Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Ильяшенко, Три жемчужины теории линейных дифференциальных уравнений (по работам А. А. Болибруха), *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 73–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:31:49

УДК 517.927.7

Памяти Андрея Андреевича Болибруха

ТРИ ЖЕМЧУЖИНЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ПО РАБОТАМ А. А. БОЛИБРУХА)

Ю. С. Ильяшенко

Излагаются три классических результата А. А. Болибруха по теории линейных систем с комплексным временем: отрицательное решение 21-й проблемы Гильберта; достаточные условия ее положительной разрешимости; достаточные условия приводимости системы с иррегулярной особой точкой к стандартной форме Биркгофа.

Библиография: 13 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Контрпример к проблеме Римана–Гильберта	74
1.1. Системы класса Б	74
1.2. Необходимое условие реализуемости монодромии класса Б	75
1.3. Контрпример	75
1.4. Аналитическая нормальная форма фуксовых особых точек	75
1.5. Поведение инвариантной подсистемы вблизи особых точек	76
1.6. Определитель Вронского инвариантной подсистемы	77
§ 2. Реализуемость неприводимой монодромии: теорема Болибруха–Костова	78
2.1. Предварительные сведения: теоремы Племеля и Биркгофа–Гротендика	78
2.2. Ключевой аргумент: связь неприводимости и индексов расщепления ..	79
2.3. Окончание доказательства теоремы Болибруха–Костова	81
§ 3. Стандартная форма Биркгофа	82
3.1. Неприводимые системы	82
3.2. Глобализация	83
3.3. Ключевое соображение: снова о неприводимости и индексах расщепления	83
3.4. Окончание доказательства: приводимость к стандартной форме Биркгофа	84
Список литературы	84

Работа выполнена при частичной поддержке грантов NSF 0400495, РФФИ 02-01-00482, CRDF RM1-2358.

Эта статья содержит изложение трех классических результатов Андрея Андреевича Болибруха: решение проблемы Римана–Гильберта; доказательство реализуемости неприводимой монодромии фуксовой системой; приводимость к стандартной форме Биркгофа неприводимой системы.

Эти результаты входят в золотой фонд теории дифференциальных уравнений; после появления оригинальных работ [3]–[5], [7] они переизлагались [6], [1], [8] и, вероятно, будут еще переизлагаться. Настоящая работа является одним из таких переизложений. Андрей Андреевич думал и писал с геометрической точки зрения – в терминах теории векторных расслоений. В настоящей работе его доказательства изложены языком анализа. Разумеется, оба языка – аналитический и геометрический – равноправны. Однако каждая новая точка зрения на классический результат может быть полезной.

Первая часть работы была написана в 1995 году, но не была тогда опубликована. Отмечу, что в ней впервые появился термин “уравнения класса Б”. Андрей Андреевич несколько раз побуждал меня опубликовать ее. Этот замысел осуществляется лишь после его кончины. Перефразируя слова Грабаря о Серове: “Пусть эта работа послужит запоздалым венком на могилу этого бесконечно дорогого мне человека”.

§ 1. Контрпример к проблеме Римана–Гильберта

Проблема Римана–Гильберта имеет драматическую историю. Необходимые определения, формулировка и история проблемы содержатся в статье Д. В. Аносова и В. П. Лексина, опубликованной в настоящем журнале. В этом параграфе излагается результат А. А. Болибруха о нереализуемости произвольных данных монодромии фуксовой системой. Этот результат перевернул наши представления о проблеме и открыл новый этап в ее исследовании.

1.1. Системы класса Б.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Данными монодромии класса Б называется набор из конечного числа линейных обратимых операторов, произведение которых равно единичному оператору, причем выполнены следующие требования:

- 1) каждый оператор набора эквивалентен одной жордановой клетке;
- 2) набор приводим: существует нетривиальное подпространство (отличное от нуля и всего пространства), инвариантное относительно всех операторов набора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Фуксова система – класса Б, если ее данные монодромии – класса Б.

ТЕОРЕМА 1. Для каждой матрицы-вычета фуксовой системы класса Б все ее собственные значения одинаковы.

Без ограничения общности можно считать, что рассматривается система

$$\dot{z} = \sum \frac{A_j}{t - a_j} z, \quad (1)$$

для которой точка ∞ – неособая:

$$\sum A_j = 0. \quad (2)$$

Матрицы A_j называются матрицами-вычетами системы (1).

1.2. Необходимое условие реализуемости монодромии класса Б.

ТЕОРЕМА 2. Если данные монодромии класса Б реализуются фуксовой системой, то произведение собственных значений операторов соответствующего набора (единственное собственное значение каждого из операторов включается в произведение один раз) равно 1.

Теорема 2 немедленно следует из теоремы 1. Действительно, пусть данные монодромии — это операторы $M_0, \dots, M_m$, соответствующие матрицы-вычеты $A_0, \dots, A_m$. Пусть ν_j (соответственно λ_j) — единственное собственное значение оператора M_j (соответственно A_j). Тогда $e^{2\pi i \lambda_j} = \nu_j$ [8], [2]. Это следует также из формулы (6) ниже. По условию (2) $\sum \operatorname{tr} A_j = 0$. Следовательно, по теореме 1, $\sum \lambda_j = 0$; значит, $\prod \lambda_j = 1$.

1.3. Контрпример. Непосредственным вычислением легко проверить, что следующие три оператора образуют набор класса Б:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Между тем, их собственные значения соответственно равны 1, 1, -1. По теореме 2 набор (3) не реализуется как монодромия фуксовой системы. Чтобы убедиться, что набор (3) действительно не реализуется фуксовой системой, осталось доказать теорему 1.

Напомним необходимые сведения из локальной теории.

1.4. Аналитическая нормальная форма фуксовых особых точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Моном $z_j t^k e_i$ называется *резонансным* относительно набора $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если k — натуральное число и

$$\lambda_i - \lambda_j = k. \quad (4)$$

Отметим, что для каждой матрицы-вычета A_j системы класса Б все ее собственные значения $\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{n,j}$ находятся в резонансе, поскольку экспоненты $\nu_j = e^{2\pi i \lambda_{l,j}}$ совпадают при всех $l = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 3 [2], [8]. Система линейных уравнений с фуксовой особой точкой и матрицей-вычетом, имеющей собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, аналитически эквивалентна системе, матрица-вычет которой имеет жорданову нормальную форму, а все мономы, непостоянные по t , резонансны относительно набора $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Упорядочим собственные значения матрицы-вычета так, чтобы подряд шли собственные значения, связанные резонансным соотношением (4), и в каждом классе собственных значений, связанных этим соотношением, элементы не возрастали: $(4) \implies i < j$. Нормальная форма в теореме 3 имеет вид

$$\dot{z} = \frac{B(t)}{t} z, \quad B(t) = (b_{ij} t^{k_{ij}}), \quad b_{ij} \neq 0 \implies \lambda_i - \lambda_j = k_{ij}, \quad (5)$$

где k_{ij} принимают неотрицательные целые значения. При выбранном упорядочении собственных значений матрица B – верхнетреугольная.

То, что (5) является *формальной* нормальной формой исходной системы, следует из теоремы Пуанкаре–Дюлака. То, что эквивалентность не только формальная, но и аналитическая, – специфический факт теории фуксовых особых точек, для которой два этих типа эквивалентности (формальная и аналитическая) равносильны [10].

Положим

$$B(1) = D + C,$$

где $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица, а C – нильпотентная верхнетреугольная. Тогда фундаментальная матрица решений системы (5) имеет вид:

$$W(t) = t^D t^C. \quad (6)$$

Это проверяется простым вычислением:

$$\dot{W}W^{-1} = \left(\frac{D}{t}W + t^D \frac{C}{t}t^C \right) W^{-1} = \frac{D}{t} + \frac{t^D C t^{-D}}{t} = \frac{(b_{ij}(t))}{t}.$$

Как указано выше, $C = (c_{ij})$ – нильпотентная верхнетреугольная матрица. Из формулы (6) следует:

$$b_{jj}(t) = \lambda_j; \quad b_{ij}(t) = c_{ij} t^{\lambda_i - \lambda_j} = c_{ij} t^{k_{ij}} \text{ при } i < j; \quad b_{ij} = 0 \text{ при } i > j.$$

1.5. Поведение инвариантной подсистемы вблизи особых точек. Докажем теорему 1 для $z \in \mathbb{C}^4$, предполагая, что общее инвариантное подпространство всех операторов монодромии двумерно, как в примере (3). Общий случай отличается от этого заменой размерностей 2 и 4 на k и n , а дроби $1/2$ ниже на k/n .

Рассмотрим два решения $z^1(t)$ и $z^2(t)$ такие, что порожденная ими плоскость сохраняется операторами монодромии. Выберем базисную точку $t = a \neq a_j$ и зафиксируем координаты в фазовом пространстве $\mathbb{C}^4$ так, что начальное значение $z^1(a) = e_1$, $z^2(a) = e_2$. Пусть Z – фундаментальная матрица рассматриваемой системы с начальным условием $Z(a) = E$. В окрестности каждой особой точки a_j определена замена $w_j = H_j(t)z_j$, приводящая матрицу Z к виду (6), где t заменено на $t - a_j$, а $D = D_j$ и $C = C_j$ – матрицы, соответствующие нормальной форме (5) в точке a_j . Замена H_j продолжается в любую односвязную область на проколотой сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Поэтому можно считать, что замена H_j определена в области U_j , содержащей точку a для каждого j . Естественно поставить вопрос: *в какие “нормализованные” решения системы (5) переходят решения z^1 и z^2 при такой замене?*

Ответ является ключевым моментом в доказательстве теоремы 1. *Решения z^1 и z^2 , записанные в нормализующей карте, принадлежат плоскости, натянутой на первые два столбца фундаментальной матрицы*

$$W_j = (t - a_j)^{D_j} (t - a_j)^{C_j}.$$

Причина состоит в том, что *жорданова клетка имеет ровно одно инвариантное подпространство в каждой промежуточной размерности*. Более подробно, рассмотрим первые два столбца матрицы W_j . Они имеют вид $\tilde{V}_j = \begin{pmatrix} V_j \\ 0 \end{pmatrix}$, где V_j и 0 – матрицы 2×2 ,

$$V_j(t) = \begin{pmatrix} (t - a_j)^{\lambda_{1,j}} & c_j(t - a_j)^{\lambda_{1,j}} \ln t \\ 0 & (t - a_j)^{\lambda_{2,j}} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,j} - \lambda_{2,j} = k \in \mathbb{Z}_+. \quad (7)$$

При обходе точки a_j в положительном направлении матрица $V_j(t)$ умножается на $m_j = \begin{pmatrix} \nu_j & \alpha \\ 0 & \nu_j \end{pmatrix}$, где $\alpha = 2\pi i c_j \nu_j$.

Для нас важно, что первые два столбца матрицы W_j порождают плоскость, инвариантную относительно монодромии. Решения $H_j z^1$ и $H_j z^2$ порождают плоскость с таким же свойством. Но монодромия, соответствующая обходу a_j , эквивалентна одной жордановой клетке, поскольку рассматриваемая система – класса Б. *Следовательно, эти две плоскости совпадают.* Итак, для каждого j в некоторой односвязной области, содержащей a и a_j :

$$(z^1(t), z^2(t)) = H_j^{-1}(t) \tilde{V}_j.$$

Обозначим через $h_j(t)$ левый верхний минор матрицы $H_j^{-1}(t)$ порядка 2. При $t = a$ имеем равенство (2×2) -матриц:

$$E = h_j(a) V_j(a).$$

Первая и третья матрицы в этом выражении невырождены; поэтому невырождена и матрица $h_j(a)$. Следовательно,

$$\det h_j(t) \neq 0.$$

Обозначим через $Y(t)$ верхний левый минор порядка 2 матрицы $Z(t)$. В области U_j он имеет вид

$$Y(t) = h_j(t) V_j(t), \quad \det h_j \neq 0, \quad (8)$$

где V_j задано формулой (7).

На этом заканчивается основная часть доказательства теоремы 1. Теорема выводится отсюда с помощью формулы Лиувилля–Остроградского и теоремы о сумме вычетов мероморфной функции. Это сделано в следующем пункте.

1.6. Определитель Вронского инвариантной подсистемы. Положим

$$\det Y(t) := w(t).$$

Операторнозначная функция $Y(t)$ на универсальной накрывающей над $S := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ обладает свойством монодромии (при обходе t по петле Y умножается справа на невырожденный линейный оператор) и регулярности (Y растет не быстрее степени расстояния до вершины сектора с вершиной a_j для всех j ; в остальных точках Y голоморфна). По теореме Римана–Фукса [2] она удовлетворяет регулярной линейной системе $\dot{Y} = PY$ на сфере Римана. Другими словами, матричная функция

$$P(t) = \dot{Y}(t) Y^{-1}(t)$$

мероморфна на сфере Римана. Следовательно,

$$\sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_a \operatorname{tr} P = 0. \quad (9)$$

С другой стороны, по формуле Лиувилля–Остроградского

$$\frac{d}{dt}(\ln w) = \operatorname{tr} P.$$

Из формул (7) следует, что в U_j

$$w(t) = (t - a_j)^{\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}} \det h_j(t).$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{a_j} \frac{d}{dt}(\ln w) \geq \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}. \quad (10)$$

Во всех остальных точках a

$$\operatorname{res}_a \frac{d}{dt}(\ln w) \geq 0, \quad (11)$$

поскольку вне a_j определитель $w(t)$ голоморфен.

Заметим, что $\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} \geq \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_j$ для любого $j \in \{1, \dots, m\}$. Это следует из того, что $\lambda_{l,j}$ не возрастают с возрастанием l . Поэтому теорема 1 равносильна утверждению

$$\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Предположим теперь, что теорема 1 неверна. Тогда

$$\exists j: \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} > \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_j. \quad (12)$$

Из формул (9)–(12) следует:

$$0 = \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_a \operatorname{tr} P > \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_j = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему 1.

§ 2. Реализуемость неприводимой монодромии: теорема Болибруха–Костова

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1 [5], [12]. *Неприводимые данные монодромии могут быть реализованы фуксовой системой.*

Нумерация формул в этом и следующем параграфе начинается заново; ссылки даются на формулы только текущего параграфа.

2.1. Предварительные сведения: теоремы Племеля и Биркгофа–Гротендика.

ТЕОРЕМА ПЛЕМЕЛЯ [13], [2]. *Любые данные монодромии могут быть реализованы системой с регулярными особыми точками, причем все точки кроме одной – фуксовы.*

ТЕОРЕМА БИРКГОФА–ГРОТЕНДИКА. Любая голоморфная обратимая операторнозначная функция в замкнутом кольце между двумя окружностями с центром 0 может быть разложена в произведение двух голоморфных обратимых операторнозначных функций, одна из которых определена всюду внутри внешней окружности кольца, а другая – всюду на $\mathbb{C}$ вне внутренней окружности кольца и мероморфно продолжается в точку бесконечность.

На языке формул, пусть

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in [R_1, R_2], R_1 < R_2\},$$

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_2\}, \quad D_\infty = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |z| > R_1\},$$

$D_\infty^* = D_\infty \setminus \infty$, $\Phi: K \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ голоморфно. Тогда существуют голоморфные отображения $H: D_0 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, $M: D_\infty^* \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, M мероморфно продолжается на ∞ , такие, что

$$\Phi = HM.$$

Очевидно, в теореме Биркгофа–Гротендика сомножители, а также точки 0 и ∞ можно поменять местами.

Монополю в точке ∞ называется операторнозначная функция $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, мероморфно продолжаемая на ∞ .

По теореме Лиувилля функция Γ – матричный полином. Определитель $\det \Gamma$ – тоже полином, к тому же отличный от нуля, следовательно – константа. Пример:

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется монополю в любой точке $a \in \widehat{\mathbb{C}}$.

ЛЕММА СОВАЖА [11]. Любая операторнозначная голоморфная функция $M: D_\infty^* \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, мероморфно продолжаемая на ∞ , разлагается в произведение

$$M(t) = \Gamma(t)t^K H(t), \quad (1)$$

где Γ – монополю в точке ∞ , K – целочисленная диагональная матрица, $H: D_\infty \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ – голоморфное отображение.

Подчеркнем, что матрица $H(\infty)$ определена и невырождена. Диагональные элементы матрицы $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ называются *индексами расщепления* матричной функции M .

2.2. Ключевой аргумент: связь неприводимости и индексов расщепления. Рассмотрим систему с особыми точками $a_1, \dots, a_m, \infty$, реализующую неприводимые данные монодромии:

$$\dot{z} = A(t)z. \quad (2)$$

Пусть точки $a_1, \dots, a_m$ для этой системы фуксовы, а точка ∞ – регулярна. Такая система существует по теореме Племеля. Пусть Z – фундаментальная матрица системы (1), выбранная так, что монодромия на ∞ задается нижнетреугольной матрицей. В силу теоремы Римана [2]

$$Z(t) = M(t)t^A, \quad (3)$$

где матричная функция $M: D_\infty^* \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ мероморфна в ∞ , матрица A – нижнетреугольная.

Следующая лемма удивительным образом связывает индексы расщепления матрицы M (локальную характеристику Z) и неприводимость монодромии системы (1) (глобальную характеристику Z).

Целочисленную диагональную матрицу будем называть *убывающей*, если ее диагональные элементы не возрастают с возрастанием номера. Очевидно, в лемме Соважа матрицу K можно взять убывающей. В дальнейшем это соглашение всегда считается выполненным.

ЛЕММА 1 [5]. Пусть (3) – фундаментальная матрица системы (2) (точнее, ее разложение в окрестности ∞), монодромия системы (2) неприводима, а все особые точки, кроме ∞ , – фуксовы. Тогда соседние индексы расщепления матрицы M удовлетворяют неравенству

$$k_j - k_{j+1} \leq m - 1$$

для всех j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим матричную функцию M по формуле (1):

$$M(t) = \Gamma(t)t^K H(t).$$

Положим

$$W(t) = \Gamma^{-1}(t)Z(t).$$

Эта новая матричная функция удовлетворяет системе

$$\dot{W} = B(t)W \quad (4)$$

с теми же свойствами, что и (2): умножение на голоморфную обратимую матрицу не меняет фуксова характера особых точек. Итак, матрица B системы (4) имеет простые полюсы в точках $a_1, \dots, a_m$ и голоморфна в остальных точках на $\mathbb{C}$. Следовательно, ее ненулевые элементы не могут иметь нуль порядка выше m на ∞ . Действительно, сумма числа нулей и полюсов рациональной функции (с учетом кратности) равна нулю.

В окрестности ∞

$$W(t) = t^K Y(t), \quad (5)$$

где $Y(t) = H(t)t^A$. Матрица Y , как и t^A , является фундаментальной матрицей системы с фуксовой особой точкой ∞ . Отсюда следует, что соответствующая матрица коэффициентов

$$C(t) = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t)$$

имеет нуль порядка 1 на ∞ .

Исследуем теперь матрицу B на ∞ :

$$B = \dot{W}W^{-1} = \left(\frac{K}{t}t^K Y + t^K \dot{Y} \right) W^{-1} = \frac{K}{t} + t^K C(t)t^{-K}.$$

Предположим, что для некоторого j выполнено неравенство $k_j - k_{j+1} \geq m$. Пусть $B(t) = (b_{ij}(t))$. Тогда $b_{j+1,j}(t) = c_{j+1,j}(t)t^{k_{j+1}-k_j}$ имеет нуль порядка больше чем m на ∞ . Из замечания, сделанного в начале доказательства, следует, что $(b_{j+1,j}(t)) \equiv 0$.

Это же утверждение верно для любого $i \leq j$ и $l \geq j+1$: $b_{il}(t) = c_{il}(t)t^{k_i-k_l}$, $k_i - k_l \leq -m$, поскольку элементы k_i не возрастают.

Следовательно, матрица B имеет прямоугольник из нулей, в котором правый верхний элемент имеет номер $(j+1, j)$. Поэтому в системе (4) первые j элементов отделяются и монодромия системы приводима – противоречие.

ЛЕММА 2. Лемма 1 остается справедливой, если в ее формулировке равенство (3) заменить на

$$Z(t) = M(t)Y_1(t),$$

где Y_1 – фундаментальная матрица решений системы с фуксовой особенностью на ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы 1 проходит в этом случае дословно, только $Y(t) = H(t)Y_1(t)$ (вместо $H(t)t^A$). Простота нуля коэффициента $C(t)$ на ∞ следует из того, что умножение на H не меняет фуксовости особой точки ∞ .

2.3. Окончание доказательства теоремы Болибруха–Костова.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть Z – та же фундаментальная матрица, что и выше. Тогда существует монополю Γ такой, что

$$W = \Gamma Z$$

является фундаментальной матрицей фуксовой системы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, монодромия у W – та же, что у Z . Поэтому основная лемма влечет теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основной леммы использует следующую лемму Болибруха о перестановке.

ЛЕММА 3. Пусть K – целочисленная диагональная матрица. Тогда для каждой голоморфной функции $H: D_\infty \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ существуют: монополю Γ в точке ∞ ; целочисленная диагональная матрица K_1 , отличающаяся от K лишь порядком элементов; голоморфная функция $H_1: D_\infty \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, такие, что

$$t^K H = \Gamma H_1 t^{K_1}. \quad (6)$$

Возьмем убывающую диагональную матрицу N такую, что

$$n_j - n_{j+1} = \delta := (m-1)(n-1).$$

Пусть M – та же матрица, что в (3); положим

$$M_1 = M t^{-N}.$$

Применим лемму Соважа к матрице M_1 , а затем лемму о перестановке:

$$M_1 = \Gamma_1 t^K H = \Gamma_1 \Gamma_2 H_1 t^{K_1}. \quad (7)$$

Матрица $\Gamma = (\Gamma_1 \Gamma_2)^{-1}$ и является искомой. Докажем это.

С одной стороны,

$$Z = M_1 t^N t^A. \quad (8)$$

Докажем, что соседние индексы расщепления матрицы M_1 отличаются не больше чем на $m-1$. Для этого воспользуемся следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если A – нижнетреугольная, а N – убывающая матрица, то матрица $X = t^N t^A$ – фуксова на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему, для которой X является фундаментальной матрицей. Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$\dot{X}X^{-1} = \frac{N}{t} + \frac{t^N A t^{-N}}{t}; \quad t^N A t^{-N} = (b_{ij}(t)), \quad b_{ij}(t) = a_{ij} t^{n_i - n_j}.$$

По предположению $a_{ij} \neq 0 \implies i \geq j$. Следовательно, функции b_{ij} голоморфны на бесконечности.

Поэтому к матрице Z , разложенной по формуле (8), применима лемма 2. В силу этой леммы соседние индексы расщепления матрицы M_1 , т.е. соседние элементы матрицы K , различаются не более чем на $m - 1$. Элементы матрицы K_1 в формуле (7) отличаются от элементов матрицы K лишь порядком. Значит, любые два из них различаются не более чем на δ .

С другой стороны,

$$W = (\Gamma_1 \Gamma_2)^{-1} Z = H t^{K_1 + N} t^A.$$

Как доказано выше, соседние диагональные элементы матрицы K_1 отличаются не более чем на δ , т.е. не более, чем соседние элементы матрицы N . Поэтому матрица $K_1 + N$ — убывающая. В силу предложения 1, матрица $t^{K_1 + N} t^A$, а значит, и W — фуксова на ∞ , что и доказывает основную лемму.

§3. Стандартная форма Биркгофа

Известно, что типичная система

$$\dot{z} = \frac{A(t)}{t^r} z, \quad r > 0, \quad A \text{ голоморфна в } 0, \quad (1)$$

формально эквивалентна системе, содержащей только отрицательные степени t [2]. Такая система называется биркгофовой стандартной формой. Биркгоф (1913) предположил, что существует голоморфное приведение к стандартной форме, и даже опубликовал доказательство. Гантмахер (1952) нашел в нем ошибку. А. А. Болибрух [7] доказал, что *неприводимая* система (1) приводится аналитически к биркгофовой стандартной форме. Это доказательство очень близко к доказательству теоремы Костова–Болибруха и приводится ниже. Другое изложение доказательства Болибруха приведено в статье Бальзера, публикуемой в настоящем выпуске журнала.

3.1. Неприводимые системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система (1) называется *приводимой*, если ее матрица A имеет блочный вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_1 - \text{квадратная матрица}, \quad (2)$$

или голоморфно эквивалентна системе (2).

ТЕОРЕМА 1 [7]. *Неприводимая система (1) голоморфно эквивалентна биркгофовой стандартной форме.*

3.2. Глобализация. Отметим, что биркгофова стандартная форма

$$\dot{z} = \frac{\sum_0^{r-1} A_j t^j}{t^r} z \quad (3)$$

определена на всей сфере Римана, не имеет полюсов, кроме 0, на $\mathbb{C}$ и имеет фуксову особую точку на ∞ . Обратно, если система (1) голоморфно эквивалентна системе на $\widehat{\mathbb{C}}$ с особыми точками 0 и ∞ , причем особая точка ∞ – фуксова, то в окрестности особой точки 0 система (1) эквивалентна биркгофовой стандартной форме.

ЛЕММА 1. Система (1) голоморфно эквивалентна системе на сфере Римана с двумя особыми точками: иррегулярной особой точкой 0 и регулярной точкой ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z_1 – фундаментальная матрица системы (1) такая, что

$$Z_1(t) = \Phi(t)t^A,$$

матричная функция $\Phi: D \setminus 0 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ голоморфна и имеет существенную особенность в нуле. Матрицу Z можно выбрать так, что матрица A – нижнетреугольная (это не нужно в доказательстве леммы, но понадобится в дальнейшем). По теореме Биркгофа–Гротендика

$$\Phi = H_0 M, \quad H_0: D_0 \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), \quad M: D_\infty^* \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

– голоморфные отображения, M мероморфно на бесконечности. Тогда матричная функция Z на универсальной накрывающей над $\mathbb{C}^*$

$$Z = H_0^{-1} \Phi t^A \quad \text{в } D_0, \quad (4)$$

$$Z = M t^A \quad \text{в } D_\infty \quad (5)$$

определена корректно. Система для Z эквивалентна системе (1) в U_0 ; ∞ является для этой системы регулярной особой точкой.

3.3. Ключевое соображение: снова о неприводимости и индексах расщепления. Пусть матричная функция Z вида (4), (5) – фундаментальная матрица системы

$$\dot{Z} = A_1(t)Z. \quad (6)$$

Тогда $A_1 = (a_{ij}(t))$, причем ненулевые элементы a_{ij} имеют на бесконечности нуль порядка не выше r . Действительно, они имеют полюс порядка r в нуле и голоморфны на $\mathbb{C}^*$.

ЛЕММА 2. Пусть система (6) неприводима. В условиях, наложенных на систему (6), матрица M имеет невозрастающие индексы расщепления такие, что $k_j - k_{j+1} \leq r - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$M = \Gamma t^K H,$$

это разложение дается леммой Соважа. Пусть $W = \Gamma^{-1}Z$. Тогда W удовлетворяет тем же условиям, что и Z , причем

$$\dot{W} = B(t)W. \quad (7)$$

Пусть $Y = H t^A$; тогда $C(t) = \dot{Y} Y^{-1}$ имеет простой нуль на ∞ . Тогда в D_∞ :

$$B(t) = \frac{K}{t} + t^K C(t) t^{-K},$$

как и в п. 2.2. Рассуждая как в п. 2.2, получаем, что предположение $k_j - k_{j+1} \geq r$ влечет приводимость системы (7), а значит, и эквивалентной ей системы (1).

3.4. Окончание доказательства: приводимость к стандартной форме Биркгофа. Дальнейшие рассуждения – такие же, как в п. 2.3.

ЛЕММА 3. *Лемма 2 остается справедливой, если в ней t^A заменить фундаментальной матрицей Y_1 системы с фуксовой особой точкой ∞ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $Y = HY_1$ также имеет фуксову особую точку ∞ ; это единственное свойство Y , использованное в доказательстве леммы 2.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть Z – фундаментальная матрица системы (6), та же, что и выше. Тогда существует монополю Γ такой, что*

$$W = \Gamma Z$$

является фундаментальной матрицей системы с фуксовой особой точкой бесконечность.

Теорема 1 следует из этой леммы, поскольку фундаментальная матрица W получается из исходной с помощью голоморфной замены. Основная лемма §3 доказывается точно так же, как основная лемма §2; формулы из доказательства последней леммы повторяются дословно, только m нужно заменить на r .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. V. Anosov, A. A. Bolibrukh. The Riemann–Hilbert Problem. Braunschweig: Vieweg, 1994. (Aspects Math. V. E 22.)
- [2] В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 1. Динамические системы - 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 11–151.
- [3] А. А. Болибрух. Проблема Римана–Гильберта на комплексной проективной прямой // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №3. С. 118–120.
- [4] А. А. Болибрух. Проблема Римана–Гильберта // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 3–47.
- [5] А. А. Болибрух. О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №2. С. 9–18.
- [6] А. А. Болибрух. 21-я проблема Гильберта для фуксовых линейных систем // Труды МИАН. 1994. Т. 206. С. 1–145.
- [7] А. А. Болибрух. Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме // Докл. РАН. 1994. Т. 334. №5. С. 553–555.
- [8] А. А. Болибрух. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000.
- [9] А. А. Болибрух. Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами // Современные проблемы математики. Т. 1. М.: МИАН, 2003. С. 29–82.
- [10] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
- [11] Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [12] V. P. Kostov. Fuchsian linear systems on $\mathbb{CP}^1$ and the Riemann–Hilbert problem // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1992. V. 315. №2. P. 143–148.
- [13] J. Plemelj. Problems in the sense of Riemann and Klein. New York: Wiley, 1964. (Interscience Tracts Pure Appl. Math. V. 16.)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Независимый московский университет,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Cornell University, USA
E-mail: yulijs@mccme.ru

Поступила в редакцию
15.06.2004