Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Итенберг, В. М. Харламов, Е. И. Шустин, Логарифмическая эквивалентность инвариантов Вельшенже и Громова–Виттена, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 85–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 03:01:42

УДК 512.77

Памяти Андрея Болибруха, жизнерадостного человека
творческого ума и открытой душиЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ
ИНВАРИАНТОВ ВЕЛЬШЕНЖЕ И ГРОМОВА–ВИТТЕНА

И. В. ИТЕНБЕРГ, В. М. ХАРЛАМОВ, Е. И. ШУСТИН

Числа Вельшенже – своего рода вещественный аналог чисел Громова–Виттена, подсчитывающих комплексные рациональные кривые, проходящие через общие наборы точек, – оценивают снизу число вещественных рациональных кривых для любого общего набора вещественных точек. Под логарифмической эквивалентностью последовательностей мы понимаем асимптотическую эквивалентность их логарифмов. Мы доказываем такую эквивалентность для чисел Вельшенже и Громова–Виттена на любой торической поверхности Дель Пеццо с ее тавтологической вещественной структурой, в частности для проективной плоскости, при условии, что все, или почти все, выбранные точки вещественны. Мы также изучаем положительность чисел Вельшенже и их монотонность по отношению к числу мнимых точек.

Библиография: 12 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	86
§ 2. Асимптотика инвариантов Вельшенже в случае чисто вещественных данных	88
2.1. Обозначения	88
2.2. Числа Вельшенже	88
2.3. Ключевая оценка	89
2.4. Главное следствие	89
2.5. Доказательство ключевой оценки (теорема 3)	92
§ 3. Несколько результатов для случая данных, содержащих мнимые точки	96
3.1. Примеры вычисления инварианта Вельшенже	96
3.2. Два общих результата	98
3.3. Доказательство теорем 7 и 8	99
Список литературы	110

§ 1. Введение

Эта статья посвящена асимптотическому подсчету вещественных рациональных кривых, интерполирующих фиксированные наборы точек на вещественной поверхности Σ , точнее, следующей задаче: *для данного вещественного дивизора D и общего набора w , состоящего из $c_1(\Sigma) \cdot D - 1$ вещественной точки на Σ , как много имеется вещественных кривых среди комплексных рациональных кривых, принадлежащих линейной системе $|D|$ и проходящих через w ?* Под рациональными кривыми мы понимаем неприводимые кривые рода нуль и их вырождения, так что такие кривые образуют в $|D|$ проективное подмногообразие $S(\Sigma, D)$; это подмногообразие называется *многообразием Севери*. Кривая на вещественной поверхности Σ называется вещественной, если она инвариантна относительно инволюции $s: \Sigma \rightarrow \Sigma$, определяющей вещественную структуру на Σ .

В то время как, при незначительных ограничениях на Σ и D , число рассматриваемых комплексных кривых одно и то же для всех общих наборов w (оно равно степени $S(\Sigma, D)$), для вещественных кривых это уже не так (за исключением очень частных случаев). Например, если Σ — это проективная плоскость, то такая неинвариантность проявляется, начиная со степени $d = 3$: если $d = 3$ и все $3d - 1 = 8$ точек вещественны, то число интерполирующих вещественных рациональных кривых принимает значения 8, 10 и 12 (двенадцать является числом комплексных интерполирующих кривых).

До недавнего времени в этой интерполяционной задаче даже существование хотя бы одного вещественного решения при произвольном выборе общего набора из $3d - 1$ вещественной точки было известно только для $d \leq 3$. Положение дел кардинально изменилось после того, как Ж.-И. Вельшенже [11], [12] открыл способ приписать веса ± 1 вещественным решениям таким образом, что число решений, подсчитанных с весами, оказывается независимым от набора точек; точнее, вещественный набор w может даже содержать пары мнимых сопряженных точек, и тогда результат зависит только от числа m пар мнимых точек в w и от d . Как немедленное следствие, абсолютное значение инварианта Вельшенже $W_{d,m}$ дает нижнюю оценку числа $R_{d,m}(w)$ вещественных решений: $R_{d,m}(w) \geq |W_{d,m}|$.

В [3] мы доказали неравенство $W_{d,0} \geq \frac{1}{2}d!$, которое, благодаря нижней оценке Вельшенже, гарантирует, что для каждого целого $d \geq 1$ и любой $3d - 1$ общей вещественной точки на плоскости существует не менее $\frac{1}{2}d!$ вещественных рациональных кривых степени d , интерполирующих данные точки.

Сравнение этой нижней оценки с числом N_d комплексных плоских рациональных кривых степени d , проходящих через $3d - 1$ общую точку, показывает, что логарифм этой оценки асимптотически равен $\frac{1}{3} \log N_d$. Действительно, $\log d! \sim d \log d$, в то время как $\log N_d \sim 3d \log d$, как это следует из неравенств $(3d - 4)! 54^{-d} \leq N_d \leq (3d - 5)!$, которые в свою очередь следуют из рекуррентной формулы Концевича [5] (более точная асимптотика получена в [1], см. также замечание 3 в разделе 2.4). Возникает естественный вопрос: *на сколько отличаются $W_d = W_{d,0}$ и N_d в логарифмической шкале?*

В настоящей работе мы даем полный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательности $\log W_d$ и $\log N_d$ асимптотически эквивалентны.*

Для доказательства этой асимптотической эквивалентности мы улучшаем полученную в [3] нижнюю оценку $W_{d,0} \geq \frac{1}{2}d!$. Как и в [3], мы используем метод, основанный на подходе Г. Михалкина [7] к подсчету нодальных кривых, проходящих через специфические конфигурации точек, – подходе, который сводит задачу к соответствующему подсчету тропических кривых. В действительности, мы лишь модифицируем построение из [3] с тем, чтобы утроить логарифм нижней оценки.

Мы получаем аналогичные результаты для инвариантов Вельшенже других торических поверхностей Дель Пешо, снабженных тавтологическими вещественными структурами. Мы также изучаем поведение двойной последовательности $W_{d,m}$ по отношению к переменной m . Для исследования инвариантов $W_{d,m}$ с $m > 0$ мы используем разработанную Е. Шустиным [9] схему подсчета, обобщающую схему Михалкина с чисто вещественных конфигураций ($m = 0$) на произвольные конфигурации, инвариантные относительно комплексного сопряжения. (Возможно, нелишнее отметить, что эти исчислительные алгоритмы могут быть интерпретированы как развитые, почти явные, версии метода склеивания Виро, ср. [7]–[10].)

Мы также указываем на то, что наши асимптотические результаты дают некоторую информацию об области сходимости потенциала Громова–Виттена (см. подробности в замечаниях раздела 2.4).

Материал статьи распределен следующим образом. Отдельный параграф, §2, посвящен случаю, в котором все точки вещественны. Основные результаты собраны в теореме 4 (включающей в себя теорему 1 как частный случай). Доказательство разбито на две части: верхняя оценка инвариантов Громова–Виттена (лемма 5) и нижняя оценка инвариантов Вельшенже (теорема 3). В §3 анализируется случай, когда среди точек есть мнимые. Вначале мы явно вычисляем инварианты Вельшенже в нескольких частных случаях. Затем, после формулировки общей вычислительной схемы Шустина, получаем с ее помощью несколько результатов о положительности, монотонности и асимптотике инвариантов Вельшенже (теоремы 7 и 8).

Как уже сказано выше, вычислительная схема, используемая в §2, – та же, что и в [3]. Она взята из [6], [8], и ее краткое изложение можно найти в [3]. В то же время, она является специальным случаем общей схемы Шустина, описанной в §3, так что читатель может легко восстановить первую схему из обобщенной, полагая число мнимых точек равным нулю.

Первый и второй авторы являются участниками Research Training Network RAAG CT-2001-00271; второй автор является также участником Research Training Network EDGE CT-2000-00101. Третий автор был поддержан грантом 465/04 Израильского научного фонда. Основные результаты этой статьи были получены во время пребывания авторов в MSRI (Беркли), и мы благодарны MSRI за гостеприимство и прекрасные условия для работы.

§ 2. Асимптотика инвариантов Вельшенже в случае чисто вещественных данных

Карту кормчий добыл: было море на ней

Без намека на землю и мели;

Как всегда угодил он команде своей:

В карте все разобраться сумели.

“Охота на Снарка”, Льюис Кэррол (пер. М. Пухова)

2.1. Обозначения. Имеется в точности пять аnodальных (т.е. не содержащих (-2) -кривых) торических поверхностей Дель Пешо: проективная плоскость $\mathbb{P}^2$, произведение прямых $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а также $\mathbb{P}^2$ с k раздутыми общими точками, $k = 1, 2$ или 3 ; три последние поверхности обозначаются через P_k . Пусть $E_1, \dots, E_k$ – исключительные дивизоры проекции $P_k \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $L \subset P_k$ – прообраз общей прямой.

Введем на $\mathbb{P}^2$ и Q тавтологические вещественную и торическую структуры. В случае поверхности P_k выберем раздутые точки среди 0 -мерных орбит на $\mathbb{P}^2$; таким образом, P_k естественно наследует вещественную и торическую структуры от $\mathbb{P}^2$.

Пусть Σ – одна из этих пяти поверхностей и D – ее обильный дивизор. В подходящих вещественных торических координатах линейная система $|D|$ может быть задана мономами $x^i y^j$, где (i, j) пробегает целые точки (т.е. точки с целыми координатами) выпуклого многоугольника $\Pi = \Pi_D$, выбранного следующим образом. Если $\Sigma = \mathbb{P}^2$ и $D = d[\mathbb{P}^1]$, то Π – треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(d, 0)$, $(0, d)$. Если $\Sigma = Q$ и D имеет бистепень (d_1, d_2) , то Π – параллелограмм с вершинами $(d_2, 0)$, $(d_1 + d_2, 0)$, (d_1, d_2) , $(0, d_2)$. Если $\Sigma = P_k$, $k = 1, 2, 3$, и $D = dL - \sum_{i=1}^k d_i E_i$, то Π представляет собой соответственно трапецию с вершинами $(0, 0)$, $(d, 0)$, $(d_1, d - d_1)$, $(0, d - d_1)$, или пятиугольник с вершинами $(0, 0)$, $(d - d_1, 0)$, $(d - d_1, d_1)$, $(d_2, d - d_2)$, $(0, d - d_2)$, или шестиугольник с вершинами $(d_3, 0)$, $(d - d_1, 0)$, $(d - d_1, d_1)$, $(d_2, d - d_2)$, $(0, d - d_2)$, $(0, d_3)$. (Выбор параллелограмма вместо прямоугольника в случае $\Sigma = Q$ упрощает анализ неприводимости кривых, появляющихся в доказательстве теоремы 3.)

Пусть $r = r(\Pi)$ – число целых точек на границе $\partial\Pi$ многоугольника Π , уменьшенное на 1, и $\delta(\Pi)$ – число внутренних целых точек этого многоугольника. Заметим, что $r(\Pi) = c_1(\Sigma) \cdot D - 1$ и что $\delta(\Pi)$ является родом неособых представителей линейной системы $|D|$. Хорошо известно, что число кривых рода $0 \leq g \leq \delta(\Pi)$ в $|D|$, проходящих через $c_1(\Sigma) \cdot D - 1 + g$ общих точек, конечно. Обозначим через $N_{\Sigma, D}$, или сокращенно N_D , число комплексных рациональных кривых в $|D|$, проходящих через r общих точек (заметим, что рациональные кривые в $|D|$, проходящие через r общих точек, являются неприводимыми и нодальными). Вследствие общности комплексной структуры аnodальных поверхностей Дель Пешо, числа N_D совпадают с инвариантами Громова–Виттена рода нуль. Рекурсивные формулы, вычисляющие эти инварианты, были получены для $\Sigma = \mathbb{P}^2$ М. Концевичем и для прочих аnodальных поверхностей Дель Пешо – М. Концевичем и Ю. Маниным [5].

2.2. Числа Вельшенже. Фиксируем целое m такое, что $0 \leq 2m \leq r$, и введем на Σ^r вещественную структуру $c_{r, m}$, отображающую $(z_1, \dots, z_r) \in \Sigma^r$ в $(z'_1, \dots, z'_r) \in \Sigma^r$,

где $z'_i = c(z_i)$, если $i > 2m$, и $(z'_{2j-1}, z'_{2j}) = (c(z_{2j}), c(z_{2j-1}))$, если $j \leq m$. По отношению к этой вещественной структуре точка $\mathbf{w} = (z_1, \dots, z_r) \in \Sigma^r$ вещественна (т.е. инвариантна относительно $c_{r,m}$) тогда и только тогда, когда z_i принадлежит вещественной части $\mathbb{R}\Sigma$ поверхности Σ при $i > 2m$ и z_{2j-1}, z_{2j} комплексно сопряжены при $j \leq m$. Обозначим через $\Omega_{r,m}(\Sigma)$ открытое плотное подмножество в $\mathbb{R}\Sigma^r = \text{Fix } c_{r,m}$, состоящее из $c_{r,m}$ -инвариантных r -наборов $\mathbf{w} = (z_1, \dots, z_r)$ с попарно различными $z_i \in \Sigma$.

Допуская некоторую вольность речи, мы говорим, что кривая C поверхности Σ проходит через $\mathbf{w} \in \Sigma^r$, если C содержит все компоненты $z_i \in \Sigma$ набора $\mathbf{w}$.

Следуя [11], [12], для данного *общего* набора $\mathbf{w} \in \Omega_{r,m}(\Sigma)$ мы вводим число $W_{D,m}^{\text{even}}(\mathbf{w})$ (соответственно $W_{D,m}^{\text{odd}}(\mathbf{w})$) вещественных рациональных кривых в $|D|$, проходящих через $\mathbf{w}$ и имеющих четное (соответственно нечетное) число уединенных точек (т.е. вещественных двойных точек, в которых локальное уравнение кривой приводится над $\mathbb{R}$ к виду $x^2 + y^2 = 0$). Число Вельшенже $W_{D,m}(\mathbf{w})$ определяется как $W_{D,m}(\mathbf{w}) = W_{D,m}^{\text{even}}(\mathbf{w}) - W_{D,m}^{\text{odd}}(\mathbf{w})$.¹

ТЕОРЕМА 2 (Вельшенже [11], [12]). Число $W_{D,m}(\mathbf{w})$ не зависит от выбора *общего* элемента $\mathbf{w}$ в $\Omega_{r,m}(\Sigma)$.

В случае $m = 0$ число $W_{\Sigma,D,m} = W_{\Sigma,D,m}(\mathbf{w})$ обозначается через W_D . Мы пользуемся более детальными обозначениями $W_{\Sigma,D}$ и $W_{\Sigma,D,m}$, когда нам приходится работать с несколькими поверхностями Σ одновременно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы сформулировали теорему 2 в той форме, которая необходима для наших целей, а именно для торических анодальных поверхностей Дель Пешо. Изначально, в [11], [12], инвариантность чисел Вельшенже была установлена для рациональных симплектических поверхностей с общими почти комплексными структурами. Этот результат включает в себя и случай анодальных поверхностей Дель Пешо с интегрируемой почти комплексной структурой, поскольку на такой поверхности интегрируемая почти комплексная структура – общая. Вариант этого доказательства, не использующий неинтегрируемые почти комплексные структуры и потому обслуживающий только анодальные поверхности Дель Пешо, приведен в [4].

2.3. Ключевая оценка. Следующая оценка играет решающую роль в нашем исследовании логарифмической эквивалентности инвариантов Вельшенже и Громова–Виттена.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Σ – одна из поверхностей $\mathbb{P}^2$, Q , P_1 , P_2 или P_3 с ее тавтологической вещественной структурой и D – обильный дивизор на Σ . Тогда

$$W_{nD} \geq \exp(an \log n + O(n)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a = c_1(\Sigma) \cdot D. \quad (1)$$

2.4. Главное следствие. Пусть, как и выше, Σ – одна из поверхностей $\mathbb{P}^2$, Q , P_1 , P_2 или P_3 с ее тавтологической вещественной структурой и D – обильный дивизор на Σ . Мы доказываем следующую теорему.

¹В [3] мы рассматривали лишь случай $m = 0$ и использовали несколько иные обозначения.

ТЕОРЕМА 4. *Последовательности $\log W_{nD}$ и $\log N_{nD}$, $n \in \mathbb{N}$, асимптотически эквивалентны. Более точно, выполнены соотношения*

$$\log W_{nD} = \log N_{nD} + O(n) \quad \text{и} \quad \log N_{nD} = (c_1(\Sigma) \cdot D)n \log n + O(n). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $N_{nD} \geq W_{nD}$, соотношения (2) следуют из теоремы 3 и леммы 5. $\square$

ЛЕММА 5. *Справедливо неравенство*

$$\log N_{nD} \leq (c_1(\Sigma) \cdot D)n \log n + O(n). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\Sigma = Q$ с дивизором D бистепени (d_1, d_2) эквивалентен случаю $\Sigma = P_2$ с $D = dL - d_1 E_1 - d_2 E_2$, $d = d_1 + d_2$. Случай плоскости рассмотрен в [1]. Наконец, оставшийся случай $\Sigma = P_k$, $D = dL - \sum_{i=1}^k d_i E_i$ мы выводим из случая $\Sigma = \mathbb{P}^2$, $D = dL$ с помощью неравенства

$$N_{P_k, D} \leq N_{\mathbb{P}^2, dL} \left(\prod_{i=1}^k d_i! \right)^{-1}, \quad \text{если} \quad c_1(P_k) \cdot D > 1, \quad (4)$$

применяя его к nD вместо D и используя формулу Стирлинга для факториала.

Мы доказываем неравенство (4) для P_k с любым $k \in \mathbb{N}$, предполагая, как обычно, что раздутые точки находятся в общем положении. А именно, мы находим общую конфигурацию z , состоящую из $c_1(P_k) \cdot D - 1 = 3d - d_1 - \dots - d_k - 1$ вещественной точки в P_k , и общую конфигурацию z' , состоящую из $3d - 1$ вещественной точки в $\mathbb{P}^2$, такие, что каждой вещественной рациональной кривой в $|D|$, проходящей через z , соответствует $\prod_i d_i!$ вещественных плоских рациональных кривых степени d , проходящих через z' .

Пусть $\pi: P_k \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие плоскости в общих вещественных точках $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}^2$ и z – набор из $3d - d_1 - \dots - d_k - 1$ общей вещественной точки в P_k . Поскольку $c_1(P_k) \cdot D > 1$, теорема 4.1(i) из [2] применима и утверждает, что каждый элемент множества $\mathcal{R}_D(z)$ рациональных кривых в $|D|$, проходящих через z , является погруженной кривой. Поэтому малым шевелением одной из точек набора z можно добиться того, чтобы все эти элементы пересекали исключительные дивизоры трансверсально. Таким образом, они проектируются в плоские рациональные кривые степени d , имеющие ровно d_i неособых локальных ветвей в p_i для любого $i = 1, \dots, k$.

Для каждого $i = 1, \dots, k$ фиксируем набор z_i , состоящий из d_i общих вещественных точек в малой окрестности точки p_i . Для каждой кривой $C \in \mathcal{R}_D(z)$ рассмотрим погружение $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, параметризующее кривую $\pi(C)$. Нормальное расслоение $\mathcal{N} = \varphi^* T\mathbb{P}^2 / T\mathbb{P}^1$ является линейным расслоением степени $3d - 2$ на $\mathbb{P}^1$, и его линейная система $H^0(\mathcal{N})$ не имеет базисных точек. Поэтому, накладывая на деформации погружения φ условие прохождения через все $3d - d_1 - \dots - d_k - 1$ точку в z , мы можем свободно варьировать образы всех $d_1 + \dots + d_k$ точек в $\varphi^{-1}\{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{P}^1$, и, таким образом, получаем не менее $\prod_i d_i!$ вещественных рациональных кривых, проходящих через $z' = z \cup \bigcup_i z_i$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Лемма 5 и ее доказательство буквально переносятся на симплектические раздутия плоскости, при этом числа N_{nD} заменяются на соответствующие симплектические инварианты Громова–Виттена рода нуль.

2. Если $c_1(P_k) \cdot D = 1$, то неравенство (4) может быть заменено на

$$N_{P_k, D} \leq N_{\mathbb{P}^2, (d+1)L} \left(d \prod_{i=1}^k d_i! \right)^{-1}. \quad (5)$$

Множество рациональных кривых в $|D|$ конечно, и для доказательства неравенства (5) можно выбрать в качестве L любую прямую, трансверсальную всем рациональным кривым $C \in |D|$. Фиксируем затем три общие точки $z_1, z_2, z_3 \in L$ и общую прямую $L' \neq L$, проходящую через z_3 . Стандартное применение теоремы Римана–Роха показывает, что, сглаживая любую из точек пересечения L и C , мы включаем $C + L$ в одномерное семейство рациональных кривых в $|D + L|$, проходящих через z_1, z_2 , и что полученное семейство замечает окрестность точки z_3 на L' . Поэтому существует по меньшей мере $dN_{P_k, D}$ рациональных кривых в $|D + L|$, проходящих через z_1, z_2 и общую точку $z'_3 \in L'$, близкую к z_3 . После чего остается применить неравенство (4) к $D + L$ вместо D .

3. Результаты этого раздела позволяют сделать некоторые выводы о сходимости потенциала Громова–Виттена, который в случае $\Sigma = P_k$ мы записываем в виде ряда Лорана

$$f = \sum_{c_1(P_k) \cdot D \geq 1} \frac{N_D}{(c_1(P_k) \cdot D - 1)!} x^d y_1^{d_1} \cdots y_k^{d_k}, \quad D = dL - \sum d_i E_i.$$

Прежде всего, из неравенств (4) и (5) следует, что область сходимости ряда f имеет непустую внутренность. Точнее, эта область сходимости содержит множество

$$\{|y_1| + \cdots + |y_k| < 1, |x|(1 + |y_1| + \cdots + |y_k|)^3 < a^{-1}\},$$

где $a = 0.138 \dots$ – радиус сходимости ряда $\sum \frac{N_d}{(3d-1)!} t^d$ (ср. [1]). В самом деле, ряд f может быть почленно оценен сверху рядом

$$\begin{aligned} & \sum_{c_1 \cdot D \geq 1, (d_1, \dots, d_k) \geq 0} \frac{d^{-1} N_{d+1}}{\prod (d_k)! \cdot (3d - (d_1 + \cdots + d_k) - 1)!} x^d y_1^{d_1} \cdots y_k^{d_k} \\ &= \sum_{d \geq 0} \frac{d^{-1} N_{d+1}}{(3d-1)!} (1 + y_1 + \cdots + y_k)^{3d-1} x^d, \end{aligned}$$

за исключением конечного числа слагаемых, соответствующих $D = E_i, 1 \leq i \leq k$.

Далее, из нижней оценки

$$\log N_{nD} \geq \log W_{nD} \geq (c_1(\Sigma) \cdot D)n \log n + O(n)$$

следует, что область сходимости ряда f содержится в пересечении множеств

$$\{|x^{d_1} y_1^{d_1} \cdots y_k^{d_k}| \leq R(d_1, \dots, d_k)\},$$

где $R(d_1, \dots, d_k)$ – положительные конечные константы, $(d_1, \dots, d_k) \geq 0$ и $c_1(P_k) \cdot D \geq 1$. Это утверждение является рутинным следствием нижеследующей формулы Коши для поддиагоналей сходящегося степенного ряда $f = \sum a_{kl} x^k y_1^{l_1} \cdots y_k^{l_k}$ от $k+1$ переменных $x, \hat{y}$ ($\hat{y} = (y_1, \dots, y_k)$):

$$\sum_n a_{pn, \hat{q}n} t^{pn} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_T f\left(\frac{t}{\hat{y}^{\hat{q}}}, \hat{y}^p\right) \frac{d\hat{y}}{\hat{y}}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad \hat{q} \in \mathbb{N}^k,$$

где $|t|^p \leq x^p(0)\hat{y}(0)^{\hat{q}}$, T – тор $\{|y_i|^p = y_i(0)\}$ и $p, \hat{q}$ взаимно просты. Эта интегральная формула верна для любой положительной точки $(x(0), \hat{y}(0))$, принадлежащей внутренности области сходимости. Таким образом, ограниченность произведения $x^p \hat{y}^{\hat{q}}$ эквивалентна конечности радиуса сходимости поддиагонального ряда, которая в свою очередь выводится из вышеприведенной нижней оценки.

2.5. Доказательство ключевой оценки (теорема 3). В этом разделе терминология, обозначения и процедуры построения разбиений заимствованы² из [3]. Единственное отличие связано с разбиениями, которые в [3] называются *compressing*; мы предпочитаем следовать терминологии, используемой в схеме Шустина (см. п. 3.3.1), и называем их *согласованными разбиениями* или *γ -согласованными разбиениями*, если хотим подчеркнуть, что разбиения получены процедурой выдавливания, примененной к определенному пути γ .

Мы разбираем сначала случаи поверхностей $\mathbb{P}^2$ и Q , а затем показываем, как из этих случаев выводятся остальные.

2.5.1. Случай $\Sigma = \mathbb{P}^2$. Достаточно положить $D = [\mathbb{P}^1]$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим линейную функцию $\lambda^0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую формулой $\lambda^0(i, j) = i - \varepsilon j$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малая константа (так что λ^0 определяет лексикографический порядок на целых точках треугольника $\Pi = \Pi_{nD}$). Впишем в Π последовательность квадратов максимального размера, как показано на рис. 1(а). Их правые верхние вершины имеют координаты

$$(x_i, y_i), \quad i \geq 1, \quad x_1 = y_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad y_{i+1} = \left\lfloor \frac{n - x_i}{2} \right\rfloor, \quad x_{i+1} = x_i + y_{i+1}.$$

Положим $(x_0, y_0) = (0, n)$. Затем построим λ^0 -допустимый целочисленный путь γ , состоящий из отрезков целочисленной длины 1, как показано на рис. 1(б). Этот путь состоит: из последовательностей вертикальных отрезков, соединяющих (x_i, y_i) с $(x_i, y_{i+1} - 1)$; зигзагообразных последовательностей, соединяющих $(x_i, y_{i+1} - 1)$ с (x_{i+1}, y_{i+1}) (в такой зигзагообразной последовательности отрезки с угловым коэффициентом 1 чередуются с вертикальными отрезками; она всегда начинается и заканчивается отрезками с угловым коэффициентом 1); а также отрезков

²С поправкой на проблемы перевода. Например, термин *lattice path* мы переводим как “целочисленный путь” и *compressing procedure* – как “процедура выдавливания”.

Рис. 1. Путь γ и γ -согласованные разбиения для $\Sigma = \mathbb{P}^2$

$[(n-1, 1), (n-1, 0)]$ и $[(n-1, 0), (n, 0)]$. Общая целочисленная длина пути γ равна $3n-1$.

Теперь мы выбираем некоторые специальные γ -согласованные разбиения треугольника Π , построенные согласно процедуре выдавливания (см. раздел С статьи [3]), начиная с пути γ . А именно, путь γ делит треугольник Π на две части: часть $\Pi_+(\gamma)$, ограниченную γ и $\partial\Pi_+$ (в данном случае $\partial\Pi_+$ является гипотенузой треугольника Π), и часть $\Pi_-(\gamma)$, ограниченную γ и $\partial\Pi_-$ (две другие стороны треугольника). Разрежем $\Pi_+(\gamma)$ на вертикальные полосы ширины 1. Заметим, что самая правая полоса является примитивным треугольником. Заполним каждую из оставшихся полос максимально возможным количеством примитивных параллелограммов и поместим в оставшуюся часть полосы два примитивных треугольника (см. рис. 1(b)). Затем разобьем $\Pi_-(\gamma)$ на полосы, имеющие угловой коэффициент 1 и горизонтальную ширину 1. Вставим в каждую из полос максимально возможное количество примитивных параллелограммов. Это дает разбиение наклонных полос, расположенных выше прямой $y = x$. Что касается полос ниже прямой $y = x$, поместим в оставшуюся часть каждой из них примитивный треугольник (см. рис. 1(b)).

Количество вышеописанных γ -согласованных разбиений многоугольника Π равно

$$M_n \geq \prod_i \frac{y_i! (y_i + 1)!}{2^{y_i}} \cdot \prod_i y_i!, \quad (6)$$

где первое произведение соответствует разбиениям многоугольника $\Pi_+(\gamma)$, а второе – разбиениям многоугольника $\Pi_-(\gamma)$.

Все построенные разбиения нодальны и нечетны (см. определения в [3]), каждое из них дуально неприводимой тропической кривой и вносит вклад 1 в инвариант Вельшенже. Например, неприводимость легко доказывается с помощью следующего индукционного рассуждения. Будем сканировать разбиение вертикальными прямыми справа налево. Самый правый фрагмент тропической кривой дуален примитивному треугольнику $\Pi \cap \{x \geq n-1\}$ и, значит, неприводим. На i -м шаге, $i > 0$, мы рассматриваем неприводимые компоненты кривой, дуальной объединению элементов разбиения, пересекающих полосу $n-i-1 < x < n-i$. Каждая из этих неприводимых компонент или соединяет прямые $x = n-i-1$ и $x = n-i$, или содержит фрагмент,

дуальный треугольнику со стороной на $x = n - i$, или содержит фрагмент, дуальный наклонному параллелограмму. Таким образом, каждая компонента соединяется с кривой, дуальной разбиению треугольника $\Pi \cap \{x \geq n - i\}$.

В силу предложения 2.5 из [3], каждое построенное выше разбиение вносит вклад 1 в инвариант Вельшенже, и, в соответствии с предложением 2.6 из [3], при нашем выборе функции λ^0 прочие согласованные разбиения дают неотрицательный вклад. Следовательно, $W_n \geq M_n$, и остается проверить, что

$$\log M_n \geq 3n \log n + O(n).$$

Заметим для этой цели, что из определения координат x_i, y_i следуют неравенства $y_i \leq n - x_i \leq 2y_{i+1} + 1$. Они приводят к неравенствам

$$y_{i+1} \geq 2^{-i}(y_1 + 1) - 1 \geq \frac{n}{2^{i+1}} - 1,$$

где i меняется от 0 до $k \geq \lceil \log_2 n \rceil - 1$. Используя формулу Стирлинга

$$\log \Gamma(x) = x \log x + O(x), \quad x \rightarrow +\infty,$$

мы получаем необходимую оценку

$$\begin{aligned} \log \prod y_i! &\geq \sum_{i=1}^{\lceil \log_2(n) \rceil} \log \Gamma\left(\frac{n}{2^i} - 1\right) = \sum_{i=1}^{\lceil \log_2(n) \rceil} \frac{n}{2^i} \log \frac{n}{2^i} + O(n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2^i} \log n + O(n) = n \log n + O(n). \end{aligned}$$

2.5.2. Случай $\Sigma = Q$. Предположим, что $d_1 \geq d_2$. Зафиксируем n и рассмотрим линейную функцию λ^0 , введенную в п. 2.5.1. Положим $a = \lfloor nd_2/2 \rfloor$. В параллелограмме $\Pi = \Pi_{nD}$ построим, как показано на рис. 2, целочисленный λ^0 -допустимый путь γ , состоящий из отрезков целочисленной длины 1. Этот путь состоит: из последовательности горизонтальных отрезков, соединяющих $(0, nd_2)$ с $(a - 1, nd_2)$; зигзагообразной последовательности, соединяющей $(a - 1, nd_2)$ с $(nd_2, a - 1)$ (в этой зигзагообразной последовательности вертикальные отрезки чередуются с горизонтальными; она начинается с вертикального отрезка и заканчивается горизонтальным); зигзагообразной последовательности, соединяющей $(nd_2, a - 1)$ с $(nd_1 + nd_2 - a, a)$ (в этой зигзагообразной последовательности отрезки с угловым коэффициентом 1 чередуются с вертикальными отрезками; она начинается и заканчивается отрезками с угловым коэффициентом 1); и последовательности отрезков, соединяющей $(nd_1 + nd_2 - a, a)$ с $(nd_1 + nd_2, 0)$ и полученной параллельным переносом пути, который описан в п. 2.5.1

Рис. 2. Путь γ и γ -согласованные разбиения для $\Sigma = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

(в этом описании n следует заменить на a). Общая целочисленная длина пути γ равна $2n(d_1 + d_2) - 1 = c_1(Q) \cdot nD - 1$.

Выберем теперь некоторые специальные γ -согласованные разбиения параллелограмма Π , построенные согласно процедуре выдавливания, начиная с пути γ . А именно, разобьем $\Pi_+(\gamma)$ на вертикальные полосы ширины 1. Заполним каждую полосу максимально возможным количеством примитивных параллелограммов и поместим в оставшуюся часть один или два примитивных треугольника. Число этих треугольников равно двум, если полоса содержится в полуплоскости $x \geq nd_1$, и равно одному, если полоса лежит между вертикальными прямыми $x = nd_2$ и $x = nd_1$; полоса не содержит ни одного треугольника, если она содержится в полуплоскости $x \leq nd_2$.

Прямые $x = nd_2$ и $y = x - nd_2$ делят $\Pi_-(\gamma)$ на три части (см. рис. 2). Разобьем эти части следующим образом:

- левая часть разрезается на горизонтальные полосы высоты 1; каждая полоса заполняется примитивными параллелограммами и одним примитивным треугольником (см. рис. 2);
- центральная часть разрезается на полосы, имеющие угловой коэффициент 1 и горизонтальную ширину 1; каждая полоса заполняется примитивными параллелограммами;
- правая часть разрезается на такие же наклонные полосы; каждая полоса заполняется примитивными параллелограммами и одним примитивным треугольником (см. рис. 2).

Поскольку вклад в инвариант Вельшенже каждого из построенных разбиений равен 1, а всех прочих согласованных разбиений – неотрицателен, требуемая оценка получается теперь вычислениями, полностью аналогичными произведенным в п. 1.5.1.

2.5.3. Прочие случаи. Начнем с редукции случая $\Sigma = P_1$ к случаю $\Sigma = Q$. Разделим трапецию $\Pi = \Pi_{nD}$ вертикальной прямой $x = n(d - d_1)$ на прямоугольник Π_1 и треугольник Π_2 (см. рис. 3). В трапеции Π рассмотрим λ^0 -допустимые целочисленные пути γ вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

- γ_1 – произвольный целочисленный путь в Π_1 , который начинается в левом верхнем углу прямоугольника Π_1 , заканчивается в его правом нижнем углу, состо-

- ит из $2nd - 1$ отрезков целочисленной длины 1 и дополняется до γ_1 -согласованного разбиения прямоугольника Π_1 с положительным вкладом в инвариант Вельшенже;
- γ_2 – целочисленный путь, состоящий из $n(d - d_1)$ отрезков длины 1 и идущий вдоль нижней горизонтальной стороны треугольника Π_2 .

Рис. 3. Случай $\Sigma = P_1$

Поскольку путь γ_1 заканчивается в правом нижнем углу прямоугольника Π_1 , всякое γ_1 -согласованное разбиение прямоугольника Π_1 дополняется до γ -согласованного разбиения трапеции Π следующим образом. Разобьем Π_2 на вертикальные полосы ширины 1. Заполним каждую полосу максимально возможным количеством примитивных параллелограммов и поместим в оставшуюся часть каждой полосы один примитивный треугольник. Это может быть сделано $(n(d - d_1))!$ способами. Заметим, что если выбранное γ_1 -согласованное разбиение прямоугольника Π_1 двойственно неприводимой тропической кривой, то получающееся γ -согласованное разбиение трапеции Π тоже двойственно неприводимой тропической кривой. Следовательно, W_{nD} ограничено снизу числом $W_{Q, (nd_1, n(d-d_1))} \cdot (n(d - d_1))!$. Это дает требуемый результат в случае $\Sigma = P_1$.

Случай $\Sigma = P_2$ может быть подобным же образом сведен к случаю $\Sigma = Q$. Единственное отличие состоит в том, что Π разрезается на прямоугольник и трапецию. Случай $\Sigma = P_3$, в свою очередь, сводится к случаю $\Sigma = P_2$. $\square$

§ 3. Несколько результатов для случая данных, содержащих мнимые точки

В этом параграфе мы изучаем инварианты $W_{D,m}$, $m > 0$, торических поверхностей Дель Пешо, опираясь на результаты статьи [9].

3.1. Примеры вычисления инварианта Вельшенже.

1. Плоские рациональные кубики, интерполирующие фиксированные $3d - 1 = 8$ точек, все лежат в одном линейном пучке. Интегрирование по эйлеровой характеристике вдоль пучка дает **линейную** функцию

$$W_{3,m} = 8 - 2m, \quad 0 \leq m \leq 4.$$

Отметим, что при любом $0 \leq m \leq 4$ число $R_{3,m}(\mathbf{w})$ вещественных рациональных кубик достигает значения $W_{3,m}$ для подходящего общего набора $\mathbf{w} \in \Omega_{r,m}$. Например, пучок, порожденный кривыми $x(x^2 + y^2 + z^2) + \varepsilon y^3$ и $y(x^2 + y^2 + z^2) - \varepsilon x^3$, где ε достаточно мало, имеет 8 мнимых неподвижных точек и не содержит вещественных рациональных кубик (для проверки этого свойства достаточно заметить, что, когда t вещественно, многочлен $y^3 - tx^3$ не может обнуляться ни в одной из точек пересечения кривых $x + ty = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 0$).

2. Для вычисления инварианта Вельшенже плоских квартик и квинтик мы пользуемся бирациональными преобразованиями и формулой “пересечения стенок” Вельшенже (см. [12; теорема 2.2]), которая представляет первую разность функции $m \mapsto W_{\Sigma,D,m}$ в виде удвоенного инварианта Вельшенже поверхности Σ , раздутой в одной вещественной точке. Для плоских квартик ($\Sigma = \mathbb{P}^2$, $D = 4L$) мы получаем систему разностных уравнений

$$\begin{aligned}\Delta^2 W_{4,m} &= 4W_{3,m} = 4(8 - 2m), \\ -\Delta^1 W_{4,m}|_{m=0} &= 2W_{P^1 \times P^1, D=(2,3), m=0} = 2 \cdot 48 = 96, \\ W_{4,m}|_{m=0} &= 240\end{aligned}$$

(два последних значения получены вычислением по алгоритму, описанному в [6], [8], см. также [3]). Для плоских квинтик мы аналогично получаем

$$\begin{aligned}-\Delta^3 W_{5,m} &= 8W_{4,m}, \\ \Delta^2 W_{5,m}|_{m=0} &= 4W_{P^1 \times P^1, D=(3,3), m=0} = 4 \cdot 1086, \\ -\Delta^1 W_{5,m}|_{m=0} &= 2W_{P^2(1), D=(5,2), m=0} = 9168, \\ W_{5,m}|_{m=0} &= 18264.\end{aligned}$$

Таким образом, для плоских квартик инварианты Вельшенже принимают значения

m	0	1	2	3	4	5
W	240	144	80	40	16	0

которые интерполируются многочленом степени три

$$W_{4,m} = -\frac{4}{3}m(m-1)(m-2) + 16m(m-1) - 96m + 240.$$

Для плоских квинтик инварианты принимают значения

m	0	1	2	3	4	5	6	7
W	18264	9096	4272	1872	744	248	64	64

которые интерполируются многочленом степени шесть

$$\begin{aligned} W_{5,m} = & \frac{4}{45}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5) \\ & - \frac{32}{15}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) + 32m(m-1)(m-2)(m-3) \\ & - 320m(m-1)(m-2) + 2172m(m-1) - 9168m + 18264. \end{aligned}$$

В этих двух случаях, $d = 4$ и 5 , степень интерполирующего многочлена оказывается меньше степени, отвечающей общей интерполяционной таблице, т.е. меньше, чем $\lceil \frac{3d-1}{2} \rceil$. Заметим, что это уже не так начиная с $d = 6$.

3. Инварианты Вельшенже для кривых бистепени $(d, 2)$ на $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ тоже могут быть вычислены явно. В этом случае число m пар мнимых точек принимает значения от 0 до $d + 1$, и формула “пересечения стенок” Вельшенже записывается в виде

$$\Delta^1 W_{(d+1,2),m} = -2W_{(d,2),m}, \quad 0 \leq m \leq d. \quad (7)$$

Решение этого разностного уравнения однозначно восстанавливается, например, по начальным значениям $W_{(1,2),m} = 1$, $0 \leq m \leq 2$, и последовательности $W_{(d,2),d+1}$, $d \geq 1$. Мы утверждаем, что

$$W_{(d,2),d+1} = \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor \cdot 2^{d-1}, \quad d \geq 1, \quad (8)$$

и доказываем эту формулу в п. 3.3.3. Отсюда по индукции получаются все остальные значения:

$$W_{(d,2),m} = (d+m) \cdot 2^{2d-2-m}, \quad 0 \leq m \leq d.$$

Для сравнения, $W_{(2,d),0} = d \cdot 2^{2d-2}$ и, согласно [1], $N_{(2,d)} = d(d+1) \cdot 2^{2d-3}$.

3.2. Два общих результата. Вышеприведенные вычисления инвариантов Вельшенже приводят к следующей гипотезе. Мы формулируем ее для инвариантов Вельшенже, определенных в более общей ситуации, чем та, которая рассматривается в данной статье (см. [11], [12], а также замечание в разделе 2.2).

ГИПОТЕЗА 6. Пусть Σ – торическая поверхность, снабженная тавтологической вещественной структурой, и D – обильный дивизор на Σ . Инварианты Вельшенже $W_{D,m}$ положительны при $m < [(c_1(\Sigma) \cdot D - 1)/2]$, неотрицательны при $m = [(c_1(\Sigma) \cdot D - 1)/2]$ и удовлетворяют соотношению монотонности

$$W_{D,m-1} \geq W_{D,m} \quad \text{при} \quad m \geq 1.$$

Эта гипотеза подкрепляется следующими частичными результатами.

ТЕОРЕМА 7. Пусть Σ – одна из поверхностей $\mathbb{P}^2$, P_1 , P_2 и P_3 , снабженных тавтологической вещественной структурой, D – обильный дивизор на Σ и m – положительное целое число, не превосходящее $(c_1(\Sigma) \cdot D - 1)/2$. Инварианты $W_{\Sigma,D,m}$ положительны для $m \leq 3$ в случае $\Sigma = \mathbb{P}^2$ и для $m \leq 2$ в случае $\Sigma = P_k$, $k = 1, 2, 3$. Кроме того,

$$\log W_{\Sigma,nD,m} = \log N_{\Sigma,nD} + O(n)$$

для $m \leq 3$ в случае $\Sigma = \mathbb{P}^2$ и для $m \leq 2$ в случае $\Sigma = P_k$, $k = 1, 2, 3$. К тому же, если Σ – одна из поверхностей $\mathbb{P}^2$, P_1 и P_2 , и проекции многоугольника Π_D (см. раздел 2.1) на координатные оси имеют длины не меньшие трех, то

$$W_{\Sigma,D,0} > W_{\Sigma,D,1} > W_{\Sigma,D,2}.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть поверхность $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ снабжена тавтологической вещественной структурой и D – дивизор поверхности Q , имеющий бистепень (d_1, d_2) с положительными d_1, d_2 . Тогда для любого целого числа m , удовлетворяющего неравенствам $1 \leq m < d_1 + d_2$, инвариант Вельшенже $W_{Q,D,m}$ положителен. Далее, пусть целочисленная последовательность $m(n)$, $n \geq 1$, удовлетворяет условиям

$$m(n) = \mu n + \psi(n), \quad 0 \leq m(n) < (d_1 + d_2)n,$$

где μ – некоторое вещественное число и $\psi(n)$ – вещественная последовательность такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n)/n = 0$. Тогда

$$\log W_{Q,nD,m(n)} \geq (2d_1 + 2d_2 - \mu)n \log n + O(n + \psi(n) \log n).$$

3.3. Доказательство теорем 7 и 8. В пп. 3.3.1 и 3.3.2 мы обозначаем символом $\Pi = \Pi_D$ один из целочисленных многоугольников, введенных в разделе 1.1, и считаем фиксированным неотрицательное целое число m , удовлетворяющее ограничению $2m \leq r = c_1(\Sigma) \cdot D - 1$.

3.3.1. Схема подсчета. Здесь мы кратко описываем способ вычисления $W_{D,m}$, разработанный в [9] (наши обозначения слегка отличаются от принятых в [9]: там $m = r''$ (число мнимых пар в заданном наборе точек) и $r - 2m = r'$ (число вещественных точек)).

Возьмем линейную функцию $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, инъективную на множестве $\Pi \cap \mathbb{Z}^2$, и зафиксируем подмножество $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, r - m\}$, состоящее из m элементов. Вычисление опирается на следующее построение некоторых разбиений многоугольника Π на треугольники и параллелограммы.

Пусть p, q – вершины многоугольника Π такие, что

$$\lambda(p) = \min \lambda(\Pi), \quad \lambda(q) = \max \lambda(\Pi).$$

Целочисленный путь $\gamma \subset \Pi$ называется $(\lambda, \mathcal{J})$ -допустимым, если он имеет $r - m + 1$ вершину $v_0, \dots, v_{r-m}$ такую, что

$$v_0 = p, \quad v_{r-m} = q, \quad \lambda(v_i) < \lambda(v_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, r - m - 1,$$

и его $r - m$ ребер $\sigma_i = [v_{i-1}, v_i], i = 1, \dots, r - m$, удовлетворяют следующим условиям:

- если $i \notin \mathcal{J}$, то целочисленная длина $|\sigma_i|$ ребра σ_i нечетна,
- если $i \in \mathcal{J}$, то либо эта длина четна, либо существует целая точка $v \in \Pi \setminus \sigma_i$, удовлетворяющая неравенствам $\lambda(v_{i-1}) < \lambda(v) < \lambda(v_i)$.

Зафиксируем $(\lambda, \mathcal{J})$ -допустимый целочисленный путь $\gamma \subset \Pi$. Следующая рекурсивная процедура описывает γ -согласованные разбиения многоугольника Π .

Сначала для каждого ребра $\sigma_i, i \in \mathcal{J}$, нечетной целочисленной длины выберем целую точку $v'_i \in \Pi \setminus \sigma_i$ такую, что $\lambda(v_{i-1}) < \lambda(v'_i) < \lambda(v_i)$ и длины отрезков $[v_{i-1}, v'_i], [v'_i, v_i]$ нечетны. Затем положим

$$S_0 = \gamma \cup \bigcup_i T_i,$$

где T_i – треугольник с вершинами v_{i-1}, v'_i, v_i , и обозначим через τ_0 разбиение множества S_0 на отрезки σ_j и треугольники T_i . Положим также

$$W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau_0) = (-1)^a \prod_i |T_i|,$$

где a – число внутренних целых точек в S_0 и $|T_i|$ – целочисленная (т.е. удвоенная евклидова) площадь треугольника T_i .

Вслед за тем мы строим последовательность стягиваемых множеств $S_k \subset \Pi, k \geq 0$, снабженных разбиениями τ_k на целочисленные отрезки, треугольники и параллелограммы, и числами $W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau_k)$, применяя по индукции следующие правила:

- если S_k выпукло, то мы заканчиваем построение,
- если S_k невыпукло, то среди вершин v разбиения τ_k таких, что v является общей вершиной ребер σ' и σ'' , ограничивающих угол $< \pi$ вне S_k , мы выбираем вершину с наименьшим значением функции λ ,
- затем мы выбираем одну из двух возможностей: или берем параллелограмм $P \subset \Pi$, построенный на ребрах σ' и σ'' , и полагаем

$$S_{k+1} = S_k \cup P, \quad W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau_{k+1}) = W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau_k),$$

или берем треугольник T со сторонами σ' и σ'' , за исключением ситуации, в которой $|\sigma'|$ и $|\sigma''|$ нечетны, а третья сторона треугольника T имеет четную длину, и полагаем

$$S_{k+1} = S_k \cup T, \quad W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau_{k+1}) = W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau_k) \cdot (-1)^{a(T)} \cdot A(T), \quad (9)$$

где

$$a(T) = \begin{cases} \#(\text{Int}(T) \cap \mathbb{Z}^2) + 1, & \text{если } |\sigma'| \text{ и } |\sigma''| \text{ четны,} \\ \#(\text{Int}(T) \cap \mathbb{Z}^2) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$A(T) = \begin{cases} 1, & \text{если } |T| \text{ нечетна,} \\ |T| |\sigma'|^{-1}, & \text{если } |\sigma'| \text{ четна и } |\sigma''| \text{ нечетна,} \\ 2|T|(|\sigma'| |\sigma''|)^{-1}, & \text{если } |\sigma'| \text{ и } |\sigma''| \text{ четны,} \end{cases}$$

– если же ни одна из вышеописанных возможностей не реализуема, мы заканчиваем построение.

Если эта процедура (выдавливания) заканчивается множеством $S_k = \Pi$, то разбиение τ_k , к которому она приводит, является выпуклым, т.е. состоит из областей линейности некоторой выпуклой кусочно-линейной функции $\nu: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$. Такое разбиение дуально простой тропической кривой (см. [7], [9]). Если эта кривая неприводима и если, кроме того, ребра разбиения τ_k , лежащие на $\partial\Pi$, имеют целочисленные длины ≤ 2 , то τ_k называется γ -согласованным разбиением многоугольника Π . Заметим, что множества $S_0, \dots, S_k$ однозначно восстанавливаются по $\mathcal{J}$, γ и τ_k .

Основной результат работы [9] утверждает, что

$$W_{D,m} = \sum_{\gamma, \tau} W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau), \quad (10)$$

где γ пробегает все $(\lambda, \mathcal{J})$ -допустимые целочисленные пути в Π и τ пробегает все γ -согласованные разбиения многоугольника Π .

Число $W_{\lambda, \mathcal{J}}(\gamma, \tau)$ называется *коэффициентом Вельшенже* разбиения τ .

В дальнейшем ребра четной целочисленной длины и треугольники, у которых все стороны имеют четную целочисленную длину, называются *четными*. Ребра нечетной целочисленной длины называются *нечетными*.

3.3.2. Распространение четных ребер и формула знаков. Пусть, как и в разделе 2.5, $\lambda^0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, определенная формулой $\lambda^0(i, j) = i - \varepsilon j$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малая константа. Зафиксируем $(\lambda^0, \mathcal{J})$ -допустимый целочисленный путь $\gamma \subset \Pi$.

Заметим, что каждая невертикальная сторона многоугольника Π параллельна вектору $(1, s)$ с $s = 0, \pm 1$. Все леммы этого пункта, в действительности, верны и для более общих многоугольников, а именно для многоугольников, невертикальные стороны которых имеют **целые угловые коэффициенты**, т.е. параллельны векторам $(1, s)$ с $s \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 9. Если $\sigma = [(i, j), (i', j')]$, где $i' \geq i$, является ребром γ -согласованного разбиения Π , то

$$i' - i \leq \begin{cases} 1, & \text{если } |\sigma| \text{ нечетно,} \\ 2, & \text{если } |\sigma| \text{ четно.} \end{cases} \quad (11)$$

В частности, в любом γ -согласованном разбиении

- каждый треугольник имеет вертикальную сторону;
- треугольники, имеющие нечетную сторону, не содержат внутренних целых точек;
- любой треугольник с четной невертикальной стороной четен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все три утверждения о треугольниках следуют из утверждения про ребра. Оно, в свою очередь, следует из того, что целочисленные длины граничных ребер γ -согласованного разбиения не превосходят 2. Действительно, если $\sigma \not\subset \partial\Pi$, рассмотрим максимальное k такое, что $\sigma \subset \partial S_k$ (см. построение в п. 3.3.1). Тогда S_{k+1} получается из S_k добавлением треугольника или параллелограмма, построенных на σ и смежном с ним ребре. Таким образом, ∂S_{k+1} содержит ребро, горизонтальная проекция которого не короче горизонтальной проекции ребра σ и которая, в соответствии с правилами выдавливания, имеет ту же четность, что и ребро σ . $\square$

Мы говорим, что неvertикальные ребра $\sigma^1, \dots, \sigma^l$, принадлежащие γ -согласованному разбиению τ многоугольника Π , образуют *цепочку*, если для любого $1 \leq j \leq l-1$ ребра σ^j и σ^{j+1} являются или параллельными ребрами параллелограмма разбиения τ , или сторонами одного треугольника разбиения τ , не входящего в S_0 (см. п. 3.3.1). Если σ^l содержится в границе многоугольника Π , то цепочка $\sigma^1, \dots, \sigma^l$ называется *убегающей цепочкой* ребра σ^1 .

ЛЕММА 10. Пусть τ является γ -согласованным разбиением многоугольника Π . Тогда

- всякое неvertикальное ребро σ_i пути γ с $i \notin \mathcal{J}$ имеет ровно две убегающие цепочки;
- всякое неvertикальное четное ребро пути γ имеет ровно две убегающие цепочки;
- всякая неvertикальная сторона любого из треугольников в S_0 имеет ровно одну убегающую цепочку;
- четность ребер в любой убегающей цепочке постоянна;
- если убегающая цепочка $\sigma^1, \dots, \sigma^l$ ребра σ^1 такова, что ребра σ^j с $j > 1$ не содержатся в γ , то угловые коэффициенты ребер в цепочке не возрастают;
- убегающие цепочки различных ребер, принадлежащих S_0 , не пересекаются, и любое неvertикальное ребро разбиения τ принадлежит убегающей цепочке некоторого ребра, принадлежащего S_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения без труда выводятся из правил выдавливания и леммы 9. $\square$

ЛЕММА 11. Пусть τ является γ -согласованным разбиением многоугольника Π . Тогда выполняется следующая формула знаков:

$$\text{sign } W_{\lambda^0, \mathcal{J}}(\gamma, \tau) = (-1)^{\sum s(\sigma)},$$

где σ пробегает все четные неvertикальные ребра пути γ и $s(\sigma)$ обозначает разность угловых коэффициентов последних ребер двух убегающих цепочек ребра σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 9, треугольники нечетной целочисленной площади не содержат внутренних целых точек. Число же внутренних целых точек четного треугольника равняется половине целочисленной длины его вертикальной стороны минус 1, поскольку длина горизонтальной проекции неvertикальной четной стороны равна 2. Теперь требуемое утверждение следует из (9). $\square$

Обозначим через $s_{\min}$ минимальный угловой коэффициент непертикальных сторон многоугольника Π .

ЛЕММА 12. Пусть τ является γ -согласованным разбиением многоугольника Π . Тогда угловой коэффициент любого непертикального ребра разбиения τ не меньше чем $s_{\min}$. Более того, угловой коэффициент любого непертикального ребра σ_i пути γ с $i \notin \mathcal{J}$ и любого четного непертикального ребра пути γ не меньше чем $s_{\min} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения непосредственно вытекают из леммы 10. Действительно, непертикальное ребро разбиения τ с угловым коэффициентом $< s_{\min}$ не имеет убегающей цепочки. Если ребро, упомянутое во втором утверждении, имеет угловой коэффициент $s_{\min}$, то обе убегающие цепочки этого ребра состоят из параллельных ребер. Следовательно, в этом случае соответствующая тропическая кривая приводима. $\square$

3.3.3. Пример. В качестве примера применения схемы вычисления, изложенной в п. 3.3.1, мы находим значение инварианта Вельшенже $W_{(2,d),d+1} = W_{D,d+1}$ для дивизоров D бистепени $(2, d)$, $d \geq 1$, на поверхности $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Представим линейную систему $|D|$ прямоугольником Π с вершинами $(0, 0)$, $(d, 0)$, $(d, 2)$, $(2, 2)$ и выберем $\mathcal{J} = \{2, \dots, d+2\} \subset \{1, \dots, d+2\}$. Рассмотрим произвольный $(\lambda^0, \mathcal{J})$ -допустимый целочисленный путь γ , порождающий γ -согласованное разбиение прямоугольника Π , и обозначим последовательные $d+2$ ребра пути γ через σ_i , $1 \leq i \leq d+2$. Поскольку $1 \notin \mathcal{J}$, ребро σ_1 нечетно. Тогда, как следует из леммы 12, ребро σ_1 должно быть вертикальным и потому имеет целочисленную длину 1. Лемма 12 также влечет, что каждое из оставшихся ребер σ_i , $2 \leq i \leq d+2$,

- имеет целочисленную длину 1 и угловой коэффициент 0 или 1, а также может быть дополнено до треугольника целой площади 1 (как в построении множества S_0 , п. 3.3.1)

или

- имеет целочисленную длину 2 и либо вертикально, либо имеет угловой коэффициент 1.

Следовательно, γ начинается с последовательности отрезков целочисленной длины 1, как показано на рис. 4(е); эта последовательность оканчивается на верхней стороне прямоугольника Π . С другой стороны, общая целочисленная длина пути γ равна $d+2$ и его вектор перемещения равен $(d, -2)$; отсюда следует, что γ содержит ровно одно ребро целочисленной длины 1 с угловым коэффициентом 1 и что число вертикальных четных ребер на единицу больше числа наклонных четных ребер. Кроме того, четное ребро не может ни предшествовать горизонтальному ребру длины 1, ни следовать за таким ребром, так как иначе разбиение содержало бы либо нечетное ребро с горизонтальной проекцией длины 2, либо ребро с отрицательным угловым коэффициентом (см. рис. 4(а)–(д)). Таким образом, для γ остаются лишь возможности, показанные на рис. 4(е), где $0 \leq k \leq (d-1)/2$.

Такой путь γ допускает 2^{d-2k-1} способов расширения до множества S_0 : к каждому горизонтальному ребру можно присоединить треугольник снизу или сверху (см.

Рис. 4. Вычисление инварианта $W_{(2,d),d+1}$

рис. 4(е)). Дальнейшее расширение множества S_0 до γ -согласованного разбиения прямоугольника Π единственно. В результате, $\Pi \cap \{x \leq d - 2k\}$ оказывается покрытым параллелограммами, треугольниками целочисленной площади 1 и одним треугольником целочисленной площади 2, а $\Pi \cap \{x \geq d - 2k\}$ – треугольниками целочисленной площади 4. Коэффициент Вельшенже такого разбиения равен 2^{2k} . Следовательно,

$$W_{(2,d),d+1} = \sum_{0 \leq k \leq (d-1)/2} 2^{d-2k-1} \cdot 2^{2k} = \left[\frac{d+1}{2} \right] \cdot 2^{d-1}.$$

3.3.4. Доказательство теоремы 7. Сначала мы доказываем утверждение о положительности. Точнее, мы показываем, что при определенном выборе множества $\mathcal{J}$ коэффициенты Вельшенже всех согласованных разбиений положительны.

Предположим, что $(\lambda^0, \mathcal{J})$ -допустимый целочисленный путь γ содержит не более одного четного ребра. Тогда любое γ -согласованное разбиение τ не содержит четных треугольников. Поскольку же, согласно лемме 9, в таком разбиении τ треугольники с нечетным ребром не имеют целых внутренних точек, положительность коэффициентов Вельшенже всех γ -согласованных разбиений следует из формулы (9) Это рассуждение покрывает случай $m = 1$.

Пусть $m = 2$. Положим $\mathcal{J} = \{1, r - m\}$ и предположим, что $(\lambda^0, \mathcal{J})$ -допустимый целочисленный путь γ имеет в точности два четных ребра (остальные случаи покрыты предыдущим рассуждением). Тогда первое и последнее ребра пути γ являются четными. Обозначим их через l_1 и l_2 . Пусть τ – некоторое γ -согласованное разбиение многоугольника Π , имеющее отрицательный коэффициент Вельшенже. Тогда τ содержит ровно один четный треугольник T . Две стороны треугольника T являются параллельными переносами ребер l_1 и l_2 , а третья сторона неперпендикулярна. Отсюда следует, что либо l_1 , либо l_2 вертикально и, значит, лежит на границе многоугольника Π . Кроме того, ребра убегющих цепочек неперпендикулярного ребра l_i принадлежат треугольнику T и некоторым параллелограммам (см., например, рис. 5(а)). Поэтому от тропической кривой, дуальной разбиению τ , отщепляется компонента, составленная из трех лучей с общей вершиной. Это противоречит согласованности разбиения τ (напомним, что неприводимость дуальной тропической кривой является одним из условий согласованности).

Рис. 5. Фрагменты допустимых путей для малых m Рис. 6. Путь γ для $\Sigma = \mathbb{P}^2$ и $m = 2$

Пусть $m = 3$ и $\Sigma = \mathbb{P}^2$. Положим $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим $(\lambda^0, \mathcal{J})$ -допустимый путь γ и предположим, что некоторое γ -согласованное разбиение τ имеет отрицательный коэффициент Вельшенже. В силу леммы 11, путь γ имеет одно или три невертикальных четных ребра. В последнем случае разбиение τ не содержит четных треугольников, и, в соответствии с леммой 9 и формулой (9), коэффициент Вельшенже разбиения τ должен быть неотрицательным. Следовательно, γ содержит ровно одно четное невертикальное ребро. Допустим, что первое ребро пути γ нечетно. Согласно леммам 9 и 12, это ребро имеет целочисленную длину 1 и угловой коэффициент -1 ; см. рис. 5(b). Соответствующий треугольник T множества S_0 имеет вертикальную и горизонтальную стороны. Из леммы 10 следует, что все ребра убегающей цепочки го-

горизонтальной стороны треугольника T параллельны. Таким образом, в этом случае от дуальной тропической кривой отщепляется компонента. Предположим теперь, что первое ребро пути γ четно. В силу леммы 12, этот отрезок вертикален. К тому же, он имеет длину 2. Если второе ребро пути γ нечетно, то те же рассуждения, что и в случае $m = 2$, доказывают приводимость тропической кривой, дуальной разбиению τ . Предположим, что второе ребро пути γ четно. Если оно не вертикально, то, в соответствии с леммой 12, оно горизонтально, и вновь от тропической кривой отщепляется компонента (см. рис. 5(а)). Таким образом, остается рассмотреть случай, когда три первых ребра пути γ имеют целочисленную длину 2, первые два ребра вертикальны, а третье – не вертикально. Согласно лемме 12, третье ребро или горизонтально, или имеет угловой коэффициент 1; см. рис. 5(с), (d). В случае горизонтального третьего ребра от тропической кривой отщепляется компонента, а в случае наклонного третьего ребра это ребро не может породить убегающую цепочку в направлении нижней стороны треугольника Π .

Асимптотические формулы теоремы 7 доказываются небольшой модификацией построений, используемых в доказательстве теоремы 3 (раздел 2.5). Например, если $m = 3$ и $\Sigma = \mathbb{P}^2$, то мы начинаем целочисленный путь с двух вертикальных ребер $[(0, d), (0, d-2)]$ и $[(0, d-2), (0, d-4)]$ длины 2, берем третье ребро $[(0, d-4), (1, d-2)]$ целочисленной длины 1 и пристраиваем треугольник с вершинами $(0, d-4)$, $(1, d-2)$ и $(1, d-1)$ (см. рис. 6), а затем продолжаем путь, как описано в доказательстве теоремы 3.

Заключительное утверждение теоремы 7 следует из формулы “пересечения стенок” Вельшенже и положительности инварианта Вельшенже для P_1 , P_2 и P_3 с линейной системой, отвечающей многоугольнику $\Pi_D \setminus \{x + y < 2\}$. $\square$

3.3.5. Вспомогательная оценка. Следующая лемма доказывается точно так же, как и теорема 3.

ЛЕММА 13. *Имеет место неравенство*

$$\log W_{Q,D,0} \geq 2(d_1 + d_2) \log d_1 + O(d_1 + d_2), \quad \min\{d_1, d_2\} \rightarrow +\infty,$$

где D – дивизор бистепени (d_1, d_2) на $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. $\square$

3.3.6. Доказательство теоремы 8. Будем доказывать оба утверждения, положительность и нижнюю оценку, одновременно.

Фиксируем целое число $n \geq 1$. В этом доказательстве линейная система $|nD|$ представляется прямоугольником Π с вершинами $(0, 0)$, $(nd_1, 0)$, (nd_1, nd_2) , $(0, nd_2)$. Согласно лемме 11, для любого $m(n)$ -элементного подмножества $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, 2(nd_1 + nd_2) - 1 - m(n)\}$ и любого $(\lambda^0, \mathcal{J})$ -допустимого пути γ в Π все γ -согласованные разбиения имеют положительные коэффициенты Вельшенже. Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно построить подходящее количество согласованных разбиений.

Наше построение разветвляется на несколько случаев. Мы используем тот факт, что, как следует из леммы 12, если $1 \notin \mathcal{J}$, то первое ребро любого $(\lambda^0, \mathcal{J})$ -допустимого пути, порождающего согласованное разбиение, вертикально.

Рис. 7. Случай четных nd_1 и nd_2

Предположим сначала, что $m(n) = nd_1 + nd_2 - 1$, и положим $\mathcal{S} = \{2, \dots, m(n) + 1\}$.

Если nd_1 и nd_2 четны, мы рассматриваем пути вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где γ_1 состоит из трех ребер целочисленной длины 1 и выглядит так, как показано на рис. 7(a), а γ_2 получается гомотетией с коэффициентом 2 (и сдвигом) произвольного $(\lambda^0, \emptyset)$ -допустимого пути γ'_2 , отвечающего дивизорам бистепени $(nd_1/2 - 1, nd_2/2)$ и порождающего согласованное разбиение. Для получения множества S_0 мы добавляем примитивные треугольники ко второму и третьему ребрам пути γ_1 , как показано на рис. 7(b). После чего мы дополняем S_0 до γ -согласованных разбиений прямоугольника Π , которые начинаются с фрагмента, изображенного на рис. 7(c). А именно, вертикальная полоса ширины 2 под указанным фрагментом заполняется прямоугольниками 1×2 (т.е. ширины 1 и высоты 2), а оставшийся прямоугольник размера $(nd_1 - 2) \times nd_2$ заполняется удвоенными элементами γ'_2 -согласованных разбиений.

Рис. 8. Случай нечетного nd_1 и четного nd_2

Если nd_1 нечетно и nd_2 четно, мы рассматриваем пути вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где γ_1 состоит из двух ребер целочисленной длины 1 и выглядит так, как на рис. 8(a), а γ_2 получается гомотетией с коэффициентом 2 (и сдвигом) произвольного $(\lambda^0, \emptyset)$ -допустимого пути γ'_2 , отвечающего дивизорам бистепени $((nd_1 - 1)/2, nd_2/2)$ и порождающего согласованное разбиение. Для получения множества S_0 мы добавляем примитивный треугольник ко второму ребру пути γ_1 , как показано на рис. 8(b). После чего мы дополняем S_0 до γ -согласованных разбиений прямоугольника Π , которые начинаются с фрагмента, изображенного на рис. 8(c). А именно, вертикальная полоса ширины 1 под указанным фрагментом заполняется прямоугольниками 1×2 , а оставшийся прямоугольник размера $(nd_1 - 1) \times nd_2$ заполняется удвоенными элементами γ'_2 -согласованных разбиений.

Если nd_1 и nd_2 нечетны, мы полагаем $\mathcal{S} = \{1, \dots, m(n) - 2, m(n), m(n) + 1\}$ и рассматриваем пути вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где γ_2 состоит из трех ребер (двух ребер целочисленной длины 1 и одного ребра целочисленной длины 2) и выглядит

Рис. 9. Случай нечетных nd_1 и nd_2

так, как показано на рис. 9(a), а γ_1 получается гомотетией с коэффициентом 2 (и сдвигом) произвольного $(\lambda^0, \emptyset)$ -допустимого пути γ'_1 , отвечающего дивизорам бистепени $((nd_1 - 1)/2, (nd_2 - 1)/2)$ и порождающего согласованное разбиение. Для получения множества S_0 мы добавляем примитивный треугольник ко второму ребру пути γ_2 , как показано на рис. 9(b). После чего мы следующим образом дополняем S_0 до γ -согласованных разбиений прямоугольника Π : мы помещаем удвоенные элементы γ'_1 -согласованных разбиений в прямоугольник с вершинами $(0, 1)$, $(nd_1 - 1, 1)$, $(nd_1 - 1, nd_2)$, $(0, nd_2)$; продолжаем фрагментом, изображенным на рис. 9(c); и заполняем полосы слева и над этим фрагментом прямоугольниками размера 2×1 и 1×2 соответственно.

Предположим теперь, что $m(n) < nd_1 + nd_2 - 1$, и положим $\mathcal{I} = \{j, j + 2, j + 3, \dots, j + m(n)\}$, где $j = 2(nd_1 + nd_2 - m(n)) - 1$.

Рис. 10. Случай нечетного $m(n)$

Если $m(n)$ нечетно, мы рассматриваем пути вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, где

- γ_1 является сдвигом произвольного $(\lambda^0, \emptyset)$ -допустимого пути γ'_1 , порождающего согласованное разбиение и отвечающего дивизорам неотрицательной бистепени $(nd_1 - 2b_1, nd_2 - 2b_2)$ с неотрицательными числами b_1 и b_2 такими, что $2b_1 + 2b_2 = m(n) + 1$,
- γ_2 состоит из четырех ребер целочисленной длины 1 и выглядит так, как показано на рис. 10(a),
- γ_3 получается гомотетией с коэффициентом 2 (и сдвигом) произвольного $(\lambda^0, \emptyset)$ -допустимого пути γ'_3 , порождающего согласованное разбиение и отвечающего дивизорам бистепени $(b_1 - 1, b_2)$.

Для получения множества S_0 мы добавляем примитивные треугольники ко второму и четвертому ребрам пути γ_2 , как показано на рис. 10(b). После чего мы следующим образом дополняем S_0 до γ -согласованных разбиений прямоугольника Π : переносим элементы γ'_1 -согласованных разбиений в прямоугольник с вершинами $(0, 2b_2)$, $(nd_1 - 2b_1, 2b_2)$, $(nd_1 - 2b_1, nd_2)$, $(0, nd_2)$; накладываем на γ_2 фрагмент, изображенный на рис. 10(c); помещаем удвоенные элементы γ'_3 -согласованных разбиений в прямоугольник с вершинами $(nd_1 - 2b_1 + 2, 0)$, $(nd_1, 0)$, $(nd_1, 2b_2)$, $(nd_1 - 2b_1 + 2, 2b_2)$; и заполняем оставшиеся части прямоугольниками размера 1×1 , 1×2 и 2×1 .

Если $m(n)$ четно, мы рассматриваем пути вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, где

- γ_1 является сдвигом произвольного $(\lambda^0, \emptyset)$ -допустимого пути γ'_1 , порождающего согласованное разбиение и отвечающего дивизорам неотрицательной бистепени $(nd_1 - 2b_1 - 1, nd_2 - 2b_2)$ с неотрицательными числами b_1 и b_2 такими, что $2b_1 + 2b_2 = m(n)$,
- γ_2 состоит из трех ребер целочисленной длины 1 и выглядит так, как показано на рис. 11(a),
- γ_3 получается гомотетией с коэффициентом 2 (и сдвигом) произвольного $(\lambda^0, \emptyset)$ -допустимого пути γ'_3 , порождающего согласованное разбиение и отвечающего дивизорам бистепени (b_1, b_2) .

Для получения множества S_0 мы добавляем примитивный треугольник ко второму ребру пути γ_2 , как показано на рис. 11(b). Дальнейшее построение γ -согласованных разбиений прямоугольника Π использует фрагмент, изображенный на рис. 11(c), и происходит так же, как описано в случае нечетного $m(n)$.

Рис. 11. Случай четного $m(n)$

Существование γ -согласованных разбиений влечет положительность инвариантов Вельшенже. Для доказательства требуемого асимптотического неравенства мы оцениваем снизу, с помощью леммы 13, число построенных разбиений. Например, в самом последнем случае мы берем числа b_i , $i = 1, 2$, близкими к $nd_i \cdot \frac{m(n)}{2n(d_1 + d_2)}$ и удовлетворяющими условиям построения и затем выводим из леммы 13 неравенства

$$\log W_{(nd_1 - 2b_1 - 1, nd_2 - 2b_2), 0} \geq (2nd_1 + 2nd_2 - 2\mu n) \log n + O(n + \psi(n) \log n),$$

если $\mu < d_1 + d_2$, и

$$\log W_{(b_1, b_2), 0} \geq \mu n \log n + O(n + \psi(n) \log n),$$

если $\mu > 0$. Учитывая положительность коэффициентов Вельшенже, мы получаем

$$\begin{aligned}\log W_{D,m(n)} &\geq \log W_{(nd_1-2b_1-1, nd_2-2b_2),0} + \log W_{(b_1,b_2),0} \\ &\geq (2d_1 + 2d_2 - \mu)n \log n + O(n + \psi(n) \log n).\end{aligned}$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Di Francesco, C. Itzykson. Quantum intersection rings // The Moduli Space of Curves (Texel Island, 1994). Boston, MA: Birkhäuser, 1995. P. 81–148. (Progr. Math. V. 129.)
- [2] L. Göttsche, R. Pandharipande. The quantum cohomology of blow-ups of $\mathbb{P}^2$ and enumerative geometry // J. Differential Geom. 1998. V. 48. № 1. P. 61–90.
- [3] I. Itenberg, V. Kharlamov, E. Shustin. Welschinger invariant and enumeration of real rational curves // Internat. Math. Res. Notices. 2003. V. 49. P. 2639–2653.
- [4] I. Itenberg, V. Kharlamov, E. Shustin. Appendix to “Welschinger invariant and enumeration of real rational curves” // arXiv: math.AG/0312142.
- [5] M. Kontsevich, Yu. Manin. Gromov–Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry // Comm. Math. Phys. 1994. V. 164. № 3. P. 525–562.
- [6] G. Mikhalkin. Counting curves via the lattice paths in polygons // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2003. V. 336. № 8. P. 629–634.
- [7] G. Mikhalkin. Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$ // arXiv:math.AG/0312530.
- [8] E. Shustin. Patchworking singular algebraic curves, non-Archimedean amoebas and enumerative geometry // arXiv: math.AG/0211278.
- [9] E. Shustin. A tropical calculation of the Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces // arXiv: math.AG/0406099.
- [10] O. Viro. Dequantization of real algebraic geometry on a logarithmic paper // Proceedings of the 3rd European Congress of Mathematicians (Barcelona, 2000). Vol. I. Basel: Birkhäuser, 2001. P. 135–146. (Progr. Math. V. 201.)
- [11] J.-Y. Welschinger. Invariants of real rational symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2003. V. 336. № 4. P. 341–344.
- [12] J.-Y. Welschinger. Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry // arXiv: math.AG/0303145.

Université Louis Pasteur et IRMA, Strasbourg, France;

Поступила в редакцию

Université Louis Pasteur et IRMA, Strasbourg, France;

27.07.2004

School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Israel

E-mail: itenberg@math.u-strasbg.fr, kharlam@math.u-strasbg.fr,

shustin@post.tau.ac.il