Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Лексин, О работах А. А. Болибруха по многомерным регулярным и фуксовым системам, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 151–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 09:42:08

УДК 517.952+517.956.8

**О РАБОТАХ А.А. БОЛИБРУХА ПО МНОГОМЕРНЫМ
РЕГУЛЯРНЫМ И ФУКСОВЫМ СИСТЕМАМ**

В. П. Лексин

В работе дан обзор основных достижений А.А. Болибруха в теории линейных мероморфных пфаффовых систем на комплексных многообразиях.

СОДЕРЖАНИЕ

Регулярные и фуксовы системы	152
Нормирования и показатели	154
Локальные критерии фуксовости регулярных систем	156
Глобальный критерий фуксовости регулярных систем. Неравенства Фукса	157
Контрпример к многомерной проблеме Римана–Гильберта и другие ре- зультаты	158
Перечень работ А.А. Болибруха по многомерным фуксовым системам .	160

Первые научные работы Андрея Андреевича были связаны с интегрируемыми регулярными и фуксовыми системами на многомерных комплексных многообразиях. Теорию этих систем А.А. начал изучать в 1974 г. по работам Р. Жерара, П. Делиня, Н. Катца, А.Х.М. Левеля и других авторов. В то время интерес к аналитическим системам дифференциальных уравнений на многомерных комплексных многообразиях и, в частности, к регулярным и фуксовым системам был стимулирован двумя обстоятельствами. Во-первых, к их изучению привела внутриматематическая логика развития классической теории гипергеометрических функций многих комплексных переменных. Во-вторых, появились надежды на возможные многообещающие приложения этой теории в теоретической физике. К тому времени физиками-теоретиками были описаны некоторые аналитические свойства, подобные свойствам гипергеометрических функций многих переменных, которыми обладают конечномерные фейнмановские интегралы, возникающие в рядах теории возмущений при разложении бесконечномерных функциональных интегралов Фейнмана, определяющих квантовый вариант какой-либо классической физической теории.

Хорошее изложение некоторых математических аспектов упомянутых физических работ было представлено в книге Ф. Фама “Введение в топологическое исследование особенностей Ландау” (М.: Мир, 1970). А.А. был хорошо знаком с этим направлением исследований еще до 1974 г. и интересовался им позже. В связи с этим через много

лет, уже в середине 90-х годов, по приглашению Ф. Фама, А.А. несколько семестров работал в университете Нишцы (Франция).

Обзор упомянутой тематики был также дан в свое время В.А. Голубевой в УМН (1976, т. 31, № 2). С начала 70-х годов В.А. развивала соображения, высказанные известными физиками-теоретиками, и привлекла внимание Андрея Андреевича к некоторым их аналитическим аспектам.

Основными достижениями первых работ А.А. [1]–[5] было создание локальной теории интегрируемых регулярных и фуксовых систем с особенностями на дивизорах с нормальными пересечениями и формулировка на ее основе локальных и глобальных критериев фуксовости для регулярных интегрируемых систем на многомерных комплексных многообразиях. В этих работах строится правильный аналог понятий и методов одномерной теории Левеля регулярных и фуксовых систем. Опыт, накопленный А.А. при создании многомерной теории фуксовых систем, сыграл решающую роль в получении ярких и неожиданных результатов, когда он в конце 80-х годов нашел отрицательное решение классической проблемы Римана–Гильберта.

Регулярные и фуксовы системы

Пусть M^n – эрмитово комплексное n -мерное многообразие. В качестве окрестностей точек $a \in M^n$ будут рассматриваться окрестности U , которые биголоморфно эквивалентны стандартным полидискам

$$D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < 1, i = 1, \dots, n\} = \prod_{i=1}^n D_i^1$$

с центром в начале координат $(0, \dots, 0)$ (D_i^1 – единичный круг с центром в 0 на i -й координатной прямой) и a отображается при этом в начало координат. Будем говорить о таких окрестностях U как о полидисках с центром в точке a .

Под дивизором с нормальными пересечениями в M^n понимается объединение особых комплексных подмногообразий коразмерности единица (называемых компонентами дивизора), которые пересекаются трансверсально (в частности, в одной точке пересекается не более чем n компонент).

По определению *регулярной системы* на комплексном многообразии M^n с особенностями на дивизоре A с нормальными пересечениями называется линейная интегрируемая мероморфная пфафхова система $dy = \omega y$ на M^n , решения которой имеют степенной рост во всех точках дивизора A . Здесь ω – матричная мероморфная 1-форма (называемая формой системы) с полюсами на A (необязательно первого порядка), голоморфная вне A . Интегрируемость системы означает полную интегрируемость в смысле Фробениуса, которая в случае линейных систем равносильна равенству $d\omega = \omega \wedge \omega$.

Пусть размеры матрицы ω будут $p \times p$ и вектор-функция $y(z)$ со значениями в $\mathbb{C}^p$ записывается столбцом из p строк.

Степенной рост решения системы $y(z)$ на дивизоре A означает, что относительно какой-либо нормы в $\mathbb{C}^p$ и стандартной (эрмитовой) нормы в полидиске D^n имеется степенная оценка роста вектор-функций $y(z)$ в любой точке $a \in A$ при приближении к ней по любому достаточно узкому открытому сектору с вершиной в a , в достаточно

малом открытом полидиске D^n с центром в a (точнее, рост мы рассматриваем в поднятии указанного сектора в универсальное накрытие дополнения $D^n \setminus A \cap D^n$). Сектор в стандартном полидиске с центром в начале координат считается достаточно узким, если его проекции на одномерные диски D_i^1 являются секторами конечного раствора с вершинами в нуле, не содержащими всего диска D_i^1 . Сам полидиск считается достаточно малым как окрестность точки a , если его пересекают только те компоненты дивизора, которые содержат точку a .

Регулярная система $dy = \omega y$ называется *фуксовой системой* с особенностями на дивизоре A , если форма системы ω имеет логарифмические полюсы первого порядка на A . По определению мероморфная форма ω имеет логарифмические полюсы первого порядка на A , если в некоторой достаточно малой окрестности U любой точки $a \in A$ существует система координат $(z_1, \dots, z_n)$ с началом в точке a , причем компоненты A_i дивизора A , содержащие точку a , определяются уравнениями $z_i = 0, i = 1, \dots, k, k \leq n$, а форма системы ω имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^k \frac{\omega_i(z) dz_i}{z_i} + \sum_{j=k+1}^n \omega_j(z) dz_j,$$

где $\omega_m(z), m = 1, \dots, n$, — голоморфные функции в окрестности U .

Как показал А.А., фуксовы системы с особенностями на дивизорах с нормальными пересечениями являются наиболее близким аналогом одномерных фуксовых систем как по формальному внешнему сходству, так и по существенным внутренним аналитическим свойствам пространств решений.

Для регулярных и фуксовых систем локальная теория строится на полидиске

$$D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < 1, i = 1, \dots, n\} = \prod_{i=1}^n D_i^1.$$

Особенности систем расположены на дивизоре $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где $A_i = \{z \in D^n \mid z_i = 0\}, i = 1, \dots, k$, для некоторого натурального числа $1 \leq k \leq n$. Основным техническим инструментом локальной теории многомерных регулярных и фуксовых систем, изложенной в работах [1]–[4], была правильная теория нормирований, а также ассоциированных, левелевских и слабо левелевских базисов в конечномерных инвариантных пространствах аналитических вектор-функций степенного роста на универсальном накрытии “проколотого” полидиска

$$\widehat{D}^n = D^n \setminus A = \prod_{i=1}^k D_i^1 \setminus \{0\} \times D^{n-k}.$$

Инвариантность означает инвариантность относительно действия группы скольжений на универсальном накрытии “проколотого” полидиска $\widehat{D}^n$.

Первая попытка перенесения теории Левеля одномерных регулярных и фуксовых систем на многомерный случай принадлежит Р. Жерару. Однако его определение нормирований, основного понятия в теории Левеля, в многомерном случае оказалось некорректным, что привело к неправильному описанию локальной структуры

фундаментальной матрицы решений фуксовой системы. Неточность состояла в использовании неправильного утверждения: если голоморфная функция $f(z_1, \dots, z_n)$ определена в “проколоте” полидиске

$$\widehat{D}^n = \prod_{i=1}^n (D_i^1 \setminus \{0\})$$

и мероморфна в начале координат $(0, \dots, 0)$, а также имеет нулевой предел $\lim_{z \rightarrow 0, z \in U} f(z_1, \dots, z_n) \prod z_i^{\varepsilon_i} = 0$ для $0 < \varepsilon_i < 1$ и произвольной комплексной прямой $U: z_i = tz_i^0, z_i^0 \neq 0, i = 1, \dots, n$, лежащей в $\widehat{D}^n$, то $f(z)$ голоморфна в начале координат. Именно А.А. обнаружил эту неточность в начале 1975 г., поэтому и говорилось выше о правильной теории нормирований и ассоциированных базисов в локальной теории регулярных и фуксовых систем.

В дальнейшем мы не будем различать в обозначениях координаты точек “проколоте” полидиска и координаты точек, лежащих над ними в универсальном накрытии. Во всех формулировках правильная трактовка выражений легко восстанавливается.

Нормирования и показатели

Теория нормирований, построенная А. Левелем и А. А. Болибрухом, представляет собой вариант теории неархимедовых нормирований полей для поля многозначных функций степенного роста на проколоте полидиске, с последующим распространением ее ослабленного варианта на вектор-функции. Вся изложенная в этом разделе многомерная теория была создана А.А. в работах [2], [3].

Итак, пусть V – конечномерное подпространство размерности p пространства вектор-функций степенного роста на универсальном накрытии “проколоте” полидиска

$$\widehat{D}^n = \prod_{i=1}^k D_i^1 \setminus \{0\} \times D^{n-k},$$

принимающих значения в $\mathbb{C}^p$. Предполагается, что V инвариантно относительно действия скольжениями фундаментальной группы $\pi_1(\widehat{D}^n, z_0) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (k раз) на универсальном накрытии. В работе [3] доказано следующее утверждение: пусть $y^i(z)$ – i -я компонента вектор-функции $y(z) \in V$; тогда ее можно представить в виде логарифмической суммы

$$y^i(z) = \sum_{\bar{j}, \bar{l}} g_{\bar{j}, \bar{l}}^i(z) z^{\rho_{\bar{j}}} \log^{b_{\bar{l}}} z,$$

где $\bar{j} = (j_1, \dots, j_k)$, $\bar{l} = (l_1, \dots, l_k)$ – мультииндексы и степени также мультииндексные; $g_{\bar{j}, \bar{l}}^i$ – сходящиеся ряды Лорана с конечной главной частью; ρ_{j_m} – комплексные числа с вещественной частью $0 \leq \operatorname{Re} \rho_{j_m} < 1$; b_{l_m} – неотрицательные целые числа; вся сумма конечна и подобные члены приведены.

Пусть $\varphi_m(g_{\bar{j}, \bar{l}}^i)$ – порядок нуля или полюса (со знаком минус) ряда $g_{\bar{j}, \bar{l}}^i$ по m -й координате, где $m = 1, \dots, k$.

Нормированием элемента $y(z) \in V$ по m -й координате в нуле называется целое число $\varphi_m(y(z)) = \min_{\bar{j}, \bar{l} \in \sigma, i=1, \dots, p} \varphi_m(g_{\bar{j}, \bar{l}}^i)$. Для нулевой функции значение нормирования полагается равным бесконечности по любой координате.

Пусть γ_m^* – действие на пространстве V образующей $\gamma_m \in \pi_1(\widehat{D}^n, z_0)$, отвечающей обходу по малой петле компоненты дивизора $A_m = \{z \in D^n \mid z_m = 0\}$. *Нормализованным логарифмом* собственного значения λ оператора γ_m^* назовем число $\rho = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda$, $0 \leq \operatorname{Re} \rho < 1$. Тогда пространство V разлагается в прямую сумму корневых подпространств операторов γ_m^* , $m = 1, \dots, k$, на каждом из которых каждое из нормирований принимает лишь конечное число значений с некоторыми кратностями (равными размерности подпространств в корневом пространстве, где нормирование постоянно). Сумма нормализованного логарифма собственного значения оператора γ_m^* , отвечающего собственному пространству из указанного разложения, и любого из m -х нормирований этого собственного пространства называется m -м показателем пространства V в нуле. Для пространства решений фуксовой системы m -е показатели являются собственными значениями матрицы $\omega_m(0)$. Здесь $\omega_m(z)$ – матрица-вычет формы системы ω на m -й компоненте ее дивизора особенностей. Сумма m -х показателей с кратностями обозначается через β_m и называется m -м показателем пространства V в нуле.

Аналогично можно определить m -е нормирования и m -е показатели пространства в любой точке $a \in A_m = \{z \in D^n \mid z_m = 0\}$.

Важное свойство m -х нормирований и m -х показателей состоит в том, что они не меняются вдоль A_m для любого m не только в полидиске, но и при глобальном рассмотрении дивизоров с нормальными пересечениями.

Нормирования обладают также следующими тремя свойствами (свойства 2) и 3) присущи нормированиям в полях):

- 1) $\varphi_m(\gamma_l^*(y)) = \varphi_m(y)$ (инвариантность при действии фундаментальной группы);
- 2) $\varphi_m(cy) = \varphi_m(y)$ для константы $c \neq 0$;
- 3) $\varphi_m(y_1 + y_2) \geq \min(\varphi_m(y_1), \varphi_m(y_2))$.

Для каждого $m = 1, \dots, n$ нормирование φ_m по m -й координате определяет фильтрацию пространства $V = V^s \supset V^{s-1} \supset \dots \supset V^1 \supset 0$, связанную с различными значениями $\psi_1 > \dots > \psi_s$ нормирования φ_m , а именно, $V^k = \{v \in V \mid \varphi_m(v) \geq \psi_k\}$. Кратностью значения нормирования ψ_k называется размерность фактор-пространства $d_k = \dim V^k / V^{k-1}$.

Базис $e = (e_1, \dots, e_p)$ в пространстве V называется *ассоциированным* по m -й координате, если нормирования φ_m принимают на нем все возможные свои значения $\{\psi_1, \dots, \psi_s$ с учетом их кратностей, то есть $d_1 + \dots + d_s = p$. Если ассоциированный базис $e = (e_1, \dots, e_p)$ согласован с фильтрацией V , определяемой нормированием φ_m по m -й координате, матрица оператора монодромии γ^* имеет в нем верхнетреугольный вид и нормирование φ_m не возрастает на $(e_1, \dots, e_p)$, т.е. $\varphi_m(e_i) \geq \varphi_m(e_{i+1})$, то такой базис называется *левелевским*. Если разложить пространство V в прямую сумму корневых подпространств оператора монодромии γ_m^* , то в каждом из этих подпространств можно относительно нормирования φ_m определить фильтрацию и левелевский базис. Базис называется *слабо левелевским* по m -й координате, если он является объединением левелевских базисов по m -й координате в корневых подпространствах оператора монодромии γ_m^* . Базис в пространстве V называется *ассоциированным, левелевским* или *слабо левелевским*, если он является таковым по каждой переменной.

Базис в пространстве V называется ассоциированным, если нормирования принимают на нем все возможные свои значения относительно каждой переменной, определяющей дивизор особенностей.

Локальные критерии фуксовости регулярных систем

Связь конечномерных пространств V , рассмотренных в предыдущем разделе, с регулярными системами очевидна. Возьмем произвольный базис $e = (e_1, \dots, e_p)$ в V и рассмотрим соответствующую фундаментальную матрицу T_e пространства V . Столбцами этой матрицы являются координаты базисных векторов. Тогда на “проколоте” полидиске $\hat{D}^n$ определена однозначная голоморфная матричная 1-форма $\omega = dT_e T_e^{-1}$. Условие степенного роста для столбцов T_e влечет, что эта форма мероморфна на дивизоре $A = \bigcup_{m=1}^k \{z_m = 0\}$. Таким образом получаем регулярную систему.

Теперь пусть задана регулярная система. Как узнать по свойствам ее пространства решений, когда она является фуксовой системой?

Следующий многомерный локальный критерий фуксовости сформулирован и доказан А.А.: *инвариантное конечномерное пространство V аналитических вектор-функций степенного роста на универсальном накрытии R_ε достаточно малого “проколотого” полидиска $\hat{D}_\varepsilon^n = \prod_{i=1}^k D^1 \setminus \{0\} \times D^{n-k}$ тогда и только тогда является пространством решений интегрируемой фуксовой системы $dy = \omega y$, где $\omega = \sum_{i=1}^k \frac{\omega_i(z) dz_i}{z_i} + \sum_{j=k+1}^n \omega_j(z) dz_j$, $\omega_m(z)$, $m = 1, \dots, n$, – голоморфные функции на D^n и $d\omega = \omega \wedge \omega$, когда пространство V слабо особа в нуле.*

Слабая особость пространства V , по определению, означает существование базиса e в этом пространстве, для которого определитель соответствующей фундаментальной матрицы имеет вид $\det T_e = \prod_{i=1}^k \tilde{z}_i^{\beta_i} g(z)$, где $g(z)$ – голоморфная в центре полидиска функция и $g(0) \neq 0$, а β_i – i -й показатель пространства V , равный сумме всех нормирований пространства V с учетом кратностей, отвечающих i -й компоненте дивизора особенностей A_i , сложенной с суммой нормализованных логарифмов собственных значений матрицы монодромии, соответствующей обходу вокруг компоненты A_i .

Так как матрицы монодромии $G_1, \dots, G_k$, отвечающие образующим $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ фундаментальной группы $\pi_1(\hat{D}^n, z_0) = \mathbb{Z}^k$, коммутируют между собой, то их одновременно можно привести к верхнетреугольному виду. Предположим, что это сделано. Возьмем нормализованные логарифмы $E_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln G_i$. Это, по определению, означает, что вещественные части собственных чисел матриц E_i не меньше нуля и строго меньше единицы.

А.А. доказал, что условие слабой особости пространства V , $\dim V = p$, в центре полидиска равносильно существованию такого базиса (e) в пространстве V , для которого соответствующая фундаментальная матрица T_e факторизуется следующим образом:

$$T_e(\tilde{z}) = U(z) \prod_{i=1}^k z_i^{\Lambda_i} \prod_{i=1}^k \tilde{z}_i^{E_i}, \quad (*)$$

где $\Lambda_i = \text{diag}(\varphi_1^i, \dots, \varphi_p^i)$ – диагональная целочисленная матрица, составленная из нормирований, расположенных в невозрастающем порядке и отвечающих компонен-

те A_i дивизора A , E_i – логарифм верхнетреугольной матрицы монодромии вокруг A_i , $U(z)$ – голоморфно обратимая в окрестности нуля полидиска матричная функция, z – точка проколотого полидиска, а $\tilde{z}$ – соответствующая точка универсального накрытия. В частности, базис (e) является левелевским базисом.

В силу локального критерия фуксовости, если фундаментальная матрица пространства имеет вид (*), то это пространство является пространством решений фуксовой системы. Обратное также доказано А.А., т.е. если задана локально фуксова система, то некоторая ее фундаментальная матрица решений имеет вид (*). Регулярные системы имеют фундаментальные матрицы решений, представимые в виде, подобном (*), однако голоморфная матричная функция $U(z)$ не является в этом случае голоморфно обратимой.

Все перечисленные результаты являются распространением на многомерный случай результатов Левеля, содержащихся в его известной работе 1961 г. Правда, вид (*) для фундаментальной матрицы интегрируемой фуксовой системы достигается в рамках действий с ассоциированными и левелевскими базисами (т.е. методами Левеля) только при $k = 2$. Когда пересекается в точке большее число компонент дивизора особенностей, приходится привлекать аналогичное описание фундаментальной матрицы решений фуксовой системы, данное Йошида и Такано, но полученное другими методами. Эти методы основаны на приведении к биркгофовой стандартной форме многомерных фуксовых систем, получаемых формальными заменами, с последующим доказательством их сходимости. Далее приходится интерпретировать целочисленную матрицу в полученной факторизации фундаментальной матрицы решений как матрицу нормирований, а матрицы E_i – как логарифмы монодромии. Локальный критерий фуксовости, сформулированный в форме существования разложения (*), говорит, что матричные функции $T(z)$ вида (*) дают описание всех фуксовых систем в полидиске с заданной монодромией. Иными словами, этот критерий дает полное описание всех решений локальной проблемы Римана–Гильберта.

Глобальный критерий фуксовости регулярных систем. Неравенства Фукса

В работе [5] А.А. нашел глобальный критерий фуксовости для многомерных регулярных пфаффовых систем (т.е. мероморфных систем, все решения которых имеют степенной рост на дивизоре особенностей) на компактных кэлеровых многообразиях: *класс гомологий $\Sigma = \sum_{i=1}^n \beta_i [A_i] = 0$, который равен линейной комбинации циклов, представленных неприводимыми компонентами дивизора особенностей и с соответствующими экспонентами в качестве коэффициентов, равен нулю.* Этот критерий обобщает критерий фуксовости регулярной системы с особыми точками $\{a_1, \dots, a_n\}$ на сфере Римана: $\Sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i = 0$, т.е. сумма экспонент равна нулю. Это следует из того, что все компоненты дивизора $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ гомологичны между собой; поэтому $\sum_{i=1}^n \beta_i [a_i] = (\sum_{i=1}^n \beta_i) [a_1] = 0$, откуда $\Sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i = 0$.

Для регулярных пфаффовых систем на комплексном проективном пространстве CP^n с особенностями на дивизоре с нормальными пересечениями и неособыми компонентами доказан аналог фуксовых неравенств в форме: $\sum_{i=1}^N \beta_i \deg F_i \leq 0$, где $\deg F_i$ – степень однородного многочлена, нули которого есть i -я компонента дивизора. Критерий фуксовости в этом случае имеет вид $\sum_{i=1}^N \beta_i \deg F_i = 0$. Из этого равенства

и целочисленности нормирований следует, что необходимое условие разрешимости проблемы Римана–Гильберта на $\mathbb{CP}^n$, с указанными выше условиями на дивизор особенностей, состоит в выполнении сравнений на следы нормализованных логарифмов матриц монодромии $\sum_{i=1}^N \operatorname{tr} E_i \deg F_i \equiv 0 \pmod{\operatorname{НОД}(\deg F_1, \dots, \deg F_N)}$. Сравнение рассматривается по модулю наибольшего общего делителя степеней полиномов, определяющих компоненты дивизора особенностей. Неравенство Фукса и критерий фуксовости для регулярных систем на $\mathbb{CP}^n$ являются также обобщением одномерных результатов Левеля.

Много позже, уже в 2000 г., А.А. обобщил и уточнил неравенства Фукса для регулярных систем на компактных кэлеровых многообразиях с особенностями на дивизорах с нормальными пересечениями [66], [68], [70]. Эти уточнения используют понятие ранга Пуанкаре вдоль компонент дивизора и имеют вид:

$$-\frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^N R_i v_i \leq \sum_{i=1}^N \beta_i v_i \leq -\sum_{i=1}^N R_i v_i,$$

где $R_i, i = 1, \dots, N$, – ранги Пуанкаре регулярной системы вдоль компонент дивизора особенностей системы, а $v_i = \int_{A_i} \Omega^{n-1}$ – кэлеров “объем” компоненты A_i дивизора $A = \bigcup_{i=1}^N A_i$. Здесь Ω – кэлерова форма исходного многообразия. Для дивизоров в комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$ числа v_i надо заменить в двойном неравенстве степенями однородных многочленов, определяющих компоненты дивизора с нормальными пересечениями. Эти уточнения были получены с помощью распространения на многомерный случай аналогичных одномерных результатов французского математика Е. Кореля.

Переходя от регулярных и фуксовых систем, которые можно трактовать как связности в тривиальном расслоении, к нетривиальным расслоениям с регулярными и логарифмическими связностями, А.А. сформулировал критерий логарифмичности регулярной связности (понятия регулярности и логарифмичности связности вводятся подобно тому, как это делалось для систем, так как соответствующие определения имеют локальный характер) следующим образом. *Плоская регулярная связность в голоморфном векторном расслоении F над компактным кэлеровым многообразием, которая имеет особенности на дивизоре с нормальными пересечениями, является логарифмической тогда и только тогда, когда цикл $\sum_{i=1}^N \beta_i [A_i]$ двойственен по Пуанкаре первому классу Чженя $c_1(F)$ расслоения F .*

Контрпример к многомерной проблеме Римана–Гильберта и другие результаты

В 1978–1988 годах А.А. несколько отдалился от тематики многомерных мероморфных пфаффовых систем и проблемы Римана–Гильберта, но не бросал ее полностью, продолжая обдумывать и уточнять некоторые моменты своих работ. В частности, опираясь на критерий фуксовости на $\mathbb{CP}^n$, он построил пример отрицательного решения проблемы Римана–Гильберта на $\mathbb{CP}^2$ [11]. Проблема Римана–Гильберта состоит в реализации представлений фундаментальной группы дополнения к дивизору в комплексном многообразии как представлений монодромии аналитических систем

дифференциальных уравнений, по возможности, с максимально простыми особенностями на дивизоре. Например, если дивизор A в комплексном многообразии M является объединением неособых комплексных подмногообразий коразмерности единица и допускает нетривиальные мероморфные дифференциальные формы с полюсами на нем, то под простейшими аналитическими дифференциальными уравнениями можно понимать интегрируемые фуксовы системы $dy = \omega y$. Такое понимание проблемы Римана–Гильберта включает и классическую проблему Римана–Гильберта на сфере Римана.

А.А. было предъявлено одномерное представление фундаментальной группы $\chi: \pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus A) \rightarrow \mathbb{C}^*$ дополнения к дивизору $A = A_1 \cup A_2$, который состоял из двух неособых компонент квадрики $A_1 = \{z \in \mathbb{CP}^2 \mid f(z) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0\}$ и кватрики $A_2 = \{z \in \mathbb{CP}^2 \mid g = z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 = 0\}$ в $\mathbb{CP}^2$, пересекающихся трансверсально. Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus A)$ является коммутативной группой с двумя образующими γ_1 и γ_2 , подчиненными соотношению $\gamma_1^2 \gamma_2^4 = 1$. Для дивизора A и представления χ , $\chi(\gamma_1) = i$, $\chi(\gamma_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, не существует фуксовой системы с особенностями на этом дивизоре в силу невыполнения необходимого условия разрешимости проблемы Римана–Гильберта $\rho_1 \deg(f) + \rho_2 \deg(g) \equiv 0 \pmod{\text{НОД}(\deg f, \deg g)}$, где $\rho_1 = \frac{1}{2\pi i} \ln(i)$, $\rho_2 = \frac{1}{2\pi i} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, сформулированного в предыдущем разделе.

Этот простой пример имел для А.А. важное психологическое значение. В дальнейшем при появлении первых технических затруднений, при попытке доказать для трехмерных представлений разрешимость классической проблемы Римана–Гильберта в классе фуксовых систем на сфере Римана, он взял курс на поиск контрпримера и достиг успеха. Отметим, что описанный выше “отрицательный” пример – один из первых появившихся в публикациях по многомерной проблеме Римана–Гильберта. До этого Р. Жерар, П. Делинь, Н. Катц и другие стремились к положительному решению многомерной проблемы Римана–Гильберта, или ослабляя требования к “аналитическим уравнениям”, или вводя дополнительные ограничения на исходное многообразие и дивизор. Например, Делинь и Катц рассматривали как простейшие “аналитические уравнения” плоские связности с логарифмическими особенностями в нетривиальных голоморфных расслоениях и получили разрешимость многомерной проблемы Римана–Гильберта для представлений фундаментальных групп дополнений дивизоров с нормальными пересечениями в алгебраических многообразиях. Жерар доказал положительную разрешимость в классе фуксовых систем на стягиваемых многообразиях Штейна, японский математик М. Кита требовал, чтобы комплексное многообразие имело нулевой второй класс Чженя, а О. Сузуки добавлял к исходному дивизору дивизор ложных особых точек, около компонент которого решения искомых систем не ветвятся, а имеют лишь полярные особенности на них. Кита и Сузуки также описали некоторые случаи положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта. Описание и классификация “отрицательных” результатов в многомерном случае были начаты лишь в 1979–80 гг. А.А. и автором и были продолжены Р. Хейном и Т. Коно в 1985–88 гг.

Далее, сравнения, типа выписанного в этом разделе выше, были интерпретированы в [16], [20] как равенства нулю первого класса Чженя расслоений с плоскими логарифмическими связностями. В этих работах А.А. описал локальные решения специального вида фуксовых систем с особенностями на дивизорах с нормальными пе-

ресечениями. В работах [21], [22] было найдено уточнение для многомерного случая классического критерия того, что локальные матрицы монодромии суть экспоненты от матриц вычетов формы фуксовой системы. Здесь появились приемы рассуждений, которые были в полной мере использованы позднее в работах по одномерной проблеме Римана–Гильберта и изомонодромным деформациям фуксовых систем.

После того как А.А. нашел контрпример к классической проблеме Римана–Гильберта и доказал положительную разрешимость ее для неприводимых представлений, он применил этот результат в работе [29] для доказательства разрешимости многомерной проблемы Римана–Гильберта, а именно доказал совместно с А.В. Чернавским, что на $\mathbb{C}^2$ для неприводимых представлений фундаментальной группы дополнения к объединению конечного числа прямых, проходящих через начало координат (дивизор не имеет нормальных пересечений), соответствующая задача разрешима в классе многомерных фуксовых систем, т.е. систем с постоянными матрицами вычетов на компонентах дивизора.

Описание полученных Андреем Андреевичем результатов по теории многомерных регулярных и фуксовых систем показывает, что если они и не так ярки, как его более поздние работы по одномерной теории этих систем, но все же они имеют принципиально важное значение для многомерной теории, где он преодолел значительные технические трудности в прояснении основных определений и при получении базовых результатов.

Перечень работ А.А. Болибруха по многомерным фуксовым системам

Мы используем в данной статье нумерацию ссылок из общего списка работ Андрея Андреевича, публикуемого в этом выпуске журнала. Работы по многомерным регулярным и фуксовым системам идут в этом списке под номерами [1]–[7], [11], [16], [19]–[23], [29], [66], [68], [70].

Коломенский государственный
педагогический институт
E-mail: lexine@mccme.ru

Поступила в редакцию
27.07.2004