Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, Общие гамма-функции, экспоненты и гипергеометрические функции, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 3–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:24:49

УДК 517.43+517.58

ОБЩИЕ ГАММА-ФУНКЦИИ, ЭКСПОНЕНТЫ
И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

И. М. ГЕЛЬФАНД, М. И. ГРАЕВ, В. С. РЕТАХ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§ 1. Общие гамма-функции	8
§ 2. Ряды экспоненциального типа	15
§ 3. Операторы u -дифференцирования и u -экспоненты	23
§ 4. Многомерные аналоги	34
§ 5. Ряды гипергеометрического типа	40
§ 6. Общие u -гипергеометрические системы	47
Список литературы	58

Введение

Эта статья посвящена деформациям общих гипергеометрических функций на $\mathbb{C}^N$, определенных в [3] (см. также [5]). В основе лежат вводимые здесь u -гамма функции и u -экспоненты одного и многих комплексных переменных.

1. Начало изучению базисных, или q -гипергеометрических, функций было положено Гейне (Heine E. Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen. 1878. P. 97–125). Современная теория таких функций начинается, пожалуй, с работы Аски и Вильсона [23]. В настоящее время работы на эту тему, написанные как математиками, так и физиками, насчитываются сотнями. Книга Гаспера и Рахмана [35] содержит наиболее полный набор результатов и ссылок. Мы приводим в списке литературы лишь часть наиболее заметных статей, опубликованных после этой книги.

Современная теория q -специальных функций и уравнений изучает q -деформации их классических аналогов. Например, производная функции $df(x)/dx$ заменяется ее q -деформацией, скажем,

$$\frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{qx - q^{-1}x}.$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-01364).

В [6], [7] рассматривались также 2-параметрические деформации производной, а именно,

$$(\partial_{r,s}f)(x) = \frac{f(rx) - f(sx)}{x(r-s)}.$$

Исходя из теории гипергеометрических A -систем, рассматривались также многопараметрические деформации известных гипергеометрических уравнений. Например, наш " q -аналог уравнения Гаусса" зависит от 8 параметров. От соотношений между этими параметрами существенно зависят свойства решений соответствующего уравнения, см. [6].

Мы убедились, что многие результаты этой теории сохраняются, если перейти от 1-, 2-параметрических деформаций производной к деформациям более общего вида: $(\partial f)(x) = x^{-1}u\left(x\frac{d}{dx}\right)f(x)$, где u – любая целая функция. В частности, оператору d/dx отвечает $u(\alpha) = \alpha$, а его 2-параметрической деформации – функция $u(\alpha) = (r^\alpha - s^\alpha)/(r - s)$. Это позволяет единым образом излагать классическую теорию и q -теорию и приводит к новым аналогам классических гипергеометрических функций; естественно назвать их u -аналогами.

Хотя нашими основными объектами по-прежнему являются специальные функции, связанные с 2-деформациями (отдельно по каждому аргументу), мы ведем изложение на языке " u -анализа," который строим, начиная с u -гамма функций и u -экспонент.

Классические гипергеометрические функции одного переменного и их q -аналоги являются u -экспонентами. Именно, обобщенные функции Гаусса ${}_rF_s$ (или, по-другому, функции Похгаммера) являются u -экспонентами, где u – рациональная функция, а их q -аналоги (функции Гейне) – u -экспонентами, где $u(\alpha)$ – рациональная функция от q^α (см. п. 21.4). Тэта-функция Якоби является (с точностью до несущественных деталей) u -экспонентой при $u(\alpha) = q^{-\alpha}$.

2. Чтобы построить q -аналоги классических функций, заменяют гамма-функцию Эйлера $\Gamma(\alpha)$ и оператор дифференцирования d/dx их q -аналогами $\Gamma_q(\alpha)$ и ∂_q ; по определению Γ_q является решением функционального уравнения

$$\Gamma_q(\alpha + 1) = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1} \Gamma_q(\alpha),$$

а оператор ∂_q задается формулой: $(\partial_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q - 1)}$. Естественным q -аналогом ряда $\exp x = \sum \frac{x^n}{\Gamma(n + 1)}$ является ряд $\exp_q x = \sum \frac{x^n}{\Gamma_q(n + 1)}$, который, как и ряд $\exp x$, обрывается при $n < 0$.

В теории квантовых групп используют другой вариант оператора q -дифференцирования: $(\partial_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{x(q - q^{-1})}$. Соответственно меняются определения функций $\Gamma_q(\alpha)$ и $\exp_q(x)$. Оба варианта – частные случаи оператора (r, s) -дифференцирования: $(\partial_{r,s}f)(x) = \frac{f(rx) - f(sx)}{x(r - s)}$.

Общее свойство, роднящее операторы $\partial = \partial_{r,s}$ и $\partial = d/dx$: $\left[\partial, x \frac{d}{dx} \right] = \partial$. Это коммутационное соотношение означает, что на степенные функции x^α оператор ∂ действует по формуле $\partial x^\alpha = u(\alpha) x^{\alpha-1}$. Здесь $u(\alpha) = \alpha$ в случае $\partial = d/dx$, и $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$ в случае $\partial = \partial_{r,s}$.

3. В этой статье функция $(q^\alpha - 1)/(q - 1)$ заменяется произвольной аналитической функцией $u(\alpha)$. Соответственно, вводятся “ u -аналоги” гамма-функции Эйлера $\Gamma(\alpha)$, ряда $\exp x$ и оператора дифференцирования d/dx . Именно, u -гамма-функция $\Gamma_u(\alpha)$ есть решение функционального уравнения

$$\Gamma_u(\alpha + 1) = u(\alpha) \Gamma_u(\alpha).$$

Формальный ряд $\exp_u x$ определяется равенством

$$\exp_u x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x^n}{\Gamma_u(n+1)}.$$

Наконец, оператор u -дифференцирования определяется формулой

$$\partial_u = x^{-1} u \left(x \frac{d}{dx} \right)$$

при условии, что u – целая функция. Другими словами, на степенные функции x^α он действует так:

$$\partial_u x^\alpha = u(\alpha) x^{\alpha-1}.$$

Классические функции $\Gamma(\alpha)$, $\exp x$ и оператор d/dx отвечают случаю $u(\alpha) = \alpha$, а их q -аналоги – случаю $u(\alpha) = (q^\alpha - 1)/(q - 1)$.

4. Содержание статьи. В §§ 1–3 исследуются введенные объекты: функции Γ_u , формальные ряды $\exp_u$ и операторы ∂_u . В §§ 4–6 вводятся и изучаются u -гипергеометрические функции и u -гипергеометрические ряды многих переменных.

Функции одной переменной. В § 1 для большого класса функций u получены представления функций Γ_u в форме бесконечных произведений и исследованы их асимптотики.

В § 2 обсуждаются условия сходимости формальных рядов $\exp_u x$.

В § 3 мы определяем u -экспоненты, где u – произвольная целая функция, как решения уравнения

$$\partial_u f = f.$$

Очевидно, формальные ряды $\exp_v x$, $v(\alpha) = u(\alpha + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяют этому уравнению, а потому в области сходимости задают различные u -экспоненты. В классическом случае, когда $u(\alpha) = \alpha$, $\partial_u = d/dx$, решение $f(x) = \exp x$ единственно, с точностью до множителя. Для других u существует, вообще говоря, бесчисленное множество линейно независимых u -экспонент. Подробно исследован случай

$u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$, для которого построены наборы u -экспонент в форме рядов и в форме интегралов. В частном случае, когда $u(\alpha) = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$, все u -экспоненты явно описаны.

Функции многих переменных. Следующие три параграфа посвящены общим гипергеометрическим функциям и рядам гипергеометрического типа. Прежде чем перейти к их определению, необходимо перенести на многомерный случай определения функций Γ_u , $\exp_u$ и операторов ∂_u (см. § 4). В многомерном случае вместо одной функции $u(\alpha)$ одного переменного задается последовательность

$$u = (u_1, \dots, u_N)$$

аналитических функций на $\mathbb{C}^N$. Предполагается, что эти функции связаны соотношениями:

$$(0.1) \quad u_i(\alpha) u_j(\alpha - e_i) = u_j(\alpha) u_i(\alpha - e_j), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $e_1, \dots, e_N$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^N$. В частности, условие (0.1) выполняется, если каждая функция u_i зависит только от α_i .

Вместо функции Γ_u удобнее обобщить на многомерный случай функцию E_u , связанную с Γ_u соотношением:

$$E_u(\alpha) = \Gamma_u(\alpha + 1);$$

таким образом, функция $E_u(\alpha)$ является решением системы уравнений:

$$E_u(\alpha) = u(\alpha) E_u(\alpha - 1).$$

Многомерный аналог функции E_u , ассоциированный с последовательностью $u = (u_1, \dots, u_N)$ функций на $\mathbb{C}^N$, определяется как решение системы уравнений:

$$E_u(\alpha) = u_i(\alpha) E_u(\alpha - e_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Условия (0.1) являются необходимыми условиями совместности этой системы. В частном случае, когда каждая функция $u_i(\alpha)$ зависит только от α_i , имеем:

$$E_u(\alpha) = \Gamma_{u_1}(\alpha_1 + 1) \cdots \Gamma_{u_N}(\alpha_N + 1).$$

Соответственно, формальный ряд $\exp_u a$, $a \in \mathbb{C}^N$, определяется равенством

$$\exp_u a = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{a^k}{E_u(k)},$$

где $a^k = a_1^{k_1} \cdots a_N^{k_N}$. Если функции u_i — целые, то с ними связывается следующий набор линейных операторов $\partial_1, \dots, \partial_N$ в пространстве аналитических функций на $\mathbb{C}^N$:

$$\partial_i = a_i^{-1} u_i \left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, a_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Другими словами, операторы ∂_i действуют на мономы $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \cdots a_N^{\alpha_N}$ по формуле:

$$\partial_i a^\alpha = u_i(\alpha) a^{\alpha - e_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Заметим, что условия (0.1) эквивалентны перестановочности операторов ∂_i между собой. Экспонентами, ассоциированными с последовательностью функций $u = (u_1, \dots, u_N)$, называются решения системы уравнений

$$\partial_i f = f, \quad i = 1, \dots, N.$$

В статье для каждой последовательности $u = (u_1, \dots, u_N)$ целых аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих соотношениям (0.1), определены формальные ряды гипергеометрического типа и гипергеометрические функции.

Ряды гипергеометрического типа. Рядом гипергеометрического типа (по другому: Γ -рядом), ассоциированным с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{C}^N$ и вектором $\lambda \in \mathbb{Z}^N$, называется следующий формальный ряд:

$$f_\Lambda(\lambda, a) = \sum_{l \in \Lambda} \frac{a^{l+\lambda}}{E_u(l+\lambda)}.$$

В частности, $f_{\mathbb{Z}^N}(\lambda, a) = \exp_u a$.

В §5 для различных последовательностей u исследованы условия сходимости этих рядов. “Классический” случай, когда $u_i(\alpha) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, N$, подробно рассмотрен ранее, см., например, [5].

Гипергеометрические функции. Гипергеометрической системой на $\mathbb{C}^N$, ассоциированной с произвольной подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{C}^N$ и вектором $\beta \in \mathbb{C}^N/L$, где $L \subset \mathbb{C}^N$ – натянутое на Λ линейное подпространство, называется следующая система уравнений в пространстве функций на $\mathbb{C}^N$:

$$\prod_{i: l_i > 0} \partial_i^{l_i} f = \prod_{i: l_i < 0} \partial_i^{-l_i} f \quad \text{для любого } l = (l_1, \dots, l_N) \in \Lambda,$$

где ∂_i – связанные с последовательностью $u = (u_1, \dots, u_N)$ линейные операторы;

$$\sum_{i=1}^N \omega^i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \langle \omega, \beta \rangle f$$

для любого вектора $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^N) \in (\mathbb{C}^N)'$, ортогонального Λ . Голоморфные решения этой системы называются u -гипергеометрическими функциями, ассоциированными с Λ и β .

В “классическом” варианте, когда $\partial_i = \frac{\partial}{\partial a_i}$, гипергеометрическая система была введена в [3] и исследована в последующих работах. Была установлена ее голономность и построены базисы в пространствах ее решений в виде рядов гипергеометрического типа и в форме интегралов.

Приведенные u -гипергеометрические функции. Любую u -гипергеометрическую функцию $f(a)$ на $\mathbb{C}^N$ можно свести к функции меньшего числа переменных. Пусть $n = \text{rank } \Lambda \leq N$, $l^1, \dots, l^n$ – произвольный фиксированный базис в подрешетке Λ , и пусть $\lambda \in \mathbb{C}^N$ – произвольный фиксированный вектор из прообраза $\beta \in \mathbb{C}^N/L$. Тогда функцию f можно представить в виде

$$f(a) = a^\lambda F(x_1, \dots, x_n),$$

где $x_i = a^{l^i} = a_1^{l_1^i} \dots a_N^{l_N^i}$ – мономы от координат $a_1, \dots, a_N$, и $a^\lambda = a_1^{\lambda_1} \dots a_N^{\lambda_N}$. Мы называем функции F приведенными u -гипергеометрическими функциями, ассоциированными с Λ и λ . Исходя из уравнений для f , можно в явном виде получить уравнения для функций F . Оказывается, что существует тесная связь между приведенными гипергеометрическими функциями и экспонентами на $\mathbb{C}^n$.

Отметим, что все классические гипергеометрические функции одного и многих переменных (Похгаммера, Аппеля, Лауричеллы и т. д.) являются приведенными гипергеометрическими функциями, ассоциированными с подходящими решетками Λ и векторами λ .

Решения гипергеометрических систем в форме рядов и интегралов. В §6 конструкции решений гипергеометрических систем, полученные в [3], [4] для классического случая, переносятся на общий случай. Легко убедиться, что любой формальный ряд “ u -гипергеометрического типа”

$$f_\Lambda(\lambda, a) = \sum_{l \in \Lambda} \frac{a^{l+\lambda}}{E_u(l+\lambda)},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^N$ – любой вектор из прообраза $\beta \in \mathbb{C}^N/L$, формально удовлетворяет u -гипергеометрической системе. Задача состоит в том, чтобы в классе таких рядов выделить ряды с непустой областью сходимости.

Если каждая функция u_i зависит только от α_i , а f_{u_i} – произвольная u_i -экспонента, $i = 1, \dots, N$, то u -гипергеометрической системе уравнений формально удовлетворяют также следующие интегралы:

$$f(a) = \int_C \prod_{i=1}^N f_{u_i}(a_i t_1^{\omega_1^i} \dots t_r^{\omega_r^i}) \prod_{j=1}^r t_j^{-\beta_j-1} dt_j,$$

где $\omega_j = (\omega_j^1, \dots, \omega_j^N)$, $j = 1, \dots, r$, – произвольный фиксированный базис в решетке $\Lambda^\perp \subset (\mathbb{Z}^N)'$, ортогональной Λ , и $\beta_j = \langle \omega_j, \beta \rangle$; интеграл берется по некоторому “циклу” $C \subset \mathbb{C}^r$ вещественной размерности r . Рассмотрен пример такого интеграла с непустой областью сходимости.

§ 1. Общие гамма-функции

1.1. Функциональное уравнение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем u -гамма-функцией, где $u(\alpha)$ – произвольная аналитическая функция, и обозначим через $\Gamma_u(\alpha)$ решение следующего функционального уравнения:

$$(1.1) \quad \Gamma_u(\alpha + 1) = u(\alpha) \Gamma_u(\alpha).$$

Очевидно, что функция $\Gamma_u(\alpha)$, если она существует, определена с точностью до множителя $c(\alpha)$, являющегося периодической функцией с периодом 1. Заметим также, что любая аналитическая функция $F(\alpha)$ является u -гамма-функцией, где $u(\alpha) = \frac{F(\alpha+1)}{F(\alpha)}$.

Классические примеры: $u(\alpha) = \alpha$ и $u(\alpha) = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$. В первом случае решением уравнения (1.1) является гамма-функция Эйлера $\Gamma(\alpha)$, а во втором – ее q -аналог, обычно обозначаемый через $\Gamma_q(\alpha)$. При $|q| < 1$ функция Γ_q может быть представлена в форме бесконечного произведения:

$$\Gamma_q(\alpha) = (1 - q)^{1-\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^{n+\alpha}}.$$

Известно [35], что $\lim_{q \rightarrow 1} \Gamma_q(\alpha) = \Gamma(\alpha)$.

Приведем еще два простых примера. Очевидно, если $u(\alpha) \equiv c$, то $\Gamma_u(\alpha) = c^\alpha$; если $u(\alpha) = \lambda^\alpha$, то $\Gamma_u(\alpha) = \lambda^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)}$.

1.2. Основные свойства. Из определения функции Γ_u непосредственно следует, что с точностью до множителей, являющихся периодическими функциями от α с периодом 1, выполняются следующие соотношения.

- 1) Если $v(\alpha) = u(\alpha + c)$, то $\Gamma_v(\alpha) = \Gamma_u(\alpha + c)$.
- 2) Если $v(\alpha) = u(-\alpha)$, то $\Gamma_v(\alpha) = \Gamma_u^{-1}(1 - \alpha)$. Другими словами,

$$\Gamma_v(\alpha) \Gamma_u(1 - \alpha) = \theta(\alpha)$$

– периодическая функция с периодом 1.

- 3) Если $v(\alpha) = (u(\alpha))^\rho$, где ρ – произвольное число, то $\Gamma_v(\alpha) = (\Gamma_u(\alpha))^\rho$.
- 4) Для любых функций $u(\alpha)$ и $v(\alpha)$ имеем:

$$\Gamma_{uv}(\alpha) = \Gamma_u(\alpha) \Gamma_v(\alpha), \quad \Gamma_{uv^{-1}}(\alpha) = \Gamma_u(\alpha) \Gamma_v^{-1}(\alpha).$$

В частности, если $uv = 1$, то $\Gamma_u(\alpha) \Gamma_v(\alpha)$ – периодическая функция с периодом 1.

- 5) Если функция u представима в виде бесконечного произведения, $u = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$, то $\Gamma_u(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_{u_n}(\alpha)$ при условии, что правая часть сходится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если $v(\alpha) = u(k\alpha)$, $k = 2, 3, \dots$, то

$$\Gamma_u(k\alpha) = \theta(\alpha) \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma_v\left(\alpha + \frac{i}{k}\right),$$

где $\theta(\alpha)$ – периодическая функция с периодом $1/k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\varphi(\alpha) = \Gamma_u(k\alpha), \quad \psi(\alpha) = \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma_v\left(\alpha + \frac{i}{k}\right).$$

Тогда имеем:

$$\varphi\left(\alpha + \frac{1}{k}\right) = u(k\alpha) \varphi(\alpha), \quad \psi\left(\alpha + \frac{1}{k}\right) = v(\alpha) \psi(\alpha).$$

Отсюда следует утверждение.

На основании приведенных свойств можно явно вычислять u -гамма-функции для достаточно широкого класса функций u .

ПРИМЕРЫ. 1°. Если u – рациональная функция,

$$u(\alpha) = c \frac{\prod_{i=1}^m (\alpha - a_i)}{\prod_{i=1}^n (\alpha - b_i)},$$

то

$$\Gamma_u(\alpha) = c^\alpha \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(\alpha - a_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha - b_i)},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

2°. $u(\alpha) = \sin(s\alpha)$. Для вычисления $\Gamma_u(\alpha)$ воспользуемся разложением $\sin \alpha$ в бесконечное произведение:

$$\sin(s\alpha) = s\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(s\alpha)^2}{(\pi n)^2}\right).$$

Каждому сомножителю этого произведения,

$$u_n(\alpha) = 1 - \frac{(s\alpha)^2}{(\pi n)^2} = \frac{(s^{-1}\pi n + \alpha)(s^{-1}\pi n - \alpha)}{(s^{-1}\pi n)^2},$$

отвечает функция

$$\Gamma_{u_n}(\alpha) = (s^{-1}\pi n)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(s^{-1}\pi n + \alpha)}{\Gamma(s^{-1}\pi n - \alpha + 1)}.$$

Из асимптотики для функции $\Gamma(\alpha)$ легко следует, что $\Gamma_{u_n}(\alpha) = 1 + O(1/n^2)$ при любом фиксированном α общего положения, а потому бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_{u_n}(\alpha)$ сходится. Следовательно,

$$\Gamma_u(\alpha) = s^\alpha \Gamma(\alpha) \prod_{n=1}^{\infty} \left((s^{-1}\pi n)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(s^{-1}\pi n + \alpha)}{\Gamma(s^{-1}\pi n - \alpha + 1)} \right).$$

3°. $u(\alpha) = \Gamma(\alpha)$. Воспользуемся разложением $\Gamma(\alpha)$ в бесконечное произведение:

$$\Gamma(\alpha) = \alpha^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \right].$$

Положим

$$F_n(\alpha) = n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha(\alpha-1)/2} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)}.$$

Очевидно, что

$$\frac{F_n(\alpha+1)}{F_n(\alpha)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}.$$

Из асимптотики для функции $\Gamma(\alpha)$ следует, что $F_n(\alpha) = 1 + O(1/n^2)$ при любом фиксированном α общего положения, а потому бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ сходится. Следовательно,

$$\Gamma_u(\alpha) = \Gamma^{-1}(\alpha) \prod_{n=1}^{\infty} \left[n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha(\alpha-1)/2} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)} \right].$$

Аналогично, можно воспользоваться другим разложением функции $\Gamma(\alpha)$ в бесконечное произведение,

$$\Gamma(\alpha) = \left(\alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) e^{-\alpha/n} \right)^{-1},$$

где γ – постоянная Эйлера–Маскерони. Из этого разложения следует:

$$\Gamma_u(\alpha) = \Gamma^{-1}(\alpha) e^{-\gamma\alpha(\alpha-1)/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[n^\alpha \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)} e^{\alpha(\alpha-1)/2n} \right].$$

1.3. Разложение в бесконечное произведение. Введем для любой функции $u(\alpha)$ следующие обозначения:

$$(1.2) \quad [u(\alpha)]_{+\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} u(\alpha+n),$$

$$(1.3) \quad [u(\alpha)]_{-\infty} = \prod_{n=1}^{\infty} u(\alpha-n).$$

Обозначим через A_+ и A_- совокупность целых аналитических функций таких, что для любого α сходится соответственно бесконечное произведение (1.2) и бесконечное произведение (1.3).

В частности, если $u_+ \in A_+$, $u_- \in A_-$, то существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_+(\alpha+n) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_-(\alpha-n) = 1.$$

Следующее утверждение непосредственно следует из определения совокупностей A_+ и A_- .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Если $u \in A_+$, то $f_+(\alpha) = [u(\alpha)]_{+\infty}^{-1}$ является u -гамма-функцией. Аналогично, если $u \in A_-$, то $f_-(\alpha) = [u(\alpha)]_{-\infty}^{-1}$ является u -гамма-функцией.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $u(\alpha)$ представима в виде

$$u(\alpha) = a \lambda^\alpha u_+(\alpha) u_-(\alpha),$$

где $u_+ \in A_+$, $u_- \in A_-$, то существует следующее решение функционального уравнения (1.1):

$$\Gamma_u(\alpha) = a^\alpha \lambda^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} [u(\alpha)]_{+\infty}^{-1} [u(\alpha)]_{-\infty}.$$

ПРИМЕР. Из асимптотической формулы для $\Gamma(\alpha)$ следует, что функция

$$v(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi} \alpha^{\alpha-1/2} e^{-\alpha} \left(1 + \frac{1}{12\alpha}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

принадлежит A_+ и A_- . Таким образом, можно принять, например, $\Gamma_v(\alpha) = [u(\alpha)]_{+\infty}^{-1}$.

Найдем, исходя из этой формулы, функцию $\Gamma_u(\alpha)$ для $u(\alpha) = \alpha^\alpha$. Поскольку

$$\alpha^\alpha = (2\pi)^{-1/2} \alpha^{3/2} \left(\alpha + \frac{1}{12}\right)^{-1} e^\alpha \Gamma(\alpha) v(\alpha),$$

при $u(\alpha) = \alpha^\alpha$ имеем:

$$\Gamma_u(\alpha) = (2\pi)^{-\alpha/2} \Gamma^{3/2}(\alpha) \Gamma^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{12}\right) e^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}} \Gamma(\alpha) [v(\alpha)]_{+\infty}^{-1};$$

выражение для $\Gamma_\Gamma(\alpha)$ см. в п. 1.2, пример 3°.

1.4. Функции Γ_u^+ и Γ_u^- .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если целая функция $u(\alpha)$ представима в виде

$$(1.4) \quad u(\alpha) = a \lambda^\alpha u_+(\alpha), \quad u_+ \in A_+,$$

то обозначим через Γ_u^+ следующую u -гамма-функцию:

$$(1.5) \quad \Gamma_u^+(\alpha) = a^\alpha \lambda^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} [u(\alpha)]_{+\infty}^{-1}.$$

Аналогично, если

$$(1.6) \quad u(\alpha) = b \mu^\alpha u_-(\alpha), \quad u_- \in A_-,$$

то обозначим через Γ_u^- следующую u -гамма-функцию:

$$(1.7) \quad \Gamma_u^-(\alpha) = b^\alpha \mu^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} [u(\alpha)]_{-\infty}.$$

Отметим, что $\Gamma_u^-(\alpha)$ и $(\Gamma_u^+(\alpha))^{-1}$ – целые функции. При этом, если S – множество нулей функции u , то нулями функции $\Gamma_u^-(\alpha)$ являются точки $\alpha = s + n$, а нулями функции $(\Gamma_u^+(\alpha))^{-1}$ – точки $\alpha = s - n + 1$, где $s \in S$ и $n = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим случай, когда функция $u(\alpha)$ одновременно представима как в виде (1.4), так и в виде (1.6). В этом случае имеется два решения функционального уравнения (1.1) – $\Gamma_u^+(\alpha)$ и $\Gamma_u^-(\alpha)$. Их отношение

$$(1.8) \quad \theta_u(\alpha) = \frac{\Gamma_u^-(\alpha)}{\Gamma_u^+(\alpha)} = (ba^{-1})^\alpha (\mu\lambda^{-1})^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} [u(\alpha)]_{+\infty} [u(\alpha)]_{-\infty}$$

является периодической функцией с периодом 1. Назовем ее тета-функцией, ассоциированной с u .

ЗАМЕЧАНИЕ. В классическом случае функциональному уравнению $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ удовлетворяют как гамма-функция Эйлера $\Gamma(\alpha)$, так и функция $\Gamma_1(\alpha) = \frac{e^{\pi i \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$. Можно трактовать $\Gamma_u^+(\alpha)$ и $\Gamma_u^-(\alpha)$ как аналоги функций $\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma_1(\alpha)$, а равенство $\frac{\Gamma_u^-(\alpha)}{\Gamma_u^+(\alpha)} = \theta_u(\alpha)$ – как аналог известного соотношения

$$\frac{\Gamma_1(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \equiv \frac{e^{\pi i \alpha}}{\Gamma(\alpha)(1 - \alpha)} = \frac{1}{\pi} e^{\pi i \alpha} \sin \pi \alpha.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Если функция θ представима в виде (1.4) и (1.6), то при $n \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_u^+(\alpha + n) &= a^{\alpha+n} \lambda^{\frac{1}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)} (1 + o(1)), \\ \Gamma_u^+(\alpha - n) &= \theta_u^{-1}(\alpha) b^{\alpha-n} \mu^{\frac{1}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)} (1 + o(1)), \\ \Gamma_u^-(\alpha - n) &= b^{\alpha-n} \mu^{\frac{1}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)} (1 + o(1)), \\ \Gamma_u^-(\alpha + n) &= \theta_u(\alpha) a^{\alpha+n} \lambda^{\frac{1}{2}(\alpha+n)(\alpha+n-1)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

В самом деле, первое и третье равенство следуют непосредственно из определения функций Γ_u^+ и Γ_u^- . В свою очередь, из этих равенств и из соотношения $\Gamma_u^+(\alpha \pm n) = \Gamma_u^-(\alpha \pm n) \theta_u^{-1}(\alpha)$ следуют два других равенства.

1.5. Примеры. 1. $u_1(\alpha) = 1 - q^{\alpha+\lambda}$, $u_2(\alpha) = 1 - q^{-\alpha-\lambda}$, где $|q| < 1$.

Так как $u_1 \in A_+$, $u_2 \in A_-$, то $\Gamma_{u_1}^+(\alpha) = [1 - q^{\alpha+\lambda}]_{+\infty}$, $\Gamma_{u_2}^-(\alpha) = [1 - q^{-\alpha-\lambda}]_{-\infty}$.

2. $u(\alpha)$ – произвольная рациональная функция от q^α . Тогда $u(\alpha)$ можно представить двумя способами:

$$u(\alpha) = a q^{k\alpha} \frac{\prod_{i=1}^m (1 - q^{\alpha+\lambda_i})}{\prod_{i=1}^n (1 - q^{\alpha+\mu_i})} = a' q^{l\alpha} \frac{\prod_{i=1}^m (1 - q^{-\alpha-\lambda_i})}{\prod_{i=1}^n (1 - q^{-\alpha-\mu_i})},$$

где a' и l связаны с a и k соотношениями $a' = (-1)^{m+n} q^{\sum \lambda_i - \sum \mu_j} a$, $l = k + m - n$. Из примера 1 и из свойств u -гамма-функций (см. п. 1.2) следует, что уравнение (1.1) имеет два решения:

$$\begin{aligned} \Gamma_u^+(\alpha) &= a^\alpha q^{\frac{k\alpha(\alpha-1)}{2}} \frac{\prod_{i=1}^n [1 - q^{\alpha+\mu_i}]_{+\infty}}{\prod_{i=1}^m [1 - q^{\alpha+\lambda_i}]_{+\infty}}; \\ \Gamma_u^-(\alpha) &= a'^\alpha q^{\frac{l\alpha(\alpha-1)}{2}} \frac{\prod_{i=1}^m [1 - q^{-\alpha-\lambda_i}]_{-\infty}}{\prod_{i=1}^n [1 - q^{-\alpha-\mu_i}]_{-\infty}}. \end{aligned}$$

Используя стандартное обозначение $[a]_\infty = \prod_{k=0}^\infty (1 - a q^k)$, эти функции можно также представить в виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_u^+(\alpha) &= a^\alpha q^{\frac{k}{2}\alpha(\alpha-1)} \frac{\prod_{i=1}^n [q^{\alpha+\mu_i}]_\infty}{\prod_{i=1}^m [q^{\alpha+\lambda_i}]_\infty}; \\ \Gamma_u^-(\alpha) &= a'^\alpha q^{\frac{l}{2}\alpha(\alpha-1)} \frac{\prod_{i=1}^m [q^{-\alpha-\lambda_i}]_\infty}{\prod_{i=1}^n [q^{-\alpha-\mu_i}]_\infty}. \end{aligned}$$

Отношение этих функций – периодическая функция с периодом 1.

3. $u(\alpha) = \sum_{i=1}^m a_i r_i^\alpha$, где $|r_1| < \dots < |r_m|$ (обобщение примера 1).

Представим $u(\alpha)$ в виде:

$$u(\alpha) = a_m r_m^\alpha u_+(\alpha) = a_1 r_1^\alpha u_-(\alpha),$$

где $u_+(\alpha) = (a_m r_m^\alpha)^{-1} u(\alpha)$, $u_-(\alpha) = (a_1 r_1^\alpha)^{-1} u(\alpha)$. Очевидно, что $u_+ \in A_+$, $u_- \in A_-$, а потому u -гамма-функциями являются следующие функции:

$$\begin{aligned}\Gamma_u^+(\alpha) &= a_m^\alpha r_m^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}} [u_+(\alpha)]_{+\infty}^{-1}, \\ \Gamma_u^-(\alpha) &= a_1^\alpha r_1^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}} [u_-(\alpha)]_{-\infty}.\end{aligned}$$

1.6. Функции $\Gamma_{r,s}(\alpha)$, $\Gamma_q(\alpha)$ и $\Gamma_{q^{-1}}(\alpha)$. Рассмотрим случай, когда $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$, $0 < |r| < |s|$ (частный случай примера 2 из п. 1.5). Обозначим $\Gamma_u^\pm$ и θ_u соответственно через $\Gamma_{r,s}^\pm$ и θ_q , где $q = r/s$. Имеем:

$$\begin{aligned}\Gamma_{r,s}^+(\alpha) &= (s - r)^{-\alpha} s^{\alpha(\alpha-1)/2} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{\alpha+n})^{-1}, \\ \Gamma_{r,s}^-(\alpha) &= (r - s)^{-\alpha} r^{\alpha(\alpha-1)/2} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{-\alpha+n+1}), \\ \theta_q(\alpha) &= (-1)^\alpha q^{\alpha(\alpha-1)/2} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{\alpha+n})(1 - q^{-\alpha+n+1}).\end{aligned}$$

Отметим, что, с точностью до множителя, функция $\theta_q(\alpha)$ совпадает с θ -функцией Якоби.

Положим:

$$\Gamma_{r,s}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{r,s}^+(\alpha) = (s - r)^{-\alpha} s^{\alpha(\alpha-1)/2} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{\alpha+n})^{-1}.$$

Из определения $\Gamma_{r,s}$ следует, что

$$\begin{aligned}\Gamma_{r,s}(\alpha + n) &\sim (s - r)^{-\alpha-n} s^{(\alpha+n)(\alpha+n-1)/2} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \\ \Gamma_{r,s}(\alpha + n) &\sim \theta_q^{-1}(\alpha) (r - s)^{-\alpha-n} r^{(\alpha+n)(\alpha+n-1)/2} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

Положим, далее, в специальном случае, когда $u(\alpha) = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$ и $u(\alpha) = \frac{1 - q^{-\alpha}}{1 - q^{-1}}$, $|q| < 1$:

$$\begin{aligned}\Gamma_q(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{q,1}(\alpha) = (1 - q)^{-\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{\alpha+n})^{-1}, \\ \Gamma_{q^{-1}}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{1,q^{-1}}(\alpha) = (1 - q)^{-\alpha} q^{-(\alpha-1)(\alpha-2)/2} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{\alpha+n})^{-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, имеем¹:

$$\begin{aligned}\Gamma_{r,s}(\alpha) &= s^{(\alpha-1)(\alpha-2)/2} \Gamma_q(\alpha) = r^{(\alpha-1)(\alpha-2)/2} \Gamma_{q^{-1}}(\alpha), \\ \Gamma_{q^{-1}}(\alpha) &= q^{-(\alpha-1)(\alpha-2)/2} \Gamma_q(\alpha).\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Функции $\Gamma_q(\alpha)$ и $\Gamma_{q^{-1}}(\alpha)$ связаны следующим соотношением:*

$$\Gamma_q(\alpha) \Gamma_{q^{-1}}(1-\alpha) = (1-q)^{-1} (-q)^{1-\alpha} \theta_q^{-1}(-\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\begin{aligned}\Gamma_{q,1}^+(\alpha) &= (1-q)^{-\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{\alpha+n})^{-1}, \\ \Gamma_{1,q^{-1}}^-(1-\alpha) &= (1-q^{-1})^{\alpha-1} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{\alpha+n}),\end{aligned}$$

откуда

$$\Gamma_{q,1}^+(\alpha) \Gamma_{1,q^{-1}}^-(1-\alpha) = (1-q)^{-1} (-q)^{1-\alpha}.$$

С другой стороны,

$$\Gamma_{1,q^{-1}}^-(1-\alpha) = \Gamma_{1,q^{-1}}^+(1-\alpha) \theta_q(-\alpha).$$

Следовательно,

$$\Gamma_{q,1}^+(\alpha) \Gamma_{1,q^{-1}}^+(1-\alpha) = (1-q)^{-1} (-q)^{1-\alpha} \theta_q^{-1}(-\alpha).$$

СЛЕДСТВИЕ. *Функции $\Gamma_{r,s}$ и $\Gamma_{s^{-1},r^{-1}}$ связаны соотношением:*

$$\Gamma_{r,s}(\alpha) \Gamma_{s^{-1},r^{-1}}(1-\alpha) = (1-q)^{-1} (-r)^{1-\alpha} \theta_q^{-1}(-\alpha).$$

§ 2. Ряды экспоненциального типа

2.1. Ряды $\exp_u x$. Пусть $u(\alpha)$ – произвольная аналитическая функция и $\Gamma_u(\alpha)$ – отвечающая ей u -гамма-функция, т.е. решение функционального уравнения (1.1). Будем предполагать, что

$$(2.1) \quad \begin{aligned}\Gamma_u(\alpha) &\neq 0 \quad \text{при } \alpha \in \mathbb{Z}; \\ \Gamma_u(\alpha) &\neq \infty \quad \text{хотя бы для одного } \alpha \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем u -экспоненциальным рядом и обозначим через $\exp_u x$ следующий формальный ряд:

$$(2.2) \quad \exp_u x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma_u(n+1)}.$$

¹Определение функции Γ_q отличается от традиционного множителем $\Gamma_q(1)$.

Условия (2.1) означают, что все коэффициенты этого ряда конечны и по крайней мере один из них отличен от нуля. Так как функция Γ_u определена с точностью до множителя – периодической функции с периодом 1, равенство (2.2) определяет ряд $\exp_u x$ с точностью до постоянного множителя. Например, если $u(\alpha) = \alpha$, то $\exp_u x = c e^x$, где c – произвольная постоянная.

Заметим, что любой формальный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(n) x^n,$$

где $c(\alpha)$ – произвольная аналитическая функция, является рядом $\exp_u x$, отвечающим функции $u(\alpha) = \frac{c(\alpha-1)}{c(\alpha)}$.

В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться функции $u(\alpha)$, зависящие от дополнительного набора параметров. В этом случае связанные с ними ряды $\exp_u x$ также зависят от набора параметров. Например, если $u(\alpha) = \alpha + \lambda$, то $\Gamma_u(\alpha) = \Gamma(\alpha + \lambda)$, а потому

$$\exp_u x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n + \lambda + 1)}.$$

В случае $\lambda \in \mathbb{Z}$ этот ряд обрывается при $n \rightarrow -\infty$; он сходится при любом $x \neq 0$ и совпадает с рядом

$$x^{-\lambda} e^x = x^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Если $\lambda \notin \mathbb{Z}$, то ряд расходится при любом x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если $u(\alpha)$ не имеет особенностей при $\alpha \in \mathbb{Z}$ и выполнены условия (2.1), то либо все коэффициенты $c(n)$ ряда (2.2) отличны от нуля, либо существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $c(n) \neq 0$ при $n \geq k$ и $c(n) = 0$ при $n < k$.*

В самом деле, если $c(m) = 0$ для некоторого m , т.е. $\Gamma_u(m+1) = \infty$, то из соотношения $G_u(m+1) = u(m)\Gamma_u(m)$ и ограниченности $u(m)$ следует, что $\Gamma_u(m) = \infty$, и, значит, $c(m-1) = 0$. Отсюда непосредственно следует утверждение.

Если все коэффициенты $c(n)$ ряда $\exp_u x$ отличны от нуля, то, нормировав этот ряд условием $c(0) = 1$, получаем для остальных его коэффициентов следующие выражения:

$$\begin{aligned} c(n) &= u(0)u(-1)\cdots u(n+1) \quad \text{при } n < 0, \\ c(n) &= (u(1)u(2)\cdots u(n))^{-1} \quad \text{при } n > 0. \end{aligned}$$

В случае, когда $c(n) \neq 0$ при $n \geq k$ и $c(n) = 0$ при $n < k$, имеем, положив $c(k) = 1$:

$$(2.3) \quad \exp_u x = x^k \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{u(k+1)\cdots u(k+n)} \right).$$

Отметим, что в первом случае $u(n) \neq 0$ при любом $n \in \mathbb{Z}$, а во втором $u(k) = 0$ и $u(n) \neq 0$ при $n > k$.

Область сходимости ряда (2.3) определяется асимптотикой $\Gamma_u(n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Например, если $\Gamma_u(n) \sim c\lambda^n$ при $n \rightarrow +\infty$, то ряд (2.3) сходится в области $0 < |x| < |\lambda|$. Если все коэффициенты ряда $\exp_u x$ отличны от нуля, то его область сходимости определяется асимптотикой $\Gamma_u(n)$ при $n \rightarrow +\infty$ и $n \rightarrow -\infty$. Например, если $\Gamma_u(n) \sim c_1\lambda_1^n$ при $n \rightarrow +\infty$ и $\Gamma_u(n) \sim c_2\lambda_2^n$ при $n \rightarrow -\infty$, то (если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$) ряд $\exp_u x$ сходится в области $|\lambda_2| < |x| < |\lambda_1|$.

2.2. Примеры. Укажем, исходя из оценок §1, области сходимости некоторых u -экспоненциальных рядов.

1. $u(\alpha) = q^{-\alpha}$. В этом случае $\Gamma_u(\alpha) = q^{-\alpha(\alpha-1)/2}$ и, значит,

$$\exp_u x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2} x^n.$$

Очевидно, что если $|q| < 1$, то ряд сходится при любом $x \neq 0$; если $|q| \geq 1$, то он всюду расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется простая связь между функцией $\exp_u x$ и θ -функцией Якоби:

$$\theta(w, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n w}.$$

Именно,

$$\exp_u x = \theta\left(w + \frac{\tau}{2}, \tau\right),$$

где q, x связаны с w и τ соотношениями

$$q = e^{2\pi i \tau}, \quad x = e^{2\pi i w}.$$

2. $u(\alpha)$ – лорановский полином от q^α , $0 < |q| < 1$. Представим $u(\alpha)$ в виде:

$$u(\alpha) = a q^{k\alpha} \prod_{j=1}^m (1 - q^{\alpha+\lambda_j}) = a' q^{l\alpha} \prod_{j=1}^m (1 - q^{-\alpha-\lambda_j}),$$

где $l = k + m$.

Если $u(n) = 0$ хотя бы для одного $n \in \mathbb{Z}$, то ряд $\exp_u x$ обрывается при $n \rightarrow -\infty$; он сходится тогда и только тогда, когда $k \leq 0$.

Если $u(n) \neq 0$ при $n \in \mathbb{Z}$, то ряд $\exp_u x$ бесконечен в обе стороны; он сходится тогда и только тогда, когда $l \leq 0$.

3. $u(\alpha) = \sum_{i=1}^k a_i r_i^\alpha$, где $0 < |r_1| < |r_2| < \dots < |r_k|$. Положив $u_+(\alpha) = a_k^{-1} r_k^{-\alpha} u(\alpha)$, $u_-(\alpha) = a_1^{-1} r_1^{-\alpha} u(\alpha)$, имеем:

$$u(\alpha) = a_k^{-1} r_k^{-\alpha} u_+(\alpha) = a_1^{-1} r_1^{-\alpha} u_-(\alpha),$$

где $u_+ \in A_+$, $u_- \in A_-$.

Если $u(n) = 0$ хотя бы для одного $n \in \mathbb{Z}$, то ряд $\exp_u x$ обрывается при $n \rightarrow -\infty$; он сходится тогда и только тогда, когда $|r_k| \geq 1$.

Если $u(n) \neq 0$ при $n \in \mathbb{Z}$, то ряд $\exp_u x$ бесконечен в обе стороны; он сходится тогда и только тогда, когда $|r_1| \geq 1$.

Рассмотрим частный случай:

$$u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}, \quad 0 < |r| < |s|.$$

В этом случае $u(0) = 0$, а потому ряд $\exp_u x$ не содержит членов с отрицательными степенями n . Он сходится в окрестности $x = 0$ тогда и только тогда, когда $|s| \geq 1$.

2.3. Функции $\exp_{r,s} x$, $\exp_q x$ и $\exp_{q^{-1}} x$. Рассмотрим случай $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$, где $0 < |r| < |s|$. Согласно п. 2.2 в этом случае u -экспоненциальный ряд сходится и задает регулярную в окрестности $x = 0$ функцию тогда и только тогда, когда $|s| \geq 1$. Обозначим эту функцию, нормированную условием $f(0) = 1$, через $\exp_{r,s} x$. Имеем:

$$\exp_{r,s} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma_{r,s}(n+1)},$$

где

$$\Gamma_{r,s}(\alpha) = s^{(\alpha-1)(\alpha-2)/2} (1-q)^{1-\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{1+n}}{1-q^{\alpha+n}}, \quad q = \frac{r}{s}.$$

Обозначим далее, в соответствии с традицией, функции $\exp_{q,1} x$ и $\exp_{1,q^{-1}} x$, где $|q| < 1$, соответственно через $\exp_q x$ и $\exp_{q^{-1}} x$:

$$\begin{aligned} \exp_q x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma_q(n+1)}, \\ \exp_{q^{-1}} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} x^n}{\Gamma_q(n+1)}, \end{aligned}$$

где $\Gamma_q(\alpha) = \Gamma_{q,1}(\alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Функции $\exp_q x$ и $\exp_{q^{-1}} x$ представимы в виде бесконечных произведений*

$$(2.4) \quad \exp_q x = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - (1-q)q^n x)^{-1},$$

$$(2.5) \quad \exp_{q^{-1}} x = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + (1-q)q^n x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции $f(x) = \exp_q x$ легко следует, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = f(x).$$

Отсюда имеем:

$$f(x) = (1 - (1-q)qx)^{-1} f(qx).$$

Применяя это равенство k раз, получаем

$$f(x) = \prod_{n=0}^k (1 - (1-q)q^n x)^{-1} f(q^k x).$$

Перейдя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем равенство (2.4). Аналогично, функция $f(x) = \exp_{q^{-1}} x$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = f(qx),$$

откуда $f(x) = (1 + (1-q)qx)f(qx)$ и, значит,

$$f(x) = (1 + (1-q)q^n x)f(q^k x).$$

Перейдя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем равенство (2.5).

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $\exp_{q^{-1}} x$ является целой, а $\exp_q x$ — мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $x = (1-q)^{-1}q^{-k}$, $k = 0, 1, \dots$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Функции $\exp_q x$ и $\exp_{q^{-1}} x$ связаны соотношением

$$\exp_q x \cdot \exp_{q^{-1}}(-x) = 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $0 < q < 1$. Тогда в области $|\arg x| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, имеет место оценка

$$(2.6) \quad |\exp_q x| = \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{\ln^2 |x|}{\ln q} + O(\ln |x|) \right\} \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим x в виде

$$(2.7) \quad x = (1-q)^{-1}q^{-k}\theta, \quad \theta = \theta_1 + i\theta_2, \quad q \leq |\theta| < 1.$$

Оценим сомножители произведения (2.4),

$$1 - (1-q)q^n x = 1 - q^{n-k}\theta.$$

Если $n < k$, то $|q^{n-k}\theta| \geq 1$, а потому

$$|1 - q^{n-k}\theta| \leq 1 + q^{n-k}|\theta| \leq 2q^{n-k}.$$

С другой стороны, из условия $\arg \theta > \varepsilon$ следует, что $|\theta_2| > c|\theta|$, где $c > 0$ зависит только от ε . Следовательно,

$$|1 - q^{n-k}\theta| \geq q^{n-k}|\theta_2| \geq cq^{n-k}|\theta| \geq cq^{n-k+1}.$$

Итак, при $n < k$ имеем

$$c^{-1}q^{n-k+1} \leq \prod_{n=0}^{k-1} |1 - (1-q)q^n x| \leq 2^k q^{-k(k+1)/2}.$$

Далее, при $n = k$ имеем в силу условия $\arg \theta > \varepsilon$

$$c'_1 < |1 - (1-q)q^n x| < c'_2,$$

где $c'_1 > 0$ и $c'_2 > 0$ зависят только от ε . Наконец, поскольку $|q^{n-k}\theta| < 1$ при $n > k$, то очевидно, что

$$c''_1 \leq \prod_{n=k+1}^{\infty} |1 - q^{n-k}\theta| \leq c''_2,$$

где $c''_1 > 0$ и $c''_2 > 0$ — некоторые константы. В результате для $\exp_q x$ получаем следующую оценку:

$$C_2 2^{-k} q^{k(k+1)/2} \leq |\exp_q x| \leq C_1 c^{-k} q^{k(k-1)/2},$$

C_1, C_2, c — положительные константы, а k связано с x соотношением (2.7). Отсюда непосредственно следует (2.6).

СЛЕДСТВИЕ. Функция $\exp_q x$ ограничена на каждом луче $\arg x = \text{const}$, отличном от полуоси $0 < x < \infty$.

2.4. Связь с гипергеометрическими рядами от одной переменной. Рассмотрим случаи когда $u(\alpha)$ — рациональная функция от α и когда $u(\alpha)$ — рациональная функция от q^α .

Пусть $u(\alpha)$ — рациональная функция от α . Представим $u(\alpha)$ в виде:

$$u(\alpha) = c \frac{(\alpha + \mu_1 - 1) \cdots (\alpha + \mu_s - 1)}{(\alpha + \lambda_1 - 1) \cdots (\alpha + \lambda_r - 1)},$$

и пусть для простоты $c = 1$. Тогда имеем:

$$\Gamma_u(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + \mu_1 - 1) \cdots \Gamma(\alpha + \mu_s - 1)}{\Gamma(\alpha + \lambda_1 - 1) \cdots \Gamma(\alpha + \lambda_r - 1)}.$$

Следовательно,

$$(2.8) \quad \exp_u x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\Gamma(n + \lambda_1) \cdots \Gamma(n + \lambda_r)}{\Gamma(n + \mu_1) \cdots \Gamma(n + \mu_s)} x^n.$$

Здесь λ_i, μ_j играют роль параметров. Если $\lambda_i \notin \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r$, то все члены этого ряда конечны. Ряд (2.8) сходится в окрестности $x = 0$ тогда и только тогда, когда $r \leq s$ и хотя бы одно из чисел μ_i – целое (в этом случае ряд обрывается при $n \rightarrow -\infty$). Если, например, $\mu_s = 0$, то имеем:

$$\exp_u x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \lambda_1) \cdots \Gamma(n + \lambda_r)}{\Gamma(n + \mu_1) \cdots \Gamma(n + \mu_{s-1})} \frac{x^n}{n!}.$$

Этот ряд, с точностью до множителя, зависящего только от λ_i, μ_j , совпадает с обобщенным гипергеометрическим рядом (по другому: рядом Похгаммера), см. [10]:

$${}_rF_{s-1} \left(\begin{matrix} \lambda_1, \dots, \lambda_r \\ \mu_1, \dots, \mu_{s-1} \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_r)_n}{(\mu_1)_n \cdots (\mu_{s-1})_n} \frac{x^n}{n!},$$

где $(\lambda)_n = \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + n - 1)$ при $n = 1, 2, \dots$, $(\lambda)_0 = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $u(\alpha)$ – рациональная функция от q^α , где $0 < |q| < 1$. Представим $u(\alpha)$ в виде:

$$u(\alpha) = c \frac{(1 - q^{\alpha + \mu_1 - 1}) \cdots (1 - q^{\alpha + \mu_s - 1})}{(1 - q^{\alpha + \lambda_1 - 1}) \cdots (1 - q^{\alpha + \lambda_r - 1})},$$

и пусть для простоты $c = 1$. Тогда имеем:

$$\Gamma_u(\alpha) = \frac{\Gamma_v(\alpha + \mu_1 - 1) \cdots \Gamma_v(\alpha + \mu_s - 1)}{\Gamma_v(\alpha + \lambda_1 - 1) \cdots \Gamma_v(\alpha + \lambda_r - 1)},$$

где $v(\alpha) = 1 - q^\alpha$, и, следовательно, см. § 1,

$$(2.9) \quad \Gamma_v(\alpha) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^{k+\alpha})^{-1}.$$

Таким образом,

$$(2.10) \quad \exp_u x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\Gamma_v(n + \lambda_1) \cdots \Gamma_v(n + \lambda_r)}{\Gamma_v(n + \mu_1) \cdots \Gamma_v(n + \mu_s)} x^n,$$

где $\Gamma_v(\alpha)$ задается равенством (2.9). Здесь, как и в предыдущем случае, λ_i, μ_j играют роль параметров.

Все члены ряда (2.10) конечны при условии, что $q^{k+\lambda_i} \neq 1$ при $k \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r$.

Если $q^{k+\mu_i} = 1$ хотя бы для одной пары $k \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, s$, то ряд (2.10) обрывается при $n \rightarrow -\infty$. Так как при этом его коэффициенты ограничены, то в отличие от

классического ряда Похгаммера ряд (2.10) сходится в окрестности $x = 0$ при любых значениях r и s . В частности, при $\mu_s = 1$ получаем следующий ряд, сходящийся в окрестности $x = 0$:

$$\exp_u x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_v(n + \lambda_1) \cdots \Gamma_v(n + \lambda_r)}{\Gamma_v(n + \mu_1) \cdots \Gamma_v(n + \mu_{s-1})} \frac{x^n}{\Gamma_v(n + 1)}.$$

Положив в нем $e^{\lambda_i} = \rho_i$, $e^{\mu_i} = \sigma_i$, получаем ряд, совпадающий, с точностью до множителя, с базисным рядом Гейне [35]:

$${}_r F_{s-1} \left[\begin{matrix} \rho_1, \dots, \rho_r \\ \sigma_1, \dots, \sigma_{s-1} \end{matrix} \middle| x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho_1)_{q,n} \cdots (\rho_r)_{q,n}}{(\sigma_1)_{q,n} \cdots (\sigma_{s-1})_{q,n} (q)_{q,n}} x^n,$$

где $(\rho)_{q,n} = (1 - \rho)(1 - \rho q) \cdots (1 - \rho q^{n-1})$.

Исследуем условия сходимости ряда (2.10) при μ_i общего положения, т.е. в случае когда этот ряд бесконечен в обе стороны. Уже отмечалось, что при $n \rightarrow \infty$ коэффициенты ряда ограничены. С другой стороны, согласно п. 1.2,

$$\Gamma_m(n + \alpha) \sim a(\alpha) q^{\frac{1}{2}[n^2 - n(2\alpha - 1)]} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty.$$

Таким образом, для коэффициентов ряда (2.10) имеет место оценка:

$$c(n) \sim a q^{bn^2 + cn} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty,$$

где $b = \frac{1}{2}(r - s)$, $c = \frac{1}{2}(\sum(2\mu_i - 1) - \sum(2\lambda_i - 1))$. Отсюда следует, что при $r > s$ ряд сходится в окрестности $x = 0$, а при $r < s$ он всюду расходится. При $r = s$ сходимость или расходимость ряда определяется числом c . Именно, легко убедиться, что при $\operatorname{Re} c < 0$ ряд сходится в области $|q^{-c}| < |x| < 1$; а в противном случае он всюду расходится.

Обобщением предыдущего примера является ряд

$$(2.11) \quad {}_r \Phi_s \left[\begin{matrix} \lambda_1, \dots, \lambda_r \\ \mu_1, \dots, \mu_s \end{matrix} \middle| x \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_{u_1}(n + \lambda_1) \cdots \Gamma_{u_r}(n + \lambda_r)}{\Gamma_{u_{r+1}}(n + \mu_1) \cdots \Gamma_{u_{r+s}}(n + \mu_s)} x^n,$$

где $u_i(\alpha) = s_i^\alpha - r_i^\alpha$, $0 < |r_i| < |s_i|$.

Согласно §1 имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{u_i}(\alpha) &= s_i^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q_i^{\alpha+k})^{-1}, \quad \text{где } q_i = \frac{r_i}{s_i}; \\ \Gamma_{u_i}(n + \alpha) &\sim c_1 s_i^{\frac{1}{2}[n^2 + (2\alpha-1)n]} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \\ \Gamma_{u_i}(n + \alpha) &\sim c_2 r_i^{\frac{1}{2}[n^2 + (2\alpha-1)n]} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Отсюда для коэффициентов $c(n)$ ряда (2.11) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} c(n) &\sim a_1 b_1^{n^2} c_1^n \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \\ c(n) &\sim a_2 b_2^{n^2} c_2^n \quad \text{при } n \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \prod_{i=1}^r s_i^{\frac{1}{2}} \prod_{i=r+1}^{r+s} s_i^{-\frac{1}{2}}, & b_2 &= \prod_{i=1}^r r_i^{\frac{1}{2}} \prod_{i=r+1}^{r+s} r_i^{-\frac{1}{2}}, \\ c_1 &= \prod_{i=1}^r s_i^{\frac{1}{2}(2\lambda_i-1)} \prod_{i=r+1}^{r+s} s_i^{-\frac{1}{2}(2\mu_i-r-1)}, & c_2 &= \prod_{i=1}^r r_i^{\frac{1}{2}(2\lambda_i-1)} \prod_{i=r+1}^{r+s} r_i^{-\frac{1}{2}(2\mu_i-r-1)}. \end{aligned}$$

Следствием этих оценок являются следующие утверждения.

1°. Если ряд обрывается при $n \rightarrow -\infty$, то он сходится в окрестности $x = 0$ при $b_1 \leq 1$ и расходится для всех x при $b_1 > 1$. При этом, если $b_1 < 1$, то он сходится для всех $x \neq 0$, а если $b_1 = 1$ – то он сходится в области $0 < |x| < |c_1|^{-1}$.

2°. Если ряд не обрывается, то при $b_1 < 1, b_2 > 1$ он сходится при любом $x \neq 0$ и расходится, если хотя бы одно из чисел b_1, b_2 больше 1. В случаях $b_1 = 1, b_2 \leq 1$ и $b_1 \leq 1, b_2 = 1$ сходимость ряда зависит от значений c_1 и c_2 .

§ 3. Операторы u -дифференцирования и u -экспоненты

3.1. Операторы ∂_u и δ_u . Переход от классического анализа к q -анализу основан на замене оператора дифференцирования $\partial = d/dx$ оператором q -дифференцирования ∂_q :

$$(\partial_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}.$$

В теории квантовых групп обычно используют другой вариант оператора q -дифференцирования:

$$(\partial'_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{x(q - q^{-1})}.$$

Обобщением этих двух операторов является оператор (r, s) -дифференцирования:

$$(\partial_{r,s} f)(x) = \frac{f(rx) - f(sx)}{x(r-s)},$$

где r, s – произвольные отличные от нуля и не равные между собой числа.

Заметим, что оператор $\partial_{r,s}$ действует на степенные функции x^α по формуле:

$$\partial_{r,s} x^\alpha = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s} x^{\alpha-1},$$

и этим действием он вполне определяется.

Введем класс операторов более общего вида, включающий в себя как операторы d/dx , так и операторы $\partial_{r,s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем оператором u -дифференцирования, где $u(\alpha)$ – произвольная целая аналитическая функция, и обозначим через ∂_u линейный оператор в пространстве аналитических функций, действующий на степенные функции x^α по формуле:

$$\partial_u x^\alpha = u(\alpha) x^{\alpha-1}.$$

В частности, функции $u(\alpha) = \alpha$ отвечает оператор d/dx , а функции $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$ – оператор $\partial_{r,s}$.

Отметим, что определенные так операторы ∂ удовлетворяют коммутационному соотношению

$$\left[\partial, x \frac{d}{dx} \right] = \partial.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через δ_u , где $u(\alpha)$ – произвольная целая аналитическая функция, линейный оператор в пространстве аналитических функций, действующий на степенные функции x^α по формуле:

$$\delta_u x^\alpha = u(\alpha) x^\alpha.$$

В частности, функции $u(\alpha) = \alpha$ отвечает оператор $x \frac{d}{dx}$.

В силу определения операторы ∂_u и δ_u связаны соотношением:

$$\delta_u = x \partial_u.$$

Очевидно, что операторы δ_u , отвечающие различным функциям u , перестановочны между собой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если

$$u(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n$$

– разложение в ряд целой функции $u(\alpha)$, то

$$\delta_u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n.$$

По этой причине естественно обозначать оператор δ_u также через $u \left(x \frac{d}{dx} \right)$ и называть $u(\alpha)$ символом этого оператора.

- ПРИМЕРЫ. 1. Если $u(\alpha) = P(\alpha)$, где P – произвольный полином, то $\delta_u = P\left(x \frac{d}{dx}\right)$.
 2. Если $u(\alpha) = \sum a_i q_i^\alpha$, то оператор δ_u задается формулой: $(\delta_u f)(x) = \sum a_i f(q_i x)$.

3.2. Свойства операторов ∂_u и δ_u . Перечислим несколько свойств операторов ∂_u и δ_u , которые следуют непосредственно из их определения.

1. Если $u(\alpha) = c_1 u_1(\alpha) + c_2 u_2(\alpha)$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, то

$$\partial_u = c_1 \partial_{u_1} + c_2 \partial_{u_2}, \quad \delta_u = c_1 \delta_{u_1} + c_2 \delta_{u_2}.$$

2. Для любых целых функций u_1, u_2

$$\delta_{u_1} u_2 = \delta_{u_1} \delta_{u_2}, \quad \partial_{u_1} u_2 = \partial_{u_1} \circ x \circ \partial_{u_2}.$$

3. Если $v(\alpha) = u(\alpha + c)$, то

$$\delta_v = x^{-c} \circ \delta_u \circ x^c, \quad \partial_v = x^{-c} \circ \partial_u \circ x^c.$$

4. Если $\varphi(x) = f(cx)$, то

$$(\delta\varphi)(x) = (\delta f)(cx), \quad (\partial\varphi)(x) = c(\partial f)(cx).$$

3.3. u -экспоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем u -экспонентами или u -экспонентами, ассоциированными с оператором ∂_u , аналитические функции $f(x)$, инвариантные относительно ∂_u :

$$(3.1) \quad \partial_u f = f.$$

Если $\partial_u = d/dx$, то, с точностью до множителя, функция $\exp x$ является единственным решением уравнения (3.1). Для произвольных операторов ∂_u имеется, вообще говоря, бесконечное множество линейно независимых решений уравнения (3.1). В этом параграфе будут построены различные классы таких решений.

Сначала найдем формальные решения уравнения (3.1), заданные формальными рядами вида

$$(3.2) \quad f_\alpha(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) x^{n+\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Подставив этот ряд в уравнение, получаем следующее соотношение для его коэффициентов:

$$(3.3) \quad u(n + \alpha) c(n) = c(n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда следует, что при фиксированном α ненулевое решение вида (3.2) уравнения (3.1) существует тогда и только тогда, когда в последовательности $\alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + n, \dots$ содержится не более чем конечное число нулей функции u .

Если $u(\alpha + k) \neq 0$ при любом $k \in \mathbb{Z}$, то все коэффициенты ряда (3.2) отличны от нуля, и в предположении, что $c(0) = 1$, они задаются равенствами

$$(3.4) \quad \begin{aligned} c(n) &= u(\alpha)u(\alpha - 1) \cdots u(\alpha - n + 1) \quad \text{при } n < 0, \\ c(n) &= (u(\alpha + 1) \cdots u(\alpha + n))^{-1} \quad \text{при } n > 0. \end{aligned}$$

Если же последовательность $\alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + n, \dots$ содержит хотя бы один нуль функции u , то пусть $k \in \mathbb{Z}$ – наибольшее число, для которого $u(\alpha + k) = 0$. Тогда, приняв $c(k) = 1$, получаем:

$$(3.5) \quad f_\alpha(x) = x^{\alpha+k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha+k+n}}{u(\alpha+k+1) \cdots u(\alpha+k+n)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предположим, что для заданной функции u существует u -гамма-функция $\Gamma_u(\alpha)$, и что функция $\Gamma_u(\alpha)$ не имеет нулей. Обозначим через $\exp_u(\alpha, x)$ следующий формальный ряд, зависящий от α как от параметра:

$$(3.6) \quad \exp_u(\alpha, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x^{n+\alpha}}{\Gamma_u(n+\alpha+1)}.$$

В частности, $\exp_u(0, x) = \exp_u x$, где $\exp_u x$ – u -экспоненциальный ряд, определенный в § 2.

Очевидно, этот ряд отличен от нуля тогда и только тогда, когда $\Gamma_u(n+\alpha+1) \neq \infty$ хотя бы для одного $n \in \mathbb{Z}$ или, что равносильно, $u(n+\alpha+1) \neq 0$ хотя бы для одного $n \in \mathbb{Z}$.

Из определения оператора ∂_u и функции Γ_u следует, что ряд (3.6) удовлетворяет уравнению (3.1). Значит, при сделанном предположении об u -гамма-функции любой формальный ряд вида (3.2), удовлетворяющий уравнению (3.1), совпадает с точностью до множителя с рядом $\exp_u(\alpha, x)$.

Сходимость или расходимость ряда $\exp_u(\alpha, x)$ зависит от асимптотики $u(\alpha \pm n)$ при $n \rightarrow \infty$ и от расположения нулей функции $u(\alpha)$.

Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{C}$ возможны два варианта.

1) Множество $\{\alpha + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ содержит нули функции $u(\alpha)$. В этом случае ряд $\exp_u(\alpha, x)$ обрывается при $n \rightarrow -\infty$, и его сходимость или расходимость зависит только от поведения $u(\alpha + n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Если, например,

$$u(\alpha + n) \sim a\lambda^{\alpha+n} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

то очевидно, что ряд $\exp_u(\alpha, x)$ сходится в окрестности $x = 0$ тогда и только тогда, когда $|\lambda| \geq 1$. При этом его радиус сходимости равен ∞ , если $|\lambda| > 1$, и $|a|$ в случае, когда $|\lambda| = 1$.

2) Множество $\{\alpha + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ не содержит нулей функции $u(\alpha)$. В этом случае все коэффициенты $c(n)$ ряда отличны от нуля, и его сходимость или расходимость зависит от поведения $u(\alpha + n)$ при $n \rightarrow \pm\infty$. Если, например,

$$u(\alpha + n) \sim a\lambda^{\alpha+n} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \quad u(\alpha + n) \sim b\mu^{\alpha+n} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty,$$

то ряд имеет непустую область сходимости только в следующих двух случаях:

$$\text{a) } |\lambda| \geq 1, |\mu| \geq 1 \text{ и } |\lambda\mu| > 1; \quad \text{b) } |\lambda| = |\mu| \geq 1, |b| < |a|.$$

При этом, если $|\lambda| > 1, |\mu| > 1$, он сходится при всех $x \neq 0$; если $|\lambda| = 1, |\mu| > 1$ — при $0 < |x| < |a|$; если $|\lambda| > 1, |\mu| = 1$ — при $|x| > |b|$; и если $|\lambda| = |\mu| = 1$ — при $|b| < |x| < |a|$.

ПРИМЕР.

$$u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}, \quad 0 < |r| < |s|.$$

В этом случае нулями функции $u(\alpha)$ являются точки $\alpha_k = \frac{2\pi i k}{\ln(r/s)}, k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, если $\alpha = \alpha_k$, то ряд $\exp_u(\alpha, x)$ сходится тогда и только тогда, когда $|s| \geq 1$. Если $\alpha \neq \alpha_k, k \in \mathbb{Z}$, то ряд $\exp_u(\alpha, x)$ сходится тогда и только тогда, когда $|r| \geq 1$. Таким образом, если $|s| < 1$, то ряд $\exp_u(\alpha, x)$ расходится при любом значении параметра α .

3.4. Описание всех u -экспонент при $u(\alpha) = \frac{q^{\pm\alpha} - 1}{q^{\pm 1} - 1}, 0 < |q| < 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. В случае, когда $u(\alpha) = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$ или $u(\alpha) = \frac{1 - q^{-\alpha}}{1 - q^{-1}}$, где $0 < |q| < 1$, любая u -экспонента имеет, соответственно, вид

$$f(x) = c(x) \exp_q x \quad \text{и} \quad f(x) = c(x) \exp_{q^{-1}} x,$$

где $\exp_q x$ и $\exp_{q^{-1}} x$ — функции, определенные в п. 2.3, а $c(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию периодичности:

$$c(qx) = c(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для определенности случай $u(\alpha) = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$. Согласно п. 3.3 функция $\exp_q x$ является u -экспонентой. Из условия $c(qx) = c(x)$ следует, что $f(x) = c(x) \exp_q x$ также является u -экспонентой. Обратно, пусть $f(x)$ — произвольная u -экспонента. Положим $c(x) = f(x) / \exp_q x$, т.е. $f(x) = c(x) \exp_q x$. Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} (\partial_u f)(x) &= x^{-1}(q - 1)^{-1} [c(qx) \exp_q(qx) - c(x) \exp_q x] \\ &= c(qx) \exp_q(x) + \frac{c(qx) - c(x)}{(q - 1)x} \exp_q(x). \end{aligned}$$

С другой стороны, $(\partial_u f)(x) = c(x) \exp_q x$. Отсюда получаем:

$$(c(qx) - c(x))(1 + x^{-1}(q - 1)^{-1}) \exp_q x = 0;$$

следовательно, $c(qx) = c(x)$. Для случая $u(\alpha) = \frac{1 - q^{-\alpha}}{1 - q^{-1}}$ доказательство аналогично.

3.5. u -экспоненты при $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$, где $0 < |r| < |s|$. Рассмотрим формальные ряды $\exp_u(\alpha, x)$, формально удовлетворяющие уравнению $\partial_u f = f$, где $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$. Согласно п. 3.3, если $|s| \geq 1$, то при $\alpha = \frac{2\pi i k}{\ln(r/s)}$, $k \in \mathbb{Z}$, ряд $\exp_u(\alpha, x)$ сходится в окрестности $x = 0$ и задает тем самым u -экспоненту. Если, кроме того, $|r| \geq 1$, то ряд $\exp_u(\alpha, x)$ сходится при любом α ; таким образом, в этом случае имеется континуальное семейство линейно независимых u -экспонент. Если $|s| \leq 1$, то u -экспонент, заданных сходящимися рядами $\exp_u(\alpha, x)$, не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любого u ряды $\exp_u(\alpha, x)$ удовлетворяют условию $\exp_u(\alpha + k, x) = \exp_u(\alpha, x)$ для любых $\alpha \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Легко убедиться, что в случае, когда $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$, для любого $\alpha_k = \frac{2\pi i k}{\ln(r/s)}$, $k = 0, 1, \dots$, выполняется соотношение:

$$\exp_u(\alpha + \alpha_k, x) = c_k x^{\alpha_k} \exp(\alpha, s^{-\alpha_k} x),$$

где $c_k = (1 - q)^{\alpha_k s^{-\alpha_k(\alpha_k - 1)/2}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$, где $0 < r < s < 1$, то существует u -экспонента, заданная интегралом

$$(3.7) \quad F_c(x) = \int_{-\infty + ic}^{+\infty + ic} \exp\left(\frac{t^2}{2 \ln s} - \frac{t}{2}\right) \exp_q(xe^t) dt,$$

где $q = r/s$, $\exp_q$ — q -экспонента, определенная в п. 2.3, c — произвольное вещественное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (2.6) для функции $\exp_q x$ легко следует, что интеграл (3.7) сходится для всех точек x , не принадлежащих лучу $l_c = \{x \in \mathbb{C} \mid \arg x = -c\}$, и задает аналитическую функцию на комплексной плоскости с разрезом вдоль этого луча.

Убедимся, что F_c является экспонентой. Для этого заметим, что если $f(x) = \exp_q(ax)$, то

$$(\partial_u f)(x) = \frac{\exp_q(qsax) - \exp_q(sax)}{(q - 1)sx} = af(sx).$$

В силу этого соотношения имеем:

$$(\partial_u F_c)(x) = \int_{-\infty + ic}^{+\infty + ic} \exp\left(\frac{t^2}{2 \ln s} + \frac{t}{2}\right) \exp_q(sxe^t) dt.$$

Сделав замену переменной $t \mapsto t - \ln s$, получаем, что $\partial_u F_c = F_c$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Легко убедиться, что для любых близких $c_1, c_2, c_1 \leq c_2$, и любого $x \in \mathbb{C}$ такого, что $\arg x$ не принадлежит отрезку $[c_1, c_2]$, мы имеем $F_{c_1}(x) = F_{c_2}(x)$. С другой стороны, функции F_c и $F_{c+2\pi}$ имеют одну и ту же область определения, но $F_c \neq F_{c+2\pi}$. Таким образом, равенство (3.7), где c принимает любые вещественные значения, задает многозначную аналитическую функцию F на $\mathbb{C}$ с точкой ветвления $x = 0$.

2) Несложным вычислением получаем, что при фиксированном $q = r/s$

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} (2\pi |\ln s|)^{-1/2} F_c(x) = \exp_q(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если u – функция, определенная в предложении 3.2, то для нее существует u -экспонента, заданная следующим сходящимся рядом:

$$(3.8) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp \left(\frac{\ln^2((1-q)q^n x)}{2 \ln s} + \frac{1}{2} \ln^2((1-q)q^n x) \right),$$

где $c_0 = 0$ и $c_n = (-1)^n q^{n(n+1)/2} \prod_{k=1}^n (1-q^k)^{-1}$ при $n > 0$.

Доказательство следует из предложения 3.2. Именно, обозначим через $P(t)$ подынтегральную функцию в (3.7). Поскольку полюсами $\exp_q t$ являются точки $(1-q)^{-1}q^{-n}$, то $P(t)$ имеет полюсы в точках t_n , определенных равенствами

$$xe^{t_n} = (1-q)^{-1}q^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. $t_n = -\ln((1-q)q^n x)$. Отсюда следует, что при достаточно большом $c > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} (F_{-c} - F_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{t=t_n} P(t).$$

Так как левая часть этого равенства является u -экспонентой, то u -экспонентой является и стоящий справа ряд. Найдем явное выражение для его коэффициентов. Из представления (2.4) функции $\exp_q x$ в виде бесконечного произведения следует, что вычет $\exp_q x$ в точке $(1-q)^{-1}q^{-n}$ равен $\prod_{k=1}^n (1-q^k) \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{-1}$, т.е. равен

$$c(-1)^n q^{n(n+1)/2} \prod_{k=1}^n (1-q^k)^{-1}, \quad \text{где } c = \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{-1}.$$

Таким образом, с точностью до множителя, полученный ряд имеет вид (3.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Если $f(x)$ – произвольная u -экспонента, где

$$u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s},$$

то функции

$$(3.9) \quad f_k(x) = x^{\frac{2\pi i k}{\ln q}} f\left(s^{-\frac{2\pi i k}{\ln q}} x\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $q = r/s$, также являются u -экспонентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $\frac{2\pi i k}{\ln q} = \alpha$, имеем:

$$(\partial_u f_k)(x) = x^\alpha \frac{r^\alpha f(rs^{-\alpha}x) - s^\alpha f(ss^{-\alpha}x)}{(r-s)x}.$$

Поскольку $(r/s)^\alpha = 1$, отсюда следует:

$$(\partial_u f_k)(x) = x^\alpha \frac{f(rs^{-\alpha}x) - f(ss^{-\alpha}x)}{(r-s)s^{-\alpha}x} = x^\alpha f(s^{-\alpha}x) = f_k(x).$$

Итак, если $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r-s}$, то с каждой u -экспонентой $f(x)$ связано линейное пространство u -экспонент, линейно порожденное функциями $f_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$. Элементы этого пространства назовем *экспонентами, родственными u -экспоненте f* .

СЛЕДСТВИЕ. В случае, когда $s = q^k$, $k \in \mathbb{Z}$, или, что то же самое, $r^k = s^{k+1}$, пространство u -экспонент, родственных u -экспоненте $f(x)$, состоит из функций вида $c(x)f(x)$, где $c(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию периодичности.

Отсюда и из предложения 3.1 следует, что если $(r, s) = (q, 1)$ или $(1, q^{-1})$, то все u -экспоненты родственны соответственно экспоненте $\exp_q x$ или $\exp_{q^{-1}} x$.

Добавление. Приведем другое доказательство предложения 3.3, не опирающееся на предложение 3.2. Введем функции

$$(3.10) \quad \varphi_n(x) = \exp\left(\frac{\ln^2((1-q)q^n x)}{2 \ln s} + \frac{1}{2} \ln^2((1-q)q^n x)\right),$$

зависящие от $q = r/s$ и s как от параметров. Заметим, что $\varphi_n(x) = \varphi_0(q^n x)$.

Из определения φ_n непосредственно следует:

ЛЕММА. *Функции φ_n удовлетворяют соотношениям:*

$$\begin{aligned} \varphi_n(sx) &= s(1-q)q^n x \varphi_n(x), \\ \varphi_n(rx) &= s(1-q)q^{n+1} x \varphi_{n+1}(x). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ.

$$(3.11) \quad \partial_u \varphi_n = q^n \varphi_n - q^{n+1} \varphi_{n+1}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \partial_u \varphi_n &= s^{-1}(1-q)^{-1}x^{-1}(\varphi_n(sx) - \varphi_n(rx)) \\ &= s^{-1}(1-q)^{-1}x^{-1}(s(1-q)q^n x \varphi_n(x) - s(1-q)q^{n+1} x \varphi_{n+1}(x)) \\ &= q^n \varphi_n - q^{n+1} \varphi_{n+1}. \end{aligned}$$

Будем искать u -экспоненту в форме ряда

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Подставив этот формальный ряд в уравнение $\partial_u \varphi = \varphi$, получаем на основании (3.11) следующее соотношение для коэффициентов c_n :

$$c_n(1 - q^n) = -c_{n-1}q^n.$$

Решая его, получаем, положив $c_0 = 1$,

$$c_n = (-1)^n q^{n(n+1)/2} \prod_{k=1}^n (1 - q^k)^{-1} \quad \text{при } n > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ряд (3.8) сходится и задает u -экспоненту также и в случае, когда $s > r > 1$.

В самом деле, в этом случае из явных выражений для c_n и φ_n вытекают оценки:

$$|c_n| = O\left(\exp\left\{\frac{\ln q}{2} n^2\right\}\right), \quad |u_n(x)| = O\left(\exp\left\{\frac{\ln^2 q}{2 \ln s} n^2\right\}\right).$$

Значит,

$$|c_n u_n(x)| = O(e^{an^2}),$$

где

$$a = \frac{1}{2} \left(\ln q + \frac{\ln^2 q}{\ln s} \right) = \frac{1}{2} \frac{\ln q \ln r}{\ln s}.$$

Так как $a < 0$ при $s > r > 1$, отсюда следует утверждение.

Отметим, что если $r < 1 < s$, то из тех же оценок следует расходимость ряда (3.8).

3.6. u -экспоненты при $u(\alpha) = \alpha s^{\alpha-1}$, $s > 0$. Функция $u(\alpha)$ возникает как предел функции $\frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$ при $r \rightarrow s$. Отвечающий ей оператор ∂_u имеет следующий вид:

$$(3.12) \quad \partial_u f(x) = f'(sx).$$

Если $s = 1$, то единственным, с точностью до множителя, решением уравнения (3.12) является функция $\exp x$. Здесь будет рассмотрен случай $s \neq 1$. Будет показано, что в этом случае имеется бесконечно много решений уравнения (3.12), и будут описаны некоторые из этих решений.

Заметим, что u -гамма-функция имеет следующий вид:

$$\Gamma_u(\alpha) = s^{(\alpha-1)(\alpha-2)/2} \Gamma(\alpha),$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера. Таким образом, формальное решение $f_s(\alpha, x) = \text{exр}_u(\alpha, x)$ уравнения (3.12) задается формулой:

$$(3.13) \quad f_s(\alpha, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^{-(n+\alpha)(n+\alpha-1)/2} \frac{x^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

Очевидно, что при $s > 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ ряд (3.13) сходится при всех $x \neq 0$ и задает тем самым u -экспоненту. В частности, имеется единственная, с точностью до множителя, u -экспонента, регулярная в точке $x = 0$:

$$(3.14) \quad f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^{-n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}.$$

При $s < 1$ u -экспонент вида (3.13) не существует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Функция $f_s(x)$, заданная сходящимся рядом (3.14), имеет следующее интегральное представление:*

$$(3.15) \quad f_s(x) = (2\pi \ln s)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t + \frac{i}{2} \ln s)^2}{2 \ln s} + e^{it} x\right) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция f_s , заданная равенством (3.15), целая, и легко убедиться, что при $x = 0$ значения функций (3.15) и (3.14) совпадают (равны 1). Поэтому достаточно убедиться, что $f'_s(sx) = f_s(x)$. Имеем:

$$\begin{aligned} f'_s(sx) &= (2\pi \ln s)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t + \frac{i}{2} \ln s)^2}{2 \ln s} + it + itsx\right) dt \\ &= (2\pi \ln s)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t - \frac{i}{2} \ln s)^2}{2 \ln s} + e^{i(t-i \ln s)} x\right) dt \\ &= (2\pi \ln s)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty - i \ln q}^{+\infty - i \ln q} \exp\left(-\frac{(t + \frac{i}{2} \ln s)^2}{2 \ln s} + e^{it} x\right) dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что интеграл (3.15) сохраняется при замене пути интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на $(-\infty - ic, +\infty - ic)$, где c – любое вещественное число. Следовательно, $f'_s(sx) = f_s(x)$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Установим связь между u -экспонентами $f_s(\alpha, x)$, заданными рядом (3.13), и θ -функцией $\theta(z, \tau)$:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z).$$

Определим функцию $\varphi_s(\alpha, x)$ равенством

$$\varphi_s(\alpha, x) = \int_0^\infty e^{-t} f_s(\alpha, tx) dt.$$

Так как $\int_0^\infty e^{-t} t^{n+\alpha} dt = \Gamma(n + \alpha + 1)$, то

$$\begin{aligned}\varphi_s(\alpha, x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^{-(n+\alpha)(n+\alpha-1)/2} x^{n+\alpha} \\ &= s^{-\alpha(\alpha-1)/2} x^\alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^{-n^2/2} (s^{-\alpha+1/2} x)^n.\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с выражением для $\theta(z, \tau)$, заключаем:

$$s^{\alpha(\alpha-1)/2} x^{-\alpha} \varphi_s(\alpha, x) = \theta(z, \tau),$$

где z, τ связаны с x, s соотношениями:

$$q = e^{-2\pi i \tau}, \quad q^{-\alpha+1/2} x = e^{2\pi i z}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. При $s < 1$ существует u -экспонента, заданная следующим интегралом:

$$(3.16) \quad F_c(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{t^2}{2 \ln s} - \frac{t}{2} + x e^t\right) dt,$$

где c — произвольное вещественное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что (3.16) удовлетворяет уравнению $\partial_u f = f$, легко проверить непосредственно. Отметим, что (3.16) можно получить также из (3.7) предельным переходом при $r \rightarrow s$ (поскольку $\lim_{q \rightarrow 1} \exp_q x = \exp x$).

Подобно функции, заданной интегралом (3.7), равенство (3.16) при произвольном c задает многозначную функцию и тем самым определяет бесконечно много u -экспонент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. $\lim_{s \rightarrow 1+0} f_s(x) = \exp x$, $\lim_{s \rightarrow 1-0} (2\pi \ln s)^{-1/2} F_c(s, x) = \exp x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство очевидно. Докажем второе равенство. Заменой переменных $t \mapsto t |\ln s|^{1/2}$ получаем

$$(2\pi \ln s)^{-1/2} F_c(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty+ic'}^{+\infty+ic'} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} |\ln s| + x e^{t |\ln s|}\right) dt.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} (2\pi \ln s)^{-1/2} F_c(s, x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty+ic'}^{+\infty+ic'} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + x\right) dt = \exp x.$$

§ 4. Многомерные аналоги

В §§ 1–3 мы связали с каждой аналитической функцией $u(\alpha)$ одного переменного u -гамма-функцию Γ_u , формальный ряд u -экспоненциального типа и (при условии, что u – целая функция) линейный оператор ∂_u в пространстве аналитических функций. Перенесем эти понятия на многомерный случай.

В многомерном варианте вместо одной функции $u(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, фиксируется последовательность

$$u = (u_1, \dots, u_N)$$

аналитических функций на $\mathbb{C}^N$.

4.1. Функция E_u . Обобщим на многомерный случай функцию E_u , связанную с u -гамма-функцией одного переменного соотношением

$$E_u(\alpha) = \Gamma_u(\alpha + 1).$$

Таким образом, E_u – это решение функционального уравнения

$$E_u(\alpha) = u(\alpha)E_u(\alpha - 1).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $E_u(\alpha)$, где $u = (u_1, \dots, u_N)$ – набор аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, ненулевую функцию на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющую следующей системе уравнений:

$$(4.1) \quad E_u(\alpha) = u_j(\alpha)E_u(\alpha - e_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

где $\{e_j\}$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^N$.

Очевидно, что функция $E_u(\alpha)$, если она существует, определена однозначно с точностью до множителя – периодической функции с периодом 1 относительно каждого переменного α_j .

ЗАМЕЧАНИЕ. Любая аналитическая функция $F(\alpha)$ является функцией $E_u(\alpha)$, $u = (u_1, \dots, u_N)$, где $u_j(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{F(\alpha - e_j)}$. См. в [57] описание всех функций $F(\alpha)$, для которых $\frac{F(\alpha)}{F(\alpha - e_j)}$, $j = 1, \dots, N$, – рациональные функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для существования ненулевого решения уравнений (4.1) необходимо, чтобы функции u_j удовлетворяли следующим соотношениям:

$$(4.2) \quad u_i(\alpha)u_j(\alpha - e_i) = u_j(\alpha)u_i(\alpha - e_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Доказательство очевидно.

В дальнейшем предполагается, что условие (4.2) всегда выполнено.

Очевидно, что условия (4.2) заведомо выполняются в случае, когда для каждого $j = 1, \dots, N$ функция u_j зависит только от α_j , и в этом случае решением уравнений (4.1) является функция

$$E_u(\alpha) = \prod_{j=1}^N E_{u_j}(\alpha_j) = \prod_{j=1}^N \Gamma_{u_j}(\alpha_j + 1),$$

где Γ_{u_j} – гамма-функция одного переменного, введенная в §1.

Подобно функциям одного переменного, функции E_u обладают следующими свойствами.

1) Если $v(\alpha) = u(\alpha + c)$, $c \in \mathbb{C}^N$, то

$$E_v(\alpha) = E_u(\alpha + c).$$

2) Если последовательность $u = (u_1, \dots, u_N)$ удовлетворит условиям (4.2), то последовательность $v = (v_1, \dots, v_N)$, где $v_j(\alpha) = u_j(-\alpha + e_j)$, $j = 1, \dots, N$, также удовлетворит условиям (4.2), и

$$E_v(\alpha) = E_u^{-1}(-\alpha).$$

3) Для любых $u = (u_1, \dots, u_N)$ и $v = (v_1, \dots, v_N)$ имеем:

$$E_{u \cdot v}(\alpha) = E_u(\alpha) E_v(\alpha), \quad E_{u \cdot v^{-1}}(\alpha) = E_u(\alpha) E_v^{-1}(\alpha),$$

где $u \cdot v = (u_1 v_1, \dots, u_N v_N)$.

4.2. Функция $[u(\alpha)]_k$. Обозначим для любой последовательности аналитических функций на $\mathbb{C}^N$ $u = (u_1, \dots, u_N)$, удовлетворяющих условию (4.2), и любого $k \in \mathbb{Z}^N$:

$$(4.3) \quad [u(\alpha)]_k = \frac{E_u(\alpha)}{E_u(\alpha - k)}.$$

В частности, $[u(\alpha)]_0 = 1$, $[u(\alpha)]_{e_j} = u_j(\alpha)$, $j = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для любых $k', k'' \in \mathbb{Z}^N$ имеем:

$$(4.4) \quad [u(\alpha)]_{k'+k''} = [u(\alpha)]_{k'} [u(\alpha - k')]_{k''}.$$

В самом деле, (4.4) следует из тождества:

$$\frac{E_u(\alpha)}{E_u(\alpha - k' - k'')} = \frac{E_u(\alpha)}{E_u(\alpha - k')} \frac{E_u(\alpha - k')}{E_u(\alpha - k' - k'')}.$$

СЛЕДСТВИЕ. $[u(\alpha)]_{-k} = ([u(\alpha + k)]_k)^{-1}$.

Найдем для любого $k \neq 0$ явное выражение функции $[u(\alpha)]_k$ через функции $u_j(\alpha)$, $j = 1, \dots, N$. В простейшем случае $N = 1$ имеем

$$\begin{aligned} [u(\alpha)]_k &= u(\alpha)u(\alpha - 1) \cdots u(\alpha - k + 1) \quad \text{при } k > 0, \\ [u(\alpha)]_k &= (u(\alpha)u(\alpha + 1) \cdots u(\alpha + |k|))^{-1} \quad \text{при } k < 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $N > 1$. Назовем путем из 0 в $k = (k_1, \dots, k_N)$ произвольную последовательность элементов из $\mathbb{Z}^N$,

$$k^0, k^1, \dots, k^r,$$

такую, что $k^0 = 0$, $k^r = k$ и $k^i = k^{i-1} + \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$, $i = 1, \dots, r$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, а σ — некоторое отображение из $[1, r]$ в $[1, N]$. Заметим, что кратчайший путь из 0 в k имеет длину $r = |k| = \sum |k_i|$, и для любого такого пути $k_{\sigma(i)} \neq 0$ и $\varepsilon_i = \text{sign } k_{\sigma(i)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для любого пути $k^0, \dots, k^r$ из 0 в k имеем:

$$(4.5) \quad [u(\alpha)]_k = \prod_{i=1}^r v_{\sigma(i)}(\alpha),$$

где $v_{\sigma(i)}(\alpha) = u_{\sigma(i)}(\alpha - k^{i-1})$ при $\varepsilon_i = 1$; $v_{\sigma(i)}(\alpha) = u_{\sigma(i)}^{-1}(\alpha - k^i)$ при $\varepsilon_i = -1$.

В самом деле, (4.5) следует из тождества:

$$\frac{E_u(\alpha)}{E_u(\alpha - k)} = \prod_{i=1}^r \frac{E_u(\alpha - k^{i-1})}{E_u(\alpha - k^i)} = \prod_{i=1}^r \frac{E_u(\alpha - k^{i-1})}{E_u(\alpha - k^{i-1} - \varepsilon_i e_{\sigma(i)})}.$$

4.3. Ряды $\text{exp}_u x$. Пусть $u = (u_1, \dots, u_N)$ — произвольный набор аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих соотношениям (4.2), и E_u — ассоциированная с этим набором функция, т.е. решение системы уравнений (4.1). Предположим, что

$$(4.6) \quad E_u(\alpha) \neq 0 \text{ при } \alpha \in \mathbb{Z}^N; \quad E_u(\alpha) \neq \infty \text{ хотя бы для одного } \alpha \in \mathbb{Z}^N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем u -экспоненциальным рядом и обозначим через $\text{exp}_u x$ следующий формальный ряд:

$$(4.7) \quad \text{exp}_u x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{x^k}{E_u(k)}, \quad x \in \mathbb{C}^N,$$

где $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N}$.

Условия (4.6) означают, что все коэффициенты этого ряда конечны, и по крайней мере один из них отличен от нуля. Так как функция E_u определена с точностью до множителя — периодической функции с периодом 1 относительно каждого аргумента α_j , то равенство (4.7) определяет ряд $\text{exp}_u x$ с точностью до постоянного множителя.

В специальном случае, когда каждая функция u_j , $j = 1, \dots, N$, зависит только от α_j , имеем: $\exp_u x = \prod_{j=1}^N \Gamma_{u_j}(\alpha_j + 1)$. Поэтому

$$\exp_u x = \prod_{j=1}^N \sum_{k_j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_j^{k_j}}{\Gamma_{u_j}(k_j + 1)} \right) = \prod_{j=1}^N \exp_{u_j} x_j,$$

где $\exp_{u_j} x_j - u_j$ -экспоненциальный ряд одной переменной.

Если все коэффициенты ряда $\exp_u x$ отличны от нуля, то, нормировав E_u условием $E_u(0) = 1$, мы можем представить ряд $\exp_u x$ в следующем виде:

$$(4.8) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{x^k}{[u(k)]_k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} [u(0)]_{-k} x^k,$$

где $[u(k)]_k$ задается равенством (4.5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Любой формальный ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c(k) x^k, \quad x \in \mathbb{C}^N,$$

где $c(\alpha)$ – произвольная аналитическая функция на $\mathbb{C}^N$, является рядом $\exp_u x$, где $u = (u_1, \dots, u_N)$, $u_j(\alpha) = \frac{c(\alpha)}{c(\alpha - e_j)}$.

4.4. Операторы δ_v и $\partial_{v,j}$. Свяжем с каждой целой аналитической функцией $v(\alpha)$ на $\mathbb{C}^N$ линейный оператор δ_v в пространстве аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, действующий на мономы $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$, $\alpha \in \mathbb{C}^N$, по формуле

$$(4.9) \quad \delta_v a^\alpha = v(\alpha) a^\alpha.$$

Очевидно, что операторы δ_v , отвечающие различным функциям v , перестановочны между собой и обладают следующими свойствами:

- 1°. $\delta_{v'v''} = \delta_{v'} \delta_{v''}$ для любых целых функций v' и v'' ;
- 2°. если $v'(\alpha) = v(\alpha + c)$, $c \in \mathbb{C}^N$, то

$$\delta_{v'} = a^{-c} \circ \delta_v \circ a^c;$$

- 3°. если $\varphi(a) = f(ca)$, $c \in \mathbb{C}^N$, где $ca = (c_1 a_1, \dots, c_N a_N)$, то

$$(\delta_v \varphi)(a) = (\delta_v f)(ca).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобно одномерному случаю естественно обозначать δ_v через

$$v\left(a \frac{\partial}{\partial a}\right),$$

где $a \frac{\partial}{\partial a} = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, a_N \frac{\partial}{\partial a_N}\right)$, и называть $v(\alpha)$ символом оператора δ_v .

Определим, далее, линейные операторы $\partial_{v,j}$ в пространстве аналитических функций на $\mathbb{C}^N$ формулой

$$(4.10) \quad \partial_{v,j} = a_j^{-1} \circ \delta_v, \quad j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, операторы $\partial_{v,j}$ действуют на мономы $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$ по формуле:

$$\partial_{v,j} a^\alpha = v(\alpha) a^{\alpha - e_j}.$$

Отметим несколько элементарных свойств операторов $\partial_{v,j}$:

- 1°. $\left[\partial_{v,j}, a_i \frac{\partial}{\partial a_i}\right] = \delta_{i,j} \partial_{v,j}$;
- 2°. если $v(\alpha) = u(\alpha + c)$, $c \in \mathbb{C}^N$, то $\partial_{v,j} = a^{-c} \circ \partial_{u,j} \circ a^c$;
- 3°. если $\varphi(a) = f(ca)$, $c \in \mathbb{C}^N$, то $(\partial_{v,j} \varphi)(a) = c_j (\partial_{v,j} f)(ca)$.

Пусть $u = (u_1, \dots, u_N)$ – произвольная последовательность целых аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих условию (4.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Свяжем с набором $u = (u_1, \dots, u_N)$ набор $\partial_u = (\partial_1, \dots, \partial_N)$ линейных операторов в пространстве аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, определенных равенством:

$$\partial_j = \partial_{u,j} = a_j^{-1} \circ \delta_{u_j}; \quad j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, операторы ∂_j действуют на мономы $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$ по формуле:

$$(4.11) \quad \partial_j a^\alpha = u_j(\alpha) a^{\alpha - e_j}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что условие (4.2) на функции u_j эквивалентно условию перестановочности операторов ∂_j .

Заметим, что если для каждого $j = 1, \dots, N$ функция u_j зависит только от a_j , то операторы ∂_j совпадают с введенными в §3 операторами на $\mathbb{C}$, действующими только на свое переменное a_j .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Для любого вектора $l = (l_1, \dots, l_N)$ с целыми неотрицательными координатами имеем:

$$(4.12) \quad \prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j} = a^{-l} \circ \delta_v,$$

где $v(\alpha) = [u(\alpha)]_l$.

В самом деле, легко убедиться, что $(\prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j}) a^\alpha = a^{-l} \delta_v a^\alpha$ для любого монома a^α . Отсюда следует утверждение.

4.5. u -экспоненты. Пусть $\partial_j = \partial_{u_j}$, j – операторы, определенные в п. 4.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем u -экспонентами функции на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$(4.13) \quad \partial_j f = f, \quad j = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}^N$ формальный ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{a^{k+\lambda}}{E_u(k+\lambda)}$$

формально удовлетворяет системе (4.13). Следовательно, при условии сходимости он задает u -экспоненту. В частности, u -экспоненциальный ряд

$$\exp_u a = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{a^k}{E_u(k)}$$

задает u -экспоненту при условии, что он сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если для каждого $j = 1, \dots, N$ функция u_j зависит только от a_j , то уравнениям (4.13) удовлетворяет функция $f(a) = \prod_{j=1}^N f_{u_j}(a_j)$, где f_{u_j} – u_j -экспоненты, введенные в § 3, т.е. решения уравнения $\partial_{u_j} f_{u_j} = f_{u_j}$.

4.6. Примеры. 1°. $u_j(\alpha) = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, $j = 1, \dots, N$. В этом случае $E_u(\alpha) = \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_N + 1)$,

$$\exp_u a = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{a^k}{\Gamma(k_1 + \dots + k_N + 1)}, \quad \partial_j = a_j^{-1} \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial a_i}.$$

Уравнения (4.13) имеют вид:

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial a_i} \right) f = a_j f, \quad j = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что ненулевых решений эти уравнения не имеют.

2°. $u_j(\alpha) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_N) \alpha_j$, $j = 1, \dots, N$. В этом случае

$$\begin{aligned} E_u(\alpha) &= \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_N + 1) \prod_{j=1}^N \Gamma(\alpha_j + 1), \\ \exp_u a &= \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \frac{a^k}{k_1! \dots k_N! (k_1 + \dots + k_N)!}, \\ \partial_j &= \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial a_j}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Ряд $\exp_u a$ сходится при любом $a \in \mathbb{C}^N$ и задает одно из решений системы (4.13).

3°. $u_j(\alpha) = q^{-\alpha_1 - \dots - \alpha_N}$, $j = 1, \dots, N$. В этом случае $E_u(\alpha) = q^{-\beta(\beta+1)/2}$, где $\beta = \sum \alpha_j$,

$$\exp_u a = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} q^{-(\sum k_i)(\sum k_i + 1)/2} a^k,$$

$(\partial_{u_j} f)(a) = a_j^{-1} f(q^{-1}a)$. Уравнения (4.13) имеют вид:

$$f(q^{-1}a) = a_j f(a), \quad j = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что ненулевых решений эти уравнения не имеют.

4°. $u_j(\alpha) = \frac{1 - q^{a_j}}{1 - q} q^{-\alpha_1 - \dots - \alpha_N}$, $j = 1, \dots, N$, где $|q| < 1$. В этом случае

$$E_u(\alpha) = q^{-(\sum k_i)(\sum k_i + 1)/2} a^k \prod_{j=1}^N \Gamma_q(\alpha_j + 1)$$

(определение функции Γ_q см. в § 1),

$$\exp_u a = \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \left(q^{-(\sum k_i)(\sum k_i + 1)/2} \prod_{i=1}^N \frac{a_i^{k_i}}{\Gamma_q(k_i + 1)} \right),$$

$(\partial_j f)(a) = a_j^{-1} (1 - q)^{-1} (f(q^{-1}a_1, \dots, q^{-1}a_N) - f(q^{-1}a_1, \dots, a_j, \dots, q^{-1}a_N))$. Система уравнений (4.13) приводится к виду:

$$f(a_1, \dots, a_N) = f(a_1, \dots, qa_j, \dots, a_N) = q(1 - q)a_j f(qa), \quad j = 1, \dots, N.$$

Ряд $\exp_u a$ сходится при всех $a \in \mathbb{C}^N$ и задает одно из решений этой системы.

§ 5. Ряды гипергеометрического типа

5.1. Случай одной переменной. Пусть $u(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, — произвольная аналитическая функция, $\Gamma_u(\alpha)$ — ассоциированная с ней u -гамма-функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем рядами гипергеометрического типа, связанными с u (по-другому: Γ -рядами), следующие формальные ряды от $x \in \mathbb{C}$:

$$(5.1) \quad f_k(\lambda, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x^{kn+\lambda}}{\Gamma_u(kn + \lambda + 1)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x^{kn+\lambda}}{E_u(kn + \lambda)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В частности, при $k = 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ ряд (5.1) совпадает с u -экспоненциальным рядом $\exp_u x$.

Очевидно, что Γ -ряды обладают следующими свойствами:

- 1°. $f_k(\lambda, x) = f_{-k}(\lambda, x)$,
- 2°. $f_k(\lambda + k, x) = f_k(\lambda, x)$,
- 3°. $f_k(\lambda, x) = \sum_{s=0}^{l-1} f_{kl}(\lambda + s, x)$ для любого $l = 1, 2, \dots$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Между Γ -рядами и u -экспоненциальными рядами имеется следующая связь:

$$(5.2) \quad f_k(\lambda, x) = x^\lambda \exp_v y = x^\lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{y^n}{\Gamma_v(n+1)},$$

где $y = x^k$, $v(\alpha) = [u(k\alpha + \lambda)]_k$, т.е.

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v(\alpha) &= \prod_{i=0}^{k-1} u(k\alpha + \lambda - i) & \text{при } k > 0, \\ v(\alpha) &= \left(\prod_{i=1}^{|k|} u(k\alpha + \lambda + i) \right)^{-1} & \text{при } k < 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что ряд $f_k(\lambda, x)$ представим в виде (5.2), где функция $v(\alpha)$ определяется из условия $\Gamma_v(\alpha + 1) = \Gamma_u(k\alpha + \lambda + 1)$. Значит,

$$v(\alpha) = \frac{\Gamma_v(\alpha + 1)}{\Gamma_v(\alpha)} = \frac{\Gamma_u(k\alpha + \lambda + 1)}{\Gamma_u(k\alpha + \lambda + 1 - k)}.$$

Отсюда следуют выражения (5.3) для $v(\alpha)$.

ПРИМЕР. $u(\alpha) = \frac{r^\alpha - s^\alpha}{r - s}$, где $0 < |r| < |s|$. В этом случае

$$f_1(\lambda, x) = x^\lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x^{n+\lambda}}{\Gamma_{r,s}(n + \lambda + 1)},$$

где (см. п. 2.3)

$$\Gamma_{r,s}(\alpha) = s^{(\alpha-1)(\alpha-2)/2} (1-q)^{1-\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{1+n}}{1-q^{\alpha+n}}, \quad q = \frac{r}{s}.$$

Согласно п. 3.3 этот ряд имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $r \geq 1$,
- 2) $s \geq 1$ и $\lambda = \frac{2\pi i k'}{\ln q} + k''$, где $k' \in \mathbb{Z}$, $k'' = 0, -1, -2, \dots$.

Отметим, что в случае 2) ряд обрывается при $n \rightarrow -\infty$.

5.2. Многомерные ряды гипергеометрического типа. Фиксируем произвольную последовательность $u = (u_1, \dots, u_N)$ аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих соотношениям:

$$(5.4) \quad u_i(\alpha) u_j(\alpha - e_i) = u_j(\alpha) u_i(\alpha - e_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Обозначим, в соответствии с п. 4.1, через $E_u(\alpha)$ решение системы уравнений:

$$E_u(\alpha) = u_i(\alpha) E_u(\alpha - e_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ – произвольная подрешетка, т.е. подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Z}^N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем рядом гипергеометрического типа (по-другому: Γ -рядом), ассоциированным с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\lambda \in \mathbb{C}^N$, следующий формальный ряд:

$$(5.5) \quad f_\Lambda(\lambda, a) = \sum_{l \in \Lambda} \frac{a^{l+\lambda}}{E_u(l+\lambda)}, \quad a \in \mathbb{C}^N,$$

где $a^{l+\lambda} = a_1^{l_1+\lambda_1} \dots a_N^{l_N+\lambda_N}$.

В частности, при $\Lambda = \mathbb{Z}^N$ имеем:

$$f_{\mathbb{Z}^N}(\lambda, a) = a^\lambda \exp_v a,$$

где $v(\alpha) = u(\alpha + \lambda)$, а $\exp_v a$ — v -экспоненциальный ряд.

Очевидно, что ряды $f_\Lambda(\lambda, a)$ обладают следующими свойствами:

- 1°. $f_\Lambda(\lambda + l, a) = f_\Lambda(\lambda, a)$ для любого $l \in \Lambda$,
- 2°. если $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, то $f_{\Lambda_2}(\lambda, a) = \sum_{l \in \Lambda_2/\Lambda_1} f_{\Lambda_1}(\lambda + l, a)$.

В частности,

$$(5.6) \quad a^\lambda \exp_v a = \sum_{l \in \mathbb{Z}^N/\Lambda} f_\Lambda(\lambda + l, a), \quad v(\alpha) = u(\alpha + \lambda)$$

для любой подрешетки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$. Из (5.6) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Если при λ общего положения ряд $\exp_v a$ сходится в некоторой области $U \subset \mathbb{C}^N$, то в этой области сходится и ряд $f_\Lambda(\lambda, a)$, где $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ — любая подрешетка.

5.3. Приведенные ряды гипергеометрического типа. Фиксируем произвольный базис в подрешетке $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$:

$$l^i = (l_1^i, \dots, l_N^i), \quad i = 1, \dots, n;$$

$n = \text{rang } \Lambda$. Таким образом,

$$\Lambda = \{k_1 l^1 + \dots + k_n l^n \mid k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Из (5.5) непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Любой Γ -ряд $f_\Lambda(\lambda, a)$ представим в виде

$$(5.7) \quad f_\Lambda(\lambda, a) = a^\lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{x^k}{E_u(k_1 l^1 + \dots + k_n l^n + \lambda)}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$,

$$(5.8) \quad x_i = a^{l^i} = a_1^{l_1^i} \dots a_N^{l_N^i}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем формальный ряд

$$(5.9) \quad F_{\Lambda}(\lambda, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{x^k}{E_u(k_1 l^1 + \dots + k_n l^n + \lambda)}, \quad x \in \mathbb{C}^n,$$

приведенным рядом гипергеометрического типа (по другому: приведенным Γ -рядом), ассоциированным с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\lambda \in \mathbb{C}^N$.

Подчеркнем, что этот ряд зависит и от выбора базиса $l^1, \dots, l^n$ в Λ .

В силу предложения 5.3 Γ -ряд $f_{\Lambda}(\lambda, a)$ и приведенный Γ -ряд $F_{\Lambda}(\lambda, x)$ связаны соотношением:

$$(5.10) \quad f_{\Lambda}(\lambda, a) = a^{\lambda} F_{\Lambda}(\lambda, x),$$

где $x \in \mathbb{C}^n$ выражается через $a \in \mathbb{C}^N$ по формулам (5.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Приведенные Γ -ряды являются рядами экспоненциального типа:*

$$F_{\Lambda}(\lambda, x) = \exp_v x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{x^k}{E_v(k)},$$

где последовательность $v = (v_1, \dots, v_N)$ функций на $\mathbb{C}^n$ определяется из соотношений

$$(5.11) \quad v_i(\beta) = [u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \lambda)]_{l^i}$$

(определение символа $[u(\alpha)]_l$ см. в п. 4.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив

$$(5.12) \quad E_v(\beta) = E_u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \lambda),$$

получаем для функций v_i в последовательности $v = (v_1, \dots, v_N)$ следующие выражения:

$$v_i(\beta) = \frac{E_v(\beta)}{E_v(\beta - e_i)} = \frac{E_u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \lambda)}{E_u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \lambda - l^i)} = [u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \lambda)]_{l^i}.$$

Рассмотрим случай, когда каждая функция u_j зависит только от α_j . В этом случае

$$E_u(\alpha) = \Gamma_{u_1}(\alpha_1 + 1) \cdots \Gamma_{u_N}(\alpha_N + 1),$$

где Γ_{u_i} – гамма-функции одного переменного, а потому приведенный Γ -ряд имеет вид:

$$(5.13) \quad F_{\Lambda}(\lambda, a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{x^k}{\Gamma_{u_1}(\mu_1(k) + \lambda_1 + 1) \cdots \Gamma_{u_N}(\mu_N(k) + \lambda_N + 1)},$$

где

$$(5.14) \quad \mu_j(k) = k_1 l_j^1 + \cdots + k_n l_j^n, \quad j = 1, \dots, N.$$

В частности,

$$F_{\mathbb{Z}^N}(\lambda, x) = \prod_{i=1}^N \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_i^{k+\lambda_i}}{\Gamma_{u_i}(k+\lambda_i+1)} \right).$$

Выражения (5.11) для функций $v_i(\beta)$ сводятся в этом случае к следующим:

$$v_i(\beta) = \prod_{j=1}^N v_{i,j}(\beta),$$

где $v_{i,j}(\beta) = 1$, если $l_j^i = 0$,

$$v_{i,j}(\beta) = \prod_{s=0}^{l_j^i-1} u_j(\mu_j(\beta) + \lambda_j - s), \quad \text{если } l_j^i > 0,$$

$$v_{i,j}(\beta) = \left(\prod_{s=1}^{|l_j^i|} u_j(\mu_j(\beta) + \lambda_j + s) \right)^{-1}, \quad \text{если } l_j^i < 0.$$

5.4. Замечание о сходимости Г-рядов. В “классическом” случае, когда все Γ_{u_i} суть гамма-функции Эйлера, условия сходимости рядов (5.13) были подробно исследованы, см., например, [5]. Было установлено, что любой Г-ряд с непустой областью сходимости обрывается при $k_i \rightarrow -\infty$ или $k_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, \dots, N$. Установлено, что если $L \subset \mathbb{C}^N$ – линейное подпространство, порожденное подрешеткой Λ , и $\alpha \in \mathbb{C}^N$ – произвольный фиксированный вектор, то среди рядов $f_\Lambda(\lambda, a)$, где $\lambda \in \alpha + L$, лишь конечное число рядов имеет непустую область сходимости.

В общем случае эти факты, вообще говоря, не имеют места. Рассмотрим, например, случай, когда $u_i(\alpha) = q_i^{-\alpha}$, $0 < |q_i| < 1$, $i = 1, \dots, N$. В этом случае $\Gamma_{u_i}(\alpha) = q_i^{-\alpha(\alpha-1)/2}$, а потому

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_i^{k+\lambda_i}}{\Gamma_{u_i}(k+\lambda_i+1)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_i^{(k+\lambda_i)(k+\lambda_i+1)/2} a_i^{k+\lambda_i}.$$

Очевидно, что при любом λ_i этот ряд сходится для всех $a_i \neq 0$. Отсюда следует, что в приведенном примере ряды (5.13) нигде не обрываются и сходятся для каждого $a \in \mathbb{C}^N$ с отличными от нуля координатами.

5.5. Г-ряды, ассоциированные с подрешетками Λ ранга 1. Рассмотрим случай, когда подрешетка $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ порождена одним вектором $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^N$, т.е. $\Lambda = \{nl \mid n \in \mathbb{Z}\}$. В этом случае приведенный Г-ряд, ассоциированный с Λ и вектором $\lambda \in \mathbb{C}^N$, имеет вид:

$$(5.15) \quad F_\Lambda(\lambda, x) = \exp_v x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x^k}{\Gamma_v(k+1)}, \quad x \in \mathbb{C},$$

где $v(\beta)$ – функция одного переменного, заданная равенством

$$v(\beta) = [u(\beta l + \lambda)]_l.$$

Если каждая из функций $u_i(\alpha)$ зависит только от α_i , $i = 1, \dots, N$, то

$$(5.16) \quad F_\Lambda(\lambda, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x^k}{\Gamma_{u_1}(kl_1 + \lambda_1 + 1) \cdots \Gamma_{u_N}(kl_N + \lambda_N + 1)},$$

а функции $v(\beta)$ имеют вид:

$$v(\beta) = \prod_{j=1}^N v_j(\beta),$$

где

$$v_j(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } l_j = 0, \\ \prod_{s=0}^{l_j-1} u_j(\beta l + \lambda_j - s) & \text{при } l_j > 0, \\ \left(\prod_{s=1}^{|l_j|} u_j(\beta l + \lambda_j + s) \right)^{-1} & \text{при } l_j < 0. \end{cases}$$

Приведем критерий сходимости рядов (5.16).

Не нарушая общности, можно считать, что все координаты вектора l отличны от нуля. Предположим, что функции Γ_{u_i} не имеют нулей и обладают следующей асимптотикой:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \Gamma_{u_i}(\alpha + n + 1) &\sim c'_i \sigma_i^n \mu_i^{n^2} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \\ \Gamma_{u_i}(\alpha + n + 1) &\sim c''_i \tau_i^n \nu_i^{n^2} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где $c'_i, c''_i, \sigma_i, \tau_i, \mu_i, \nu_i$ зависят, вообще говоря, от α . Этим свойством обладают, например, функции $\Gamma_{u_i} = \Gamma_{u_i}^+$, отвечающие $u_i(\alpha) = \sum_{j=1}^p \gamma_{ij} r_{ij} \alpha$, в частности, отвечающие $u_i(\alpha) = \frac{r_i^\alpha - s_i^\alpha}{r_i - s_i}$. Так, если $u_i(\alpha) = \frac{r_i^\alpha - s_i^\alpha}{r_i - s_i}$, где $0 < |r_i| < |s_i|$, $i = 1, \dots, N$, то $\Gamma_{u_i} = \Gamma_{r_i, s_i}$ (см. п. 1.6) и, на основании п. 1.6, имеем следующие выражения для $\sigma_i, \tau_i, \mu_i, \nu_i$ в (5.17):

$$\sigma_i = (s_i - r_i)^{-1} s_i^{\alpha-1/2}, \quad \tau_i = (r_i - s_i)^{-1} s_i^{\alpha-1/2}, \quad \mu_i = s_i^{1/2}, \quad \nu_i = r_i^{1/2}.$$

Из (5.17) вытекают следующие оценки для коэффициентов $c(k)$ ряда (5.16):

$$\begin{aligned} c(k) &\sim c'_+ \sigma_+^{-k} \rho_+^{-k^2} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \\ c(k) &\sim c''_- \sigma_-^{-k} \rho_-^{-k^2} \quad \text{при } k \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \prod_{l_i > 0} \sigma_i^{l_i} \prod_{l_i < 0} \tau_i^{l_i}, & \sigma_- &= \prod_{l_i < 0} \sigma_i^{l_i} \prod_{l_i > 0} \tau_i^{l_i}, \\ \rho_+ &= \prod_{l_i > 0} \mu_i^{l_i^2} \prod_{l_i < 0} \nu_i^{l_i^2}, & \rho_- &= \prod_{l_i < 0} \mu_i^{l_i^2} \prod_{l_i > 0} \nu_i^{l_i^2}. \end{aligned}$$

Из этих оценок непосредственно вытекают следующие критерии сходимости ряда (5.16).

- 1°. Если ряд обрывается при $k \rightarrow -\infty$, то в случае $|\rho_+| > 1$ он сходится для всех $x \neq 0$; в случае $|\rho_+| = 1$ сходится в области $0 < |x| < |a_+|$; при $|\rho_+| < 1$ ряд всюду расходится.²
- 2°. Если ряд обрывается при $k \rightarrow +\infty$, то в случае $|\rho_-| > 1$ он сходится для всех $x \neq 0$; в случае $|\rho_-| = 1$ сходится в области $|x| > |a_-|$; при $|\rho_-| < 1$ ряд всюду расходится.
- 3°. Если ряд не обрывается ни при $k \rightarrow -\infty$, ни при $k \rightarrow +\infty$, то возможны следующие варианты:

Условия на $\rho_{\pm}$ и $a_{\pm}$	Область сходимости
$ \rho_+ > 1, \rho_- > 1$	$x \neq 0$
$ \rho_+ = 1, \rho_- > 1$	$0 < x < \sigma_+ $
$ \rho_+ > 1, \rho_- = 1$	$ x > \sigma_- $
$ \rho_+ = \rho_- = 1, \sigma_- < \sigma_+ $	$ \sigma_- < x < \sigma_+ $
$ \rho_+ = \rho_- = 1, \sigma_- \geq \sigma_+ $	всюду расходится
$ \rho_+ < 1$ или $ \rho_- < 1$	всюду расходится

5.6. u -аналоги гипергеометрического ряда Гаусса. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ – произвольная последовательность аналитических функций на $\mathbb{C}^4$, где u_i зависит только от одного аргумента α_i , и пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^4$ – подрешетка ранга 1, порожденная вектором $l = (-1, -1, 1, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем u -аналогами гипергеометрического ряда Гаусса приведенные Γ -ряды, ассоциированные с Λ и произвольным вектором $\lambda \in \mathbb{C}^4$, т.е. ряды вида

$$(5.18) \quad F(\lambda, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma_{u_1}(-k + \lambda_1 + 1) \Gamma_{u_2}(-k + \lambda_2 + 1) \Gamma_{u_3}(-k + \lambda_3 + 1) \Gamma_{u_4}(-k + \lambda_4 + 1)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *С точностью до множителя, зависящего только от λ_1, λ_2 , ряд (5.18) совпадает с рядом*

$$(5.19) \quad F(\lambda, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_{v_1}(k - \lambda_1) \Gamma_{v_2}(k - \lambda_2)}{\Gamma_{u_3}(k + \lambda_3 + 1) \Gamma_{u_4}(k + \lambda_4 + 1)} x^k,$$

где $v_i(\alpha) = u_i(-\alpha)$, $i = 1, 2$.

²Мы исключаем из рассмотрения случай, когда ряд обрывается и при $k \rightarrow -\infty$, и при $k \rightarrow +\infty$, и тем самым сводится к лорановскому полиному.

В самом деле, согласно п. 1.2 $\Gamma_{u_i}(\alpha) = \frac{\theta_i(\alpha)}{\Gamma_{v_i}(1-\alpha)}$, где $\theta_i(\alpha)$ – периодическая функция с периодом 1, и, значит,

$$\Gamma_{u_i}(-k + \lambda_i + 1) = \frac{\theta_i(\lambda_i)}{\Gamma_{v_i}(k - \lambda_i)}.$$

Отсюда следует утверждение.

Классический ряд Гаусса соответствует случаю, когда Γ_{u_i} суть гамма-функции Эйлера, $i = 1, 2, 3, 4$, и одно из чисел λ_3, λ_4 равно 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. При произвольном N естественно назвать Γ -ряды, ассоциированные с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ ранга 1, порожденной вектором $l = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, u -аналогами гипергеометрического ряда Похгаммера.

Рассмотрим случай $u_i(\alpha) = \frac{r_i^\alpha - s_i^\alpha}{r_i - s_i}$, где $0 < |r_i| < |s_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$. В этом случае условия сходимости ряда (5.18) следуют из критерия, приведенного в п. 5.4; достаточно заметить, что в обозначениях п. 5.5 мы имеем:

$$\begin{aligned} \rho_+ &= (r_1 r_2 s_3 s_4)^{1/2}, \quad \rho_- = (s_1 s_2 r_3 r_4)^{1/2}, \\ \sigma_+ &= c \rho_+^{2\alpha-1}, \quad \sigma_- = c^{-1} \rho_-^{2\alpha-1}, \end{aligned}$$

где $c = \frac{(s_1 - r_1)(s_2 - r_2)}{(s_3 - r_3)(s_4 - r_4)}$. Согласно приведенному критерию ряд $F_\Lambda(\lambda, x)$ при любом λ имеет непустую область сходимости, если $|\rho_+| \geq 1$, $|\rho_-| \geq 1$ и $|\rho_+ \rho_-| \neq 1$. Если же $|\rho_+| < 1$, $|\rho_-| < 1$, то ряд всюду расходится за исключением значений λ , при которых он сводится к лорановскому полиному.

В частности, если $s_i = 1$, $r_i = q_i$, $0 < |q_i| < 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, то сходящихся Γ -рядов не существует.

§ 6. Общие u -гипергеометрические системы

6.1. Определение общей гипергеометрической системы. Фиксируем произвольную последовательность

$$u = (u_1, \dots, u_N)$$

целых аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих соотношениям

$$(6.1) \quad u_i(\alpha) u_j(\alpha - e_i) = u_j(\alpha) u_i(\alpha - e_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Пусть $\partial_1, \dots, \partial_N$ – связанные с u линейные операторы в пространстве аналитических функций на $\mathbb{C}^N$; по определению (см. § 4) ∂_j действует на мономы $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$ по формуле

$$\partial_j a^\alpha = u_j(\alpha) a^{\alpha - e_j}.$$

Обозначим через Λ произвольную подрешетку в $\mathbb{Z}^N$ и через $L \subset \mathbb{C}^N$ – натянутое на Λ линейное подпространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем общей u -гипергеометрической системой, ассоциированной с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\beta \in \mathbb{C}^N/L$, следующую систему уравнений в пространстве функций на $\mathbb{C}^N$:

$$(6.2) \quad \prod_{j: l_j > 0} \partial_j^{l_j} f = \prod_{j: l_j < 0} \partial_j^{-l_j} f \quad \text{для любого } l = (l_1, \dots, l_N) \in \Lambda;$$

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^N \omega^j a_j \frac{\partial f}{\partial a_j} = \langle \omega, \beta \rangle f$$

для любого вектора $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^N) \in (\mathbb{C}^N)'$, ортогонального Λ . Голоморфные решения этой системы назовем *общими u -гипергеометрическими функциями на $\mathbb{C}^N$, ассоциированными с Λ и β* .

ЗАМЕЧАНИЕ. Система (6.2), (6.3) эквивалентна подсистеме из N уравнений, в которой l пробегает какой-либо базис в подрешетке Λ , а ω – какой-либо базис в подрешетке $\Lambda^\perp \subset (\mathbb{Z}^N)'$, ортогональной Λ .

Система (6.2), (6.3) для случая $\partial_j = \frac{\partial}{\partial a_j}$, $j = 1, \dots, N$, впервые была введена в [3] и исследована в ряде других работ. Была установлена ее голономность и были построены базисы в пространстве ее решений в форме рядов гипергеометрического типа и в форме интегралов. Отметим, что все классические гипергеометрические функции здесь возникают как частные случаи общих гипергеометрических функций при специальном выборе N и подрешетки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$.

Другая важная общая гипергеометрическая система, частные случаи которой возникают в q -анализе и теории квантовых групп, получается заменой операторов $\partial_j = \frac{\partial}{\partial a_j}$ операторами q -дифференцирования по a_j , $j = 1, \dots, N$: $(\partial_j f)(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{qt - t}$.

Более общий случай: $(\partial_j f)(t) = \frac{f(rt) - f(st)}{rt - st}$.

Представим уравнения (6.2) в другой, эквивалентной, форме. Для этого вначале представим векторы $l \in \Lambda$ в виде разностей векторов с целыми неотрицательными координатами:

$$l = l^+ - l^-,$$

где $l_j^+ = \frac{1}{2}(|l_j| + l_j)$, $l_j^- = \frac{1}{2}(|l_j| - l_j)$, $j = 1, \dots, N$. В этих обозначениях система (6.2) принимает вид:

$$(6.4) \quad \prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^+} f = \prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^-} f \quad \text{для любого } l = (l_1, \dots, l_N) \in \Lambda.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Система уравнений (6.4) эквивалентна следующей:

$$(6.5) \quad \delta_{v_l^+} f = a^l \delta_{v_l^-} f,$$

где

$$(6.6) \quad v_l^+(\alpha) = [u(\alpha)]_{l^+}, \quad v_l^-(\alpha) = [u(\alpha)]_{l^-},$$

δ_v – операторы, введенные в §4.

В самом деле, согласно (4.12),

$$\prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^+} = a^{-l^+} \delta_{v_l^+}, \quad \prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^-} = a^{-l^-} \delta_{v_l^-}.$$

Отсюда следует (6.5).

6.2. Приведенные u -гипергеометрические системы. Рассмотрим общую u -гипергеометрическую систему (6.2), (6.3) ассоциированную с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\beta \in \mathbb{C}^N / L$. Фиксируем произвольный вектор $\lambda \in \mathbb{C}^N$ в прообразе вектора β и произвольный базис

$$l^i = (l_1^i, \dots, l_N^i), \quad i = 1, \dots, n,$$

в подрешетке Λ . Положим

$$x_i = a^{l^i} = a_1^{l_1^i} \cdots a_N^{l_N^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Любое решение $f(a)$ системы (6.2), (6.3) представимо в виде:

$$(6.7) \quad f(a) = a^\lambda F(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varphi(a) = a^{-\lambda} f(a)$ и заметим, что функция a^λ удовлетворяет уравнениям (6.3). Поэтому, подставив в (6.3) выражение $f(a) = a^\lambda \varphi(a)$, получим:

$$\sum_{i=1}^N \omega^i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{для любого } \omega \in \Lambda^\perp.$$

Отсюда следует, что φ зависит только от $x_i = a^{l^i}$, $i = 1, \dots, n$, т.е. $\varphi(a) = F(x)$.

Подставив (6.7) в уравнения (6.5) u -гипергеометрической системы, где l пробегает векторы базиса $l^1, \dots, l^n$ в Λ , получим систему уравнений для функции F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем функции $F(x)$ на $\mathbb{C}^n$, $n = \text{rank } \Lambda$, связанные с u -гипергеометрическими функциями $f(a)$ соотношением (6.7), *приведенными u -гипергеометрическими функциями*, ассоциированными с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\lambda \in \mathbb{C}^N$. Систему уравнений, которой эти функции удовлетворяют, назовем *приведенной u -гипергеометрической системой*, ассоциированной с Λ и λ .

Найдем явный вид приведенной системы.

Поставим в соответствие исходному набору $u = (u_1, \dots, u_N)$ целых аналитических функций на $\mathbb{C}^N$ два набора

$$w^+ = (w_1^+, \dots, w_n^+), \quad w^- = (w_1^-, \dots, w_n^-)$$

целых аналитических функций на $\mathbb{C}^n$, заданных следующими равенствами:

$$(6.8) \quad \begin{aligned} w_i^+(\beta) &= [u(\beta_1 l^1 + \cdots + \beta_n l^n + \lambda)]_{(l^i)^+}, \\ w_i^-(\beta) &= [u(\beta_1 l^1 + \cdots + \beta_n l^n + \lambda)]_{(l^i)^-}, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n$.

В частности, если каждая функция $u_j(\alpha)$ зависит только от одного аргумента α_j , $j = 1, \dots, N$, то выражения (6.8) имеют вид:

$$\begin{aligned} w_i^+(\beta) &= \prod_{j: l_j^i > 0} \prod_{s=0}^{l_j^i - 1} u_j(\beta_1 l_j^1 + \cdots + \beta_n l_j^n + \lambda_j - s), \\ w_i^-(\beta) &= \prod_{j: l_j^i < 0} \prod_{s=0}{|l_j^i| - 1} u_j(\beta_1 l_j^1 + \cdots + \beta_n l_j^n + \lambda_j - s). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Приведенная u -гипергеометрическая система, ассоциированная с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\lambda \in \mathbb{C}^N$, имеет вид:*

$$(6.9) \quad \delta_{w_i^+} F = x_i \delta_{w_i^-} F, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $w_i^\pm$ — функции на $\mathbb{C}^n$, заданные равенствами (6.8), а $\delta_{w_i^\pm}$ — отвечающие им операторы в пространстве функций на $\mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим $f(a) = a^\lambda F(x)$ в уравнения (6.5), где l пробегает базис $l^1, \dots, l^n$ решетки Λ . Используя соотношение $\delta_u(a^\lambda F) = a^\lambda \delta_v F$, где $v(\alpha) = u(\alpha + \lambda)$, получаем:

$$\delta_{v_i^+} F = x_i \delta_{v_i^-} F, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$v_i^\pm(\alpha) = [u(\alpha + \lambda)]_{(l^i)^\pm},$$

а операторы $\delta_{v_i^\pm}$ действуют на F как на функцию от a . Убедимся, что $\delta_{w_i^\pm} F = \delta_{v_i^\pm} F$. Достаточно проверить это равенство для мономов x^β . Поскольку $x^\beta = a^{\beta_1 l^1 + \cdots + \beta_n l^n}$, то

$$\delta_{v_i^\pm} x^\beta = [u(\beta_1 l^1 + \cdots + \beta_n l^n + \lambda)]_{(l^i)^\pm} x^\beta = \delta_{w_i^\pm} x^\beta,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим специальный случай, когда целые функции u_j не имеют нулей. В этом случае функции w_i^- также не имеют нулей, и, значит, функции $(w_i^-)^{-1}$ являются целыми. Поэтому равенства (6.9) эквивалентны следующим:

$$(6.10) \quad \tilde{\partial}_i F = F, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\tilde{\partial}_i = x_i^{-1} \delta_{w_i}$, $w_i(\beta) = (w_i^-(\beta - e_i))^{-1} w_i^+(\beta)$. Согласно (4.4)

$$w_i(\beta) = [u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \lambda)]_i.$$

Из равенства (6.10) следует, что приведенная u -гипергеометрическая функция F является w -экспонентой на $\mathbb{C}^n$, где $w = (w_1, \dots, w_n)$.

6.3. Приведенные гипергеометрические системы, ассоциированные с решетками ранга 1. Если подрешетка $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ порождена одним вектором $l = (l_1, \dots, l_N) \in \mathbb{Z}^N$, то приведенные u -гипергеометрические функции F являются функциями одного переменного, а система (6.9) состоит из одного уравнения:

$$\delta_{w^+} F = x \delta_{w^-} F,$$

где $w^+(\beta) = [u(\beta l + \lambda)]_{l^+}$, $w^-(\beta) = [u(\beta l + \lambda)]_{l^-}$.

В частности, если каждая функция $u_j(\alpha)$ зависит только от одного аргумента α_j , то

$$\begin{aligned} w_i^+(\beta) &= \prod_{j: l_j^i > 0} \prod_{s=0}^{l_j^i - 1} u_j(\beta l_j + \lambda_j - s), \\ w_i^-(\beta) &= \prod_{j: l_j^i < 0} \prod_{s=0}{|l_j^i| - 1} u_j(\beta l_j + \lambda_j - s). \end{aligned}$$

Приведем явные выражения операторов $\delta_{w^\pm}$ для случая, когда $u_j(\alpha) = \alpha_j$, и для случая, когда $u_j(\alpha) = \frac{r_j^{\alpha_j} - s_j^{\alpha_j}}{r_j - s_j}$, $j = 1, \dots, N$.

1°. В “классическом” случае $u_j(\alpha) = \alpha_j$ функции $v_j(\beta) = u_j(\beta l_j + \lambda_j - s) = \beta l_j + \lambda_j - s$ отвечает оператор $\delta_{v_j} = l_j x \frac{d}{dx} + \lambda_j - s$. Следовательно, приведенное гипергеометрическое уравнение имеет вид:

$$\prod_{j: l_j > 0} \prod_{s=0}^{l_j - 1} \left(l_j x \frac{d}{dx} + \lambda_j - s \right) F = x \prod_{j: l_j < 0} \prod_{s=0}{|l_j| - 1} \left(l_j x \frac{d}{dx} + \lambda_j - s \right) F.$$

2°. В случае $u_j(\alpha) = \frac{r_j^{\alpha_j} - s_j^{\alpha_j}}{r_j - s_j}$, $j = 1, \dots, N$, имеем:

$$u_j(\beta l_j + \lambda_j - s) = \frac{r_j^{\beta l_j + \lambda_j - s} - s_j^{\beta l_j + \lambda_j - s}}{r_j - s_j}.$$

Введем для любых k и ρ операторы $\theta_j^{k, \rho}$ по формуле

$$(\theta_j^{k, \rho} f)(x) = \frac{r_j^\rho f(r_j^k x) - s_j^\rho f(s_j^k x)}{r_j - s_j}.$$

Очевидно,

$$\theta_j^{k,\rho} x^\beta = \frac{r_j^{k\beta+\rho} - s_j^{k\beta+\rho}}{r_j - s_j} x^\beta.$$

Следовательно, функции $v_j(\beta) = u_j(\beta l_j + \lambda_j - s)$ отвечает оператор $\delta_{v_j} = \theta_j^{l_j, \lambda_j - s}$. Таким образом, приведенное гипергеометрическое уравнение имеет вид:

$$\prod_{j: l_j > 0} \prod_{s=0}^{l_j-1} \theta_j^{l_j, \lambda_j - s} F = x \prod_{j: l_j < 0} \prod_{s=0}^{|l_j|-1} \theta_j^{l_j, \lambda_j - s} F.$$

ПРИМЕР. $N = 4, l = (-1, -1, 1, 1)$. В этом случае

$$v_i^+(\beta) = u_3(\beta + \lambda_3) u_4(\beta + \lambda_4), \quad v_i^-(\beta) = u_1(-\beta + \lambda_1) u_2(-\beta + \lambda_2).$$

Если $u_i(\alpha) = \alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$, то приведенное гипергеометрическое уравнение имеет вид:

$$\left(x \frac{d}{dx} + \lambda_3\right) \left(x \frac{d}{dx} + \lambda_4\right) F = x \left(-x \frac{d}{dx} + \lambda_1\right) \left(-x \frac{d}{dx} + \lambda_2\right) F.$$

Если $\lambda_3 = 0$ или $\lambda_4 = 0$, то оно совпадает с гипергеометрическим уравнением Гаусса. По этой причине естественно рассматривать приведенное гипергеометрическое уравнение $\delta_{w_+} F = \delta_{w_-} F$ для произвольного набора $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ функций u_j как u -аналог гипергеометрического уравнения Гаусса.

Отметим, что в случае $u_j(\alpha) = \frac{r_j^{\alpha_j} - s_j^{\alpha_j}}{r_j - s_j}, j = 1, 2, 3, 4$, это уравнение в принятых выше обозначениях имеет следующий вид:

$$\theta_3^{1, \lambda_3} \theta_4^{1, \lambda_4} F = x \theta_1^{-1, \lambda_1} \theta_2^{-1, \lambda_2} F.$$

6.4. О связи приведенных u -гипергеометрических функций с u -экспонентами. Описание u -гипергеометрических систем и приведенных u -гипергеометрических систем упрощается, если их рассматривать как уравнения в пространстве формальных рядов. Именно, пусть $u = (u_1, \dots, u_N)$ — произвольная последовательность не обязательно целых аналитических функций на $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих условию (6.1), и $\Sigma \subset \mathbb{C}^N$ — множество точек, в которых хотя бы одна из функций u_j и $u_j^{-1}, j = 1, \dots, N$, имеет особенность. Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство, элементы которого — формальные ряды вида

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} c(\nu) x^{\nu+\lambda}, \quad \text{где } \lambda \notin \Sigma + \mathbb{Z}^N,$$

и их конечные линейные комбинации.

На $\mathcal{H}$ естественно определены операторы $\partial_j = \partial_{u_j, j}$,

$$\partial_j \sum c(\nu) x^{\nu+\lambda} = \partial_j \sum c(\nu) u_j(\nu + \lambda) a^{\nu+\lambda-e_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

причем эти операторы обратимы на $\mathcal{H}$. Таким образом, для каждого $l \in \mathbb{Z}^N$ на $\mathcal{H}$ определен оператор

$$\partial^l = \partial_1^{l_1} \dots \partial_N^{l_N}.$$

В результате система уравнений (6.2) может быть представлена в виде:

$$(6.11) \quad \partial^{l^i} f = f, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $l^1, \dots, l^n$ – произвольный фиксированный базис решетки Λ .

Из определения операторов ∂^l следует, что на мономы $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$ они действуют по формуле

$$(6.12) \quad \partial^l a^\alpha = [u(\alpha)]_l a^{\alpha-l}, \quad l \in \mathbb{Z}^N.$$

Поставим в соответствие исходной последовательности $u = (u_1, \dots, u_N)$ функций на $\mathbb{C}^N$ последовательность $w = (w_1, \dots, w_n)$ функций на $\mathbb{C}^n$, заданных равенствами

$$w_i(\beta) = [u(\beta_1 l^1, \dots, \beta_n l^n + \lambda)]_{l^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и положим $\tilde{\partial}_i = \partial_{w_i, i}$, т.е. $\tilde{\partial}_i$ – линейный оператор в пространстве функций на $\mathbb{C}^n$, действующий на мономы $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ по формуле

$$\tilde{\partial}_i x^\beta = w_i(\beta) x^{\beta-e_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Приведенная u -гипергеометрическая система, ассоциированная с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\lambda \in \mathbb{C}^N$, имеет вид*

$$\tilde{\partial}_i F = F, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, ее формальные решения в пространстве рядов суть w -экспоненты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив $f(a) = a^\lambda F(x)$ в (6.11), получаем на основании (6.12) следующую систему уравнений для F : $D_i F = F$, $i = 1, \dots, n$, где D_i действует на мономы $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$ по формуле

$$D_i a^\alpha = [u(\alpha + \lambda)]_{l^i} a^{\alpha-l^i}.$$

Остается убедиться, что $D_i x^\beta = w_i(\beta) x^{\beta-e_i}$. В самом деле, так как $x_i = a^{l^i}$, $i = 1, \dots, n$, то $x^\beta = a^{\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n}$, а потому

$$D_i x^\beta = D_i a^{\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n} = [u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \lambda)]_{l^i} a^{\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n - l^i} = w_i(\beta) x^{\beta-e_i}.$$

6.5. Решения u -гипергеометрических систем в форме Γ -рядов. Рассмотрим u -гипергеометрическую систему (6.2), (6.3), ассоциированную с произвольной подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\beta \in \mathbb{C}^N/L$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Если $\gamma \in \mathbb{C}^N$ принадлежит прообразу вектора $\beta \in \mathbb{C}^N/L$ и $E_u(l + \gamma) \neq 0$ при $l \in \Lambda$, то формальный Γ -ряд

$$f_\Lambda(\gamma, a) = \sum_{l \in \Lambda} \frac{a^{l+\gamma}}{E_u(l + \gamma)}$$

формально удовлетворяет системе (6.2), (6.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем для любого $\omega \in \Lambda^+$:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i a_i \frac{\partial f_\Lambda}{\partial a_i} = \sum_{l \in \Lambda} \langle \omega, l + \gamma \rangle \frac{a^{l+\gamma}}{E_u(l + \gamma)} = \langle \omega, \beta \rangle f.$$

Убедимся, далее, что для любого $l = (l_1, \dots, l_N)$ с неотрицательными координатами и любого $\gamma \in \mathbb{C}^N$, для которого $E_u(\gamma) \neq 0$, справедливо равенство

$$(6.13) \quad \partial^l \left(\frac{a^\gamma}{E_u(\gamma)} \right) = \frac{a^{\gamma-l}}{E_u(\gamma-l)}, \quad \text{где } \partial^l = \partial_1^{l_1} \cdots \partial_N^{l_N}.$$

В самом деле, имеем:

$$\partial^l a^\gamma = [u(\gamma)]_l a^{\gamma-l}, \quad E_u(\gamma) = [u(\gamma)]_l E_u(\gamma-l).$$

Так как l — вектор с неотрицательными координатами, то $[u(\gamma)]_l < \infty$. Поэтому, поскольку $E_u(\gamma) \neq 0$, возможны только следующие варианты:

$$1) \quad [u(\gamma)]_l = 0, \quad E_u(\gamma-l) = \infty; \quad 2) \quad [u(\gamma)]_l \neq 0, \quad E_u(\gamma-l) \neq 0.$$

В случае 1) $a^\gamma/E_u(\gamma) = 0$, а потому $\partial^l(a^\gamma/E_u(\gamma)) = 0 = a^{\gamma-l}/E_u(\gamma-l)$. В случае 2) $\partial^l(a^\gamma/E_u(\gamma)) = [u(\gamma)]_l a^{\gamma-l}/E_u(\gamma) = a^{\gamma-l}/E_u(\gamma-l)$.

Из (6.13) следует, что для любого $l \in \mathbb{Z}^N$

$$\prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^+} f_\Lambda(\gamma, a) = f_\Lambda(\gamma - l^+, a), \quad \prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^-} f_\Lambda(\gamma, a) = f_\Lambda(\gamma - l^-, a).$$

Если $l \in \Lambda$, то $(\gamma - l^-) - (\gamma - l^+) \in \Lambda$, а потому $f_\Lambda(\gamma - l^+, a) = f_\Lambda(\gamma - l^-, a)$. Значит, выполняются условия (6.3). Предложение доказано.

Пусть теперь $l^1, \dots, l^n$ — произвольный фиксированный базис в Λ , т.е.

$$\Lambda = \{k_1 l^1 + \dots + k_n l^n \mid k \in \mathbb{Z}^n\},$$

и $\lambda \in \mathbb{C}^N$ — фиксированный вектор в прообразе $\beta \in \mathbb{C}^N/L$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i = a^{l^i}$, и $v^\gamma = (v_1, \dots, v_n)$ — последовательность функций на $\mathbb{C}^n$, заданных равенствами

$$v_i(\beta) = [u(\beta_1 l^1 + \dots + \beta_n l^n + \gamma)]_{l^i}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. Для любого вектора $\gamma \in \mathbb{C}^N$ из прообраза $\beta \in \mathbb{C}^N/L$ ряд $f_\Lambda(\gamma, a)$ представим в виде

$$f_\Lambda(\gamma, a) = a^\lambda x^{\gamma'} \exp_{v_\gamma} x,$$

где $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$ определяется из разложения $\gamma - \lambda = \sum_{i=1}^n \gamma'_i l^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 5.3 следует, что $f_\Lambda(\gamma, a) = a^\gamma \exp_{v_\gamma} x$. Остается заметить, что $a^\gamma = a^\lambda a^{\sum \gamma'_i l^i}$.

СЛЕДСТВИЕ. Формальные ряды

$$F_\Lambda(\gamma, a) = x^{\gamma'} \exp_{v_\gamma} x$$

формально удовлетворяют приведенной u -гипергеометрической системе (6.9), ассоциированной с $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и $\beta \in \mathbb{C}^N/L$.

Из предложения 6.6 следует, что ряды $f_\Lambda(\gamma, a)$ и $F_\Lambda(\gamma, a)$, где $\gamma \in \mathbb{C}^N$ принадлежит прообразу вектора $\beta \in \mathbb{C}^N/L$, задают в области своей сходимости соответственно u -гипергеометрическую функцию и приведенную u -гипергеометрическую функцию. Условия сходимости некоторых Γ -рядов были обсуждены в § 5.

6.6. Решения u -гипергеометрических систем в форме интегралов. Рассмотрим u -гипергеометрическую систему (6.2), (6.3) для $u = (u_1, \dots, u_N)$, где каждая функция u_j , $j = 1, \dots, N$, зависит только от α_j . Фиксируем произвольный базис

$$\omega_j = (\omega_j^1, \dots, \omega_j^N), \quad j = 1, \dots, r,$$

$r = \text{rank } \Lambda^\perp$, в подпространстве $L_\mathbb{R}^\perp \subset (\mathbb{R}^N)'$, ортогональном Λ , и обозначим:

$$\beta_j = \langle \omega_j, \beta \rangle, \quad j = 1, \dots, r.$$

Тогда система уравнений (6.3) эквивалентна следующей:

$$(6.14) \quad \sum_{i=1}^N \omega_j^i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \beta_j f, \quad j = 1, \dots, r.$$

Рассмотрим следующие интегралы:

$$(6.15) \quad F(a) = \int_C \prod_{i=1}^N f_{u_i}(a_i t^{\omega^i}) \prod_{j=1}^r t_j^{-\beta_j - 1} dt_j,$$

где $f_{u_j}(s)$ — фиксированная u_j -экспонента, т.е. решение уравнения $\partial_{u_j} f = f$, $j = 1, \dots, N$, $t^{\omega^i} = t_1^{\omega_1^i} \dots t_r^{\omega_r^i}$. Интеграл берется по области

$$(6.16) \quad C = \{t \in \mathbb{C}^r \mid \arg t_j = \text{const}, j = 1, \dots, r\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. *Интеграл (6.15) формально удовлетворяет u -гипергеометрической системе (6.2), (6.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что операторы ∂_{u_j} обладают свойством: если $\varphi(s) = f(cs)$, то $(\partial_{u_j} \varphi)(s) = c(\partial_{u_j} f)(cs)$. Отсюда для любого $l \in \mathbb{Z}^N$ следует:

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^+} F(a) &= \int_C t^{\omega^+} \prod_{i=1}^N f_{u_i}(a_i t^{\omega_i}) \prod_{j=1}^r t_j^{-\beta_j-1} dt_j, \\ \prod_{j=1}^N \partial_j^{l_j^-} F(a) &= \int_C t^{\omega^-} \prod_{i=1}^N f_{u_i}(a_i t^{\omega_i}) \prod_{j=1}^r t_j^{-\beta_j-1} dt_j, \end{aligned}$$

где $\omega^+ = \sum_{i=1}^N l_i^+ \omega_i$, $\omega^- = \sum_{i=1}^N l_i^- \omega_i$. Поскольку $\omega_j^+ - \omega_j^- = \langle l^+ - l^-, \omega_j \rangle = \langle l, \omega_j \rangle$, $j = 1, \dots, r$, то $\omega^+ = \omega^-$ для любого $l \in \Lambda$. Следовательно, при $l \in \Lambda$ правые части равенств (6.17) совпадают, и, значит, $F(a)$ удовлетворяет уравнению (6.2).

Убедимся теперь, что

$$(6.18) \quad F(\lambda^{\omega_j} a) = \lambda^{\beta_j} F(a), \quad j = 1, \dots, r,$$

для любого $\lambda > 0$, где $\lambda^{\omega_j} a = (\lambda^{\omega_j^1} a_1, \dots, \lambda^{\omega_j^N} a_N)$. В самом деле,

$$F(\lambda^{\omega_j} a) = \int_C \prod_{i=1}^N f_{u_i}(a_i \lambda^{\omega_j^i} t^{\omega_i}) \prod_{s=1}^r t_s^{-\beta_s-1} dt_s.$$

Поскольку $\lambda^{\omega_j^i} t^{\omega_i} = t_1^{\omega_i^1} \dots (\lambda t_j)^{\omega_i^j} \dots t_r^{\omega_i^r}$, то заменой переменной $\lambda t_j \mapsto t_j$ интеграл справа приводится к виду $\lambda^{\beta_j} F(a)$. Из равенств (6.18) следуют уравнения (6.14).

СЛЕДСТВИЕ. *Если интеграл (6.15) сходится в некоторой области пространства $\mathbb{C}^N$, то он задает в этой области u -гипергеометрическую функцию, ассоциированную с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ и вектором $\beta \in \mathbb{C}^N/L$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 6.7 остается справедливым для любого “цикла” $C \subset \mathbb{C}^N$ вещественной размерности r .

ПРИМЕР. Рассмотрим случай, когда функции $u_j(\alpha)$ имеют вид

$$u_i(\alpha) = \frac{q_i^\alpha - 1}{q_i - 1}, \quad 0 < q_i < 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

В этом случае в качестве u_i -экспоненты можно взять функцию $f_{u_i}(t) = \exp_{q_i}(t)$, введенную в п. 2.3, и интеграл (6.15) принимает вид

$$(6.19) \quad F(a) = \int_C \prod_{i=1}^N \exp_{q_i}(a_i t^{\omega_i}) \prod_{i=1}^r t_i^{-\beta_i-1} dt_i.$$

Убедимся, что этот интеграл сходится в некоторой области $U \subset \mathbb{C}^N$. Сначала представим (6.19) в более простой форме. Фиксируем в $\mathbb{R}^N$ произвольное координатное

подпространство размерности r , имеющее нулевое пересечение с $L \subset \mathbb{C}^N$. Пусть для определенности это будет подпространство, натянутое на векторы $e_1, \dots, e_r$. Тогда в подпространстве $L_{\mathbb{R}}^{\perp} \subset (\mathbb{R}^N)'$, ортогональном к L , существует и однозначно определен базис

$$\omega_i = (\omega_i^1, \dots, \omega_i^N), \quad i = 1, \dots, r,$$

такой, что $\omega_i^j = \delta_i^j$, $i, j = 1, \dots, r$. По отношению к этому базису интеграл (6.19) имеет следующий вид:

$$(6.20) \quad F(a) = \int_C \prod_{i=1}^r \exp_{q_i}(a_i t_i) \prod_{i=r+1}^N \exp_{q_i}(x_i t^{\omega_i}) \prod_{i=1}^r t_i^{-\beta_i-1} dt_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Интеграл (6.20) получается из (6.19) заменой переменных: $t^{\omega_i} \mapsto t_i$, $i = 1, \dots, r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Пусть $C = \{t \in \mathbb{C}^r \mid \arg t_j = \varphi_j, j = 1, \dots, r\}$, где φ_j – произвольные фиксированные числа, и пусть $\operatorname{Re} \beta_j < 0$, $j = 1, \dots, r$. Тогда интеграл (6.20) сходится для любого $a \in \mathbb{C}^N$ с отличными от нуля координатами такого, что на C $\arg(a_j t_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, r$, и $\arg(a_i t^{\omega_i}) \neq 0$, $i = r+1, \dots, N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функции $\exp_{q_i} s$ регулярны в точке $s = 0$, и на каждом луче, отличном от вещественной положительной полуоси, они ограничены. Отсюда следует, что доказательство сходимости интеграла (6.20) сводится к доказательству сходимости интегралов

$$\int_{\arg t_j = \varphi_j} \exp_{q_j}(a_j t_j) t_j^{-\beta_j-1} dt_j = a_j^{\beta_j} \int_{\arg t_j = \varphi'_j} (\exp_{q_j} t_j) t_j^{-\beta_j-1} dt_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

где $\varphi'_j \neq 0$.

Сходимость этих интегралов непосредственно следует из оценки, полученной в п. 2.3: $|\exp_{q_j} t_j| = \exp\left\{\frac{1}{2} \frac{\ln^2 |t_j|}{\ln q_j} + O(\ln |t_j|)\right\}$ при $|t_j| \rightarrow \infty$ на каждом луче, отличном от положительной вещественной полуоси.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для таких функций u_i решений u -гипергеометрической системы, заданных сходящимися Γ -рядами, вообще говоря, не существует. Например, согласно п. 5.4 не существует сходящихся Γ -рядов в случае, когда Λ – подрешетка в $\mathbb{Z}^4$, порожденная вектором $l = (-1, -1, 1, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М. Общая теория гипергеометрических функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 1. С. 14–18.
- [2] Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Обобщенные гипергеометрические уравнения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 2. С. 279–283.
- [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Зелевинский А. В. Голономные системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 1. С. 14–19.
- [4] Гельфанд И. М., Зелевинский А. В., Капранов М. М. Гипергеометрические функции и торические многообразия // Функцион. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. № 2. С. 12–26.
- [5] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // УМН. 1992. Т. 47. № 4. С. 3–82.
- [6] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. q -гипергеометрическое уравнение Гаусса и описание его решений в виде рядов и интегралов // Докл. АН. 1993. Т. 331. № 2. С. 140–143.
- [7] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. (R, S) -гипергеометрические функции одной переменной // Докл. АН. 1993. Т. 333. № 5. С. 567–570.
- [8] Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С., Спирин С. А. (r, s) -экспоненты // Докл. АН. 1994. Т. 336. № 6. С. 730–732.
- [9] Граев М. И. Уравнения и ряды гипергеометрического типа // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 1. С. 72–76.
- [10] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [11] Agarwal R. P. Pade approximants, continued fractions and Heine q -hypergeometric series // J. Math. Phys. Sci. 1992. V. 26. № 3. P. 281–290.
- [12] Al-Salam W. A., Verma A. On quadratic transformations of basic series // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 414–420.
- [13] Andrews G. E. On the q -analogue of Kummer's theorem and applications // Duke Math. J. 1973. V. 40. P. 525–528.
- [14] Andrews G. E. On q -analogues of the Watson and Whipple summations // SIAM J. Math. Anal. 1976. V. 7. P. 332–336.
- [15] Andrews G. E. q -series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra (CBMS Regional Conference Series in Math.). V. 66. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986.
- [16] Andrews G. E. Problems and prospects for basic hypergeometric functions // Theory and Applications of Spherical Functions. New York: Academic Press, 1995. P. 191–224.
- [17] Andrews G. E., Askey R. Another q -extension of the beta function // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81. P. 97–100.
- [18] Aomoto K. Connection formulas in the q -analogue de Rham cohomology // Progr. Math. 1995. V. 131. P. 1–12.
- [19] Aomoto K. On connection coefficients for q -difference systems of A-type Jackson integrals // SIAM J. Math. Anal. 1994. V. 25. № 2. P. 256–273.
- [20] Aomoto K., Kato Y. A q -analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals // Special Functions, Proc. Hayashibara Forum (Okayama, 1990), ICM-90 Satell. Conf. Proc., 1991. P. 30–62.
- [21] Aomoto K., Mimachi Y. A solution of the Yang–Baxter equation as connection coefficients of a holonomic q -difference system // Internat. Math. Res. Notices. 1992. № 1. P. 7–15.
- [22] Askey R., Suslov S. K. The q -harmonic oscillator and an analogue of the Charlier polynomials // J. Phys. A. 1993. V. 26. № 15. P. L693–L698.
- [23] Askey R., Wilson J. A. Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. V. 319. P. 1–55.
- [24] Buschman R. G. Contiguous function relations for q -hypergeometric functions // Indian J. Math. 1994. V. 36. № 1. P. 79–84.
- [25] Carlitz L. Some formulas of F. H. Jackson // Monatsh. Math. 1969. V. 73. P. 193–198.

- [26] Dwork B. Generalized Hypergeometric Functions. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [27] Exton H. A theorem of transformations of multiple q -hypergeometric functions // J. Indian Acad. Math. 1994. V. 16. № 2. P. 201–204.
- [28] Floreanini R., Vinet L. On the quantum group and quantum algebra approach to q -special functions // Lett. Math. Phys. 1993. V. 27. № 3. P. 179–190.
- [29] Floreanini R., Vinet L. q -conformal quantum mechanics and q -spherical functions // Phys. Lett. B. 1992. V. 277. № 4. P. 442–446.
- [30] Floreanini R., Vinet L. Quantum algebra approach to q -Gegenbauer polynomials // J. Comput. Appl. Math. 1995. V. 57. № 1–2. P. 123–133.
- [31] Floreanini R., Vinet L. Using quantum algebras in q -special functions theory // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. № 1. P. 21–28.
- [32] Floreanini R., Morozov A., Vinet L. q -hypergeometric functions, quantum algebras and free fields // Teor. Mat. Fizika. 1994. V. 98. № 3. P. 379–387.
- [33] Frenkel I. B., Reshetikhin N. Y. Quantum affine algebras and holonomic difference equations // Comm. Math. Phys. 1992. V. 146. № 1. P. 1–60.
- [34] Gasper G. Rogers' linearization formula for the continuous q -ultraspherical polynomials and quadratic transformations formulas // SIAM J. Math. Anal. 1985. V. 16. P. 1061–1071.
- [35] Gasper G., Rahman M. Basic Hypergeometric Series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [36] Gasper G., Rahman M. Positivity of the Poisson kernel for the continuous q -Jacoby polynomials and some quadratic transformation formulas for basic hypergeometric series // SIAM J. Math. Anal. 1986. V. 17. P. 970–999.
- [37] Gasper G., Rahman M. Product formulas of Watson, Bailey and Bateman types and positivity of the Poisson kernel for q -Racah polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 768–789.
- [38] Gelfand I. M., Kapranov N. M., Zelevinsky A. V. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [39] Groza V. A. Quantum algebras, Kravchuk q -polynomials, and Kravchuk–Meixner q -functions // Укр. матем. журн. 1992. V. 44. № 7. P. 983–986.
- [40] Gupta A. On Certain bilateral bibasic q -hypergeometric series transformations and summations // Proc. Nat. Acad. Sci. India. Sect. A 1992. V. 62. № 1. P. 87–96.
- [41] Horikawa E. Contiguity relations for q -hypergeometric functions and related quantum groups // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1992. V. 68. № 7. P. 157–160.
- [42] Jain V. K. Certain transformations of basic hypergeometric series and their applications // Pacific J. Math. 1982. V. 101. P. 333–349.
- [43] Jain V. K. Some transformations of basic hypergeometric functions // SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. P. 957–961.
- [44] Jain V. K., Verma A. Some transformations of basic hypergeometric functions // SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. P. 943–956.
- [45] Jing N. H. q -hypergeometric series and Macdonald functions // J. Algebraic Combin. 1994. V. 3. № 3. P. 291–305.
- [46] Kalnins E. G., Miller W., Mukherjee S. Models of q -algebra representations: matrix elements of $U_q(su(2))$ // Contemp. Math. 1994. V. 160. P. 191–208.
- [47] Koelnik H. T. The quantum group of plane motions and the Hahn–Exton q -Bessel function // Duke Math. J. 1994. V. 76. № 2. P. 483–508.
- [48] Koornwinder T. H. Orthogonal polynomials in connection with quantum groups // Orthogonal Polynomials: Theory and Practice (Proc. NATO ASI, Columbus, USA, 1989). NATO ASI Ser. V. 294, 1990. P. 257–292.
- [49] Koornwinder T. H. Representations of the twisted $SU(2)$ quantum group and some q -hypergeometric orthogonal polynomials // Indagationes Math. 1989. V. 51. № 1. P. 97–117.
- [50] Masuda T., Mimachi K., Nakagami Y., Noumi M., Ueno K. Representations of quatum groups and a q -analogue of orthogonal polynomials // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1988. V. 307. P. 559–564.

- [51] Mathai A. M., Saxena R. K. The H -functions with Applications in Statistics and Other Disciplines. New York: Halsted Press, Wiley, 1978.
- [52] McIntosh R. J. Some asymptotic formulae for q -hypergeometric series // J. London Math. Soc. 1995. V. 51. № 1. P. 120–136.
- [53] Mimachi K., Noumi M. Quantum 2-spheres and big q -Jacobi polynomials // Comm. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 521–531.
- [54] Morozov A., Vinet L. q -hypergeometric functions in the formalism of free fields // Modern Phys. Lett. A. 1993. V. 8. № 30. P. 2891–2902.
- [55] Noumi M. Quantum Grassmanians and q -hypergeometric series // CWI-Quarterly. 1992. V. 5. № 4. P. 293–307.
- [56] Rahman M., Verma A. Quadratic transformations formulas for basic hypergeometric series // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 335. № 1. P. 277–302.
- [57] Sato M., Shintani T., Muro M. Theory of prehomogeneous vector spaces. Singular orbits of a prehomogeneous vector space and hypergeometric functions // Nagoya Math. J. 1990. V. 120. P. 1–34.
- [58] Slater L. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966.
- [59] Srivastava H. M., Karlsson P.-W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Chichester: Wiley, 1985.
- [60] Srivastava H. M., Singh S. N., Shukla H. S. Transformations of certain generalized q -hypergeometric functions of two variables // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 196. № 2. P. 554–565.
- [61] Varchenko A. N. Quantized Knizhnik–Zamolodchikov equations, quantized Yang–Baxter equation and difference equations for q -hypergeometric functions // Comm. Math. Phys. 1994. V. 162. № 3. P. 499–528.
- [62] Yang K. W. Matrix q -hypergeometric series // Discrete Math. 1995. V. 146. № 1–3. P. 271–284.