть случайным каскадом, выпущенным из точки k .

Нам понадобятся два простых утверждения, каждое из которых является формой марковского свойства случайного каскада и аналогично соответствующему свойству пуассоновского процесса.

Пусть $K = (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}$ – случайный каскад, выпущенный из точки k , а $u \in V$. Определим новый каскад $K(u) = (\tilde{k}_v, \tilde{\kappa}_v, \tilde{S}_v)_{v \in V}$ как сдвиг исходного:

$$(\tilde{k}_v, \tilde{\kappa}_v, \tilde{S}_v) = (k_{(u,v)}, \kappa_{(u,v)}, S_{(u,v)}), \quad v \in V,$$

где (u, v) обозначает конкатенацию.

Пусть также $\mathcal{F}_W^* = \sigma\{(k_w, \kappa_w, S_w)_{w \in W \setminus \partial W}, (k_w)_{w \in \partial W}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (первое марковское свойство). *Если W – поддерево V с корнем в θ , то случайные каскады $\{K(u), u \in \partial W\}$ условно независимы при условии $\mathcal{F}_W^*$. Условное распределение каскада $K(u)$ почти наверное совпадает с распределением случайного каскада, выпущенного из k_u .*

Пусть $K = (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}$ – случайный каскад, выпущенный из точки k . Возьмем произвольные $t > 0$ и точку $l \in Q$. Предположим, что существует такое $u \in V$, что $k_u = l$ и $A_u \leq t < B_u$, где $A_u = \sum_{i=0}^{|u|-1} S_{u|i}$, а $B_u = \sum_{i=0}^{|u|} S_{u|i}$ для $u \in V$ (это означает, что в момент t в точке l находится некоторая частица, участвующая в построении каскада). Тогда можно определить новый каскад $K(u, t) = (\tilde{k}_v, \tilde{\kappa}_v, \tilde{S}_v)_{v \in V}$ как сдвиг исходного:

$$(\tilde{k}_v, \tilde{\kappa}_v, \tilde{S}_v) = \begin{cases} (k_{(u,v)}, \kappa_{(u,v)}, S_{(u,v)}), & v \neq \theta, \\ (l, \kappa_u, B_u - t), & v = \theta. \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (второе марковское свойство). *Условное распределение случайного каскада $K(u, t)$ при условии $\{A_u \leq t < B_u, k_u = l\}$ для $u \in V$ почти наверное совпадает с распределением случайного каскада, выпущенного из l .*

Теперь мы введем неслучайный функционал

$$X(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \chi_0(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot), t_0)$$

реализации случайного каскада $(k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}$, выпущенного из $k_\theta = k$, начальных данных χ_0 и внешней силы φ . Для $v \in V$ определим

$$X_v = \begin{cases} \chi_0(k_v), & T_v \leq t_0, \\ \varphi(k_v, T_v), & T_v > t_0, \kappa_v = 0, \\ m(k_v)P_{k_v} \langle e_{k_v}, X_{(v,1)} \rangle X_{(v,2)}, & T_v > t_0, \kappa_v = 1, \end{cases} \quad (22)$$

где $T_v = t - B_v$ для $v \in V$, и положим

$$X(k, t) = X(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \chi_0(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot), t_0) = X_\theta.$$

Пусть $\tau(k, t, t_0)$ – максимальное поддерево V с корнем θ такое, что $\kappa_v = 1$ и $t - A_v \geq t_0$ для всех $v \in \tau(k, t, t_0)$. Так как $\tau(k, t, t_0)$ может рассматриваться как усеченная реализация критического ветвящегося процесса (действительно, среднее число потомков одной частицы равно $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$), то это дерево конечно с вероятностью 1. Чтобы получить значение X_θ , надо сначала вычислить X_v для всех вершин $v \in \partial\tau(k, t, t_0)$, пользуясь первыми двумя строками определения (22). Затем к произвольной вершине v , для дочерних вершин которой значения $X_{(v,1)}$ и $X_{(v,2)}$ уже известны, надо применить последнюю строку определения (22). Последовательно продвигаясь таким образом к корню θ , в конце концов мы вычислим X_θ .

ТЕОРЕМА 6. Пусть при всех $k \in Q$ и $t \in [t_0, t_1]$ выполнено условие

$$\mathbf{E}|X(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \chi_0(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot), t_0)| < \infty. \quad (23)$$

Тогда функция χ , определенная равенством

$$\chi(k, t) = \mathbf{E}X(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \chi_0(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot), t_0),$$

является решением системы (19).

Для доказательства теоремы напомним

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_\theta &= \mathbf{E}X_\theta \mathbf{1}\{S_\theta > t - t_0\} + \mathbf{E}X_\theta \mathbf{1}\{S_\theta \leq t - t_0, \kappa_\theta = 1\} \\ &\quad + \mathbf{E}X_\theta \mathbf{1}\{S_\theta \leq t - t_0, \kappa_\theta = 0\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Первое и третье слагаемые в этом разложении, очевидно, равны соответствующим слагаемым в (19). Чтобы проверить, что вторые слагаемые в этих выражениях также совпадают, воспользуемся первым марковским свойством:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[m(k_\theta)P_{k_\theta} \langle e_{k_\theta}, X_{(1)} \rangle X_{(2)} \mathbf{1}\{S_\theta \leq t - t_0, \kappa_\theta = 1\}] \\ &= m(k)\mathbf{E}[\mathbf{1}\{S_\theta \leq t - t_0, \kappa_\theta = 1\}P_{k_\theta} \mathbf{E}[\langle e_{k_\theta}, X_{(1)} \rangle X_{(2)} \mid k_{(1)}, k_{(2)}, S_\theta, \kappa_\theta]] \\ &= m(k)\mathbf{E}[\mathbf{1}\{S_\theta \leq t - t_0, \kappa_\theta = 1\}P_{k_\theta} \langle e_{k_\theta}, \chi(k_{(1)}, t - S_\theta) \rangle \chi(k_{(2)}, t - S_\theta)], \end{aligned}$$

и требуемое равенство доказано.

Требование (23) использовалось при доказательстве существенным образом. А именно, оно обеспечило конечность условных математических ожиданий, использовавшихся в последней выкладке, с вероятностью 1. К сожалению, в настоящий момент известно лишь следующее легко проверяемое условие, обеспечивающее применимость теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. Пусть при всех $k \in Q$, $t \in [t_0, t_1]$

$$|m(k)| \leq 1, \quad |\chi(k, t_0)| \leq 1, \quad |\varphi(k, t)| \leq 1. \quad (25)$$

Тогда выполнено условие (23) теоремы 6, а соответствующее решение задачи Коши удовлетворяет условию $|\chi(k, t)| \leq 1$ при всех k, t .

Действительно, в этих условиях случайная величина

$$X(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \chi_0(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot), t_0)$$

ограничена по модулю единицей как произведение конечного числа множителей, не превосходящих единицы по модулю. Поэтому ее математическое ожидание также не превосходит единицы по модулю.

В свою очередь условие $|m(k)| \leq 1$ в (25) означает, что нормировочная функция h должна удовлетворять неравенству $h * h(k) \leq D|k|h(k)$ при $k \neq 0$. В рассматриваемом трехмерном случае подходит любая из функций семейства (18). Интересно, что в двумерном случае не известно ни одного решения неравенства $h * h(k) \leq D|k|h(k)$, удовлетворяющего дополнительно условию $h(k) = h(-k)$. Это дополнительное условие нужно, чтобы рассматривать начальные данные, для которых $\chi_0(-k) = \overline{\chi_0(k)}$, что соответствует действительным начальным данным в x -пространстве.

Теперь можно сформулировать теорему единственности.

ТЕОРЕМА 8. Пусть начальные условия и внешняя сила удовлетворяют условию (25). Тогда решение χ , построенное в теореме 6 с помощью случайных каскадов, – единственное, удовлетворяющее условию $|\chi(k, t)| \leq 1$ при всех k, t .

Для доказательства рассмотрим произвольное решение $\gamma(\cdot, \cdot)$ задачи Коши. Вместо дерева $\tau(k, t, t_0)$ рассмотрим его усечение: пусть $\tau_n(k, t, t_0)$ при $n \geq 1$ – максимальное поддерево V с корнем θ такое, что $\kappa_v = 1$, $t - A_v \geq t_0$ для всех $v \in \tau(k, t, t_0)$ и $|v| \leq n$. Здесь $|v|$ обозначает номер поколения вершины $v = (v_1, \dots, v_m)$, т.е. m . Вместо функционала X введем функционал $Y^{(n)}$, соответствующий усечению $\tau_n(k, t, t_0)$, следующим образом.

Для $v \in V$ определим

$$Y_v^{(n)} = \begin{cases} \gamma(k_v, \tilde{T}_v), & |v| \geq n, \tilde{T}_v > 0, \\ 0, & |v| \geq n, \tilde{T}_v \leq 0, \\ \chi_0(k_v), & |v| < n, T_v \leq t_0, \\ \varphi(k_v, T_v), & |v| < n, T_v > t_0, \kappa_v = 0, \\ m(k_v)P_{k_v} \langle e_{k_v}, Y_{(v,1)}^{(n)} \rangle Y_{(v,2)}^{(n)}, & |v| < n, T_v > t_0, \kappa_v = 1, \end{cases} \quad (26)$$

где $\tilde{T}_v = t - A_v$. Положим

$$Y^{(n)}(k, t) = Y^{(n)}(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \chi_0(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot), t_0, \gamma(\cdot, \cdot)) = Y_\theta^{(n)}.$$

По индукции легко доказать, что $EY^{(n)}(k, t) = \gamma(k, t)$.

Кроме того, $|Y^{(n)}| \leq 1$. Единственность теперь следует из соотношений

$$\begin{aligned} |\gamma(k, t) - \chi(k, t)| &\leq E|Y^{(n)}(k, t) - X^{(n)}(k, t)| \\ &\leq 2P\{\tau_n(k, t, t_0) \neq \tau(k, t, t_0)\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Сформулируем теперь теорему существования и единственности в терминах исходной функции v .

ТЕОРЕМА 9. Пусть $|m(k)| \leq 1$ при всех $k \in Q$. Пусть также $|v(k, t_0)| \leq h(k)$ и $f(k, t) \leq \frac{|k|^2 h(k)}{2}$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, $k \in Q$. Тогда на $[t_0, t_1]$ существует единственное решение v задачи (17), удовлетворяющее неравенству $|v(k, t)| \leq h(k)$ при всех $k \in Q$.

Следующая теорема является аналогом результата из раздела 2.

ТЕОРЕМА 10. Для задачи Коши с нулевой внешней силой при каждом $k \in Q$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(k, t) = 0.$$

Для доказательства заметим, что в рассматриваемом случае функционал, соответствующий реализации случайного каскада, равен нулю, если каскад “не доживает” до момента t_0 . Введем время жизни каскада $d(\tau(k)) = \sup\{B_v : v \in \tau(k)\}$ и оценим

$$|\chi(k, t)| \leq P\{d(\tau(k)) \geq t - t_0\} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

К сожалению, равномерную сходимость в этой теореме получить не удастся, так как распределение времени жизни $d(\tau(k))$ случайного каскада зависит существенным образом от положения k исходной частицы.

Далее мы рассмотрим случай, когда внешняя сила является стационарным по времени случайным процессом, определенным на всей временной оси. Теперь $\varphi(k, t) = \varphi(k, t, \omega)$, где ω – элемент вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Мы получим теорему существования и единственности стационарного процесса, являющегося решением (19).

Результаты о существовании и единственности стационарных решений для двумерной системы Навье–Стокса со случайной силой см. в [6], [9], [10], [7], [8], [15], [3], [14], [16]. В недавней работе [17] дан обзор этих результатов. Теорема существования стационарных решений для трехмерной системы Навье–Стокса в ограниченной области доказана в [11], но результат о единственности и подход, основанный на случайных каскадах, являются новыми [1].

ТЕОРЕМА 11. Пусть $|m(k)| \leq 1$ при всех $k \neq 0$, а внешняя сила является стационарным по времени случайным процессом, принимающим значения в пространстве функций, определенных на Q и ограниченных единицей: $|\varphi(k, t)| \leq 1$ для всех k и t . Тогда существует стационарный случайный процесс χ , определенный при $t \in \mathbb{R}$ и при любом $t_0 \in \mathbb{R}$ являющийся решением системы (19) на $[t_0, +\infty)$. Это стационарное решение удовлетворяет неравенству $|\chi(k, t)| \leq 1$ при всех k и t . Нет других решений (19), определенных при всех $t \in \mathbb{R}$ и обладающих этим свойством.

Выполнен следующий принцип “одна сила – одно решение”: значение единственного стационарного решения χ в момент времени t полностью определяется реализацией силы до t , т.е. существует функционал Ψ реализаций силы на $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ такой, что $\chi(\cdot, t) = \Psi(\pi_t \varphi)$. Здесь $\pi_t \varphi(k, s) = \varphi(k, t + s)$, $s \in \mathbb{R}_-$.

В частности, этот результат применим, если внешняя сила постоянна по времени. Из него следует в этом случае существование и единственность неподвижной точки для динамической системы, связанной с системой (19).

Чтобы доказать теорему 11, для каждой реализации случайной силы φ и произвольных значений $k \in Q$ и $t > t_0$ мы введем случайный каскад $(k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}$, выпущенный из точки k в момент времени t , и функционал Z , аналогичный (22):

$$Z_v = \begin{cases} \varphi(k_v, T_v), & \kappa_v = 0, \\ m(k_v)P_{k_v} \langle e_{k_v}, Z_{(v,1)} \rangle Z_{(v,2)}, & \kappa_v = 1. \end{cases} \quad (27)$$

Пусть

$$Z(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \varphi(\cdot, \cdot)) = Z_\theta.$$

Определим $\tau(k)$ как максимальное поддерево V с корнем θ такое, что $\kappa_v = 1$ для $v \in \tau(k)$. Дерево $\tau(k)$ конечно почти наверное, и значение Z_θ можно получить, отправляясь от его листьев и последовательно применяя вторую строку определения (27).

Точно так же, как и в случае задачи Коши, $|Z_\theta| < 1$ почти наверное, так как все множители в (27) ограничены единицей по модулю. Покажем, что

$$\chi(k, t) = \mathbb{E}_\varphi Z(k, t, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \varphi(\cdot, \cdot))$$

является решением системы (19) на промежутке $[t_0, \infty)$, где $\mathbb{E}_\varphi$ обозначает математическое ожидание, взятое по ансамблю случайных каскадов при фиксированной реализации силы φ . Напишем для этого следующее разложение:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varphi Z_\theta &= \mathbb{E}_\varphi Z_\theta \mathbf{1}\{S_\theta > t - t_0\} + \mathbb{E}_\varphi Z_\theta \mathbf{1}\{S_\theta \leq t - t_0, \kappa_\theta = 1\} \\ &\quad + \mathbb{E}_\varphi Z_\theta \mathbf{1}\{S_\theta \leq t - t_0, \kappa_\theta = 0\}. \end{aligned}$$

Из второго марковского свойства вытекает равенство

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varphi Z_\theta \mathbf{1}\{S_\theta > t - t_0\} &= e^{-\nu|k|^2(t-t_0)} \mathbb{E}_\varphi Z(k, t_0, (k_v, \kappa_v, S_v)_{v \in V}, \varphi(\cdot, \cdot)) \\ &= e^{-\nu|k|^2(t-t_0)} \chi(k, t_0), \end{aligned}$$

а два оставшихся слагаемых рассматриваются точно так же, как в разложении (24).

Заметим, что построенное таким образом решение χ в момент времени t есть функционал от реализации силы до момента t (ведь реализации случайного каскада (k_v, κ_v, S_v) не зависят от t и реализации силы φ). А так как сила φ – стационарный процесс, то и χ является стационарным процессом.

Предположим, что существует другое решение $\gamma(k, t)$ системы (19), ограниченное единицей и определенное для всех $t \in \mathbb{R}$. Возьмем $t_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим $\gamma(k, t)$, $t \geq t_0$, как решение задачи Коши для (19) с начальным условием $\gamma(k, t_0)$. Рассмотрим представление χ и γ с помощью случайных каскадов. Так как $Z_\theta = X_\theta$, если $d(\tau(k)) < t - t_0$, где $d(\tau(k)) = \sup\{B_v : v \in \tau(k)\}$, то

$$|\chi(k, t) - \gamma(k, t)| \leq 2P\{d(\tau(k)) \geq t - t_0\} \rightarrow 0 \quad \text{при } t_0 \rightarrow -\infty. \quad (28)$$

Значит, $\chi(k, t) = \gamma(k, t)$. Теорема доказана.

Можно написать оценку, аналогичную (28), из которой будет следовать, что для любых начальных данных $\gamma(\cdot, t_0)$, заданных в произвольный момент времени t_0 , при фиксированном k решение $\gamma(k, t)$ задачи Коши приближается к стационарному решению $\chi(k, t)$, когда $t \rightarrow \infty$. Но равномерную сходимость и здесь не удастся получить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yu. Bakhtin. Existence and uniqueness of stationary solutions for 3d Navier–Stokes system with small random forcing via stochastic cascades // J. Statist. Phys. (submitted).
- [2] R. N. Bhattacharya, L. Chen, S. Dobson, R. B. Guenther, C. Orum, M. Ossiander, E. Thomann, E. C. Waymire. Majorizing kernels and stochastic cascades with applications to incompressible Navier–Stokes equations // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355. № 12. P. 5003–5040.
- [3] J. Bricmont, A. Kupiainen, R. Lefevere. Ergodicity of the 2D Navier–Stokes equations with random forcing // Comm. Math. Phys. 2001. V. 224. № 1. P. 65–81.
- [4] M. Cannone. Harmonic Analysis Tools for Solving the Incompressible Navier–Stokes Equations. Amsterdam: Elsevier (to appear). (Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. V. 3.)
- [5] M. Cannone, F. Planchon. On the regularity of the bilinear term of solutions to the incompressible Navier–Stokes equations // Rev. Mat. Iberoamericana. 2000. V. 16. № 1. P. 1–16.
- [6] P.-L. Chow, R. Z. Khasminskii. Stationary solutions of nonlinear stochastic evolution equations // Stochastic Anal. Appl. 1997. V. 15. № 5. P. 671–699.
- [7] G. Da Prato, J. Zabczyk. Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 229.)
- [8] W. E, J. C. Mattingly, Ya. Sinai. Gibbsian dynamics and ergodicity for the stochastically forced Navier–Stokes equation // Comm. Math. Phys. 2001. V. 224. № 1. P. 83–106.
- [9] B. Ferrario. Ergodic results for stochastic Navier–Stokes equation // Stochastics Stochastics Rep. 1997. V. 60. № 3–4. P. 271–288.
- [10] F. Flandoli, B. Maslowski. Ergodicity of the 2-D Navier–Stokes equation under random perturbations // Comm. Math. Phys. 1995. V. 172. № 1. P. 119–141.
- [11] F. Flandoli, M. Romito. Statistically stationary solutions to the 3-D Navier–Stokes equation do not show singularities // Electron. J. Probab. 2001. V. 6. № 5. P. 1–15.
- [12] Y. Le Jan, A. S. Sznitman. Stochastic cascades and 3-dimensional Navier–Stokes equations // Probab. Theory Related Fields. 1997. V. 109. № 3. P. 343–366.
- [13] T. Kato. Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions // Math. Z. 1984. V. 187. № 4. P. 471–480.
- [14] S. Kuksin, A. Piatniski, A. Shirikyan. A coupling approach to randomly forced nonlinear PDEs. II // Comm. Math. Phys. 2002. V. 230. № 1. P. 81–85.
- [15] S. Kuksin, A. Shirikyan. Stochastic dissipative PDEs and Gibbs measures // Comm. Math. Phys. 2000. V. 213. № 2. P. 291–330.
- [16] S. Kuksin, A. Shirikyan. Coupling approach to white-forced nonlinear PDEs // J. Math. Pures Appl. (9). 2002. V. 81. № 6. P. 567–602.
- [17] J. C. Mattingly. On recent progress for the stochastic Navier Stokes equations // Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Forges-les-Eaux, 2003). Nantes: Univ. Nantes, 2003. Exp. № XI.
- [18] Ya. G. Sinai. On local and global existence and uniqueness of solutions of the 3D-Navier–Stokes system on $\mathbb{R}^3$ // Perspectives in Analysis. Conference in honor of Lennart Carleson’s 75th birthday / ed. M. Benedicks, P. Jones, S. Smirnov. Berlin: Springer-Verlag (to appear).

Международный институт теории прогноза
 землетрясений и математической геофизики РАН;
 Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН,
 Международный институт теории прогноза землетрясений
 и математической геофизики РАН;
 Математическое отделение Принстонского университета США,
 Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Поступила в редакцию
 14.10.2004