Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Дюбина, И. В. Полтерович, Структуры на бесконечности гиперболических пространств, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 239–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:11:28

СТРУКТУРЫ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. Г. Дюбина, И. В. Полтерович

Целью этой работы является явное описание структур на бесконечности двух классов гиперболических пространств – многообразий отрицательной кривизны и гиперболических групп.

Пусть X – метрическое пространство с функцией расстояния d_X . На интуитивном уровне, понятие “структуры на бесконечности” пространства X отражает то, что видит наблюдатель, смотрящий на X из “бесконечно удаленной точки” (см. [1]). Возможные математически строгие интерпретации этого понятия представлены в определениях 1–3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что пространство (T, d_T) можно *изометрически вложить на бесконечности* в метрическое пространство X , если найдется последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \rightarrow 0$ такая, что для каждой точки $t \in T$ существует такая бесконечная последовательность $\{x_t^i\}$, $i = 1, 2, \dots$, точек в пространстве X , что для любых $t_1, t_2 \in T$ имеет место соотношение $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i \cdot d_X(x_{t_1}^i, x_{t_2}^i) = d_T(t_1, t_2)$.

Пространство T называется *геодезическим* (см. [2], [3]), если для любых двух точек $t_1, t_2 \in T$ на расстоянии $a = d_T(t_1, t_2)$ друг от друга, существует изометрическое вложение $g: [0, a] \rightarrow T$ такое, что $g(0) = t_1, g(a) = t_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Асимптотическим подконусом* ([2], [3]) метрического пространства X называется геодезическое метрическое пространство (T, d_T) , любое конечное подмножество которого можно изометрически вложить на бесконечности в X .

Напомним, что *неглавный ультрафильтр* ω есть конечно-аддитивная мера, определенная на всех подмножествах $I \subset \mathbb{N}$ такая, что $\omega(I)$ равно 0 или 1 для любого I и $\omega(I) = 0$, если I конечно. Предел по неглавному ультрафильтру $\delta(\omega)$ для всякой ограниченной функции $\delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно определяется следующим условием: для любого $\varepsilon > 0$ $\omega(\{i \in I \mid |\delta(i) - \delta(\omega)| \leq \varepsilon\}) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 ([1]). Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим множество последовательностей $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, таких что $d_X(x_0, f(i)) \leq \text{const} \cdot i$. Каждой паре последовательностей f_1, f_2 можно сопоставить функцию $\delta_{f_1, f_2}(i) = d_X(f_1(i), f_2(i))/i$. Будем считать последовательности f_1, f_2 эквивалентными, если предел $\delta_{f_1, f_2}(\omega) = 0$. Множество T классов эквивалентности, снабженное расстоянием $d_T(f, g) = \delta_{f, g}(\omega)$, является метрическим пространством, называемым *асимптотическим конусом* пространства X по отношению к неглавному ультрафильтру ω : $T = \text{Cone}_\omega X$.

Заметим, что любой асимптотический конус метрического пространства всегда является также и его асимптотическим подконусом. Всякий асимптотический конус есть полное метрическое пространство [4]; $\text{Cone}_\omega X$ наследует у X свойства однородности и геодезичности (см. [5], [6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 ([2], [3]). Геодезическое метрическое пространство X называется δ -гиперболическим, если для любого геодезического треугольника расстояние от точки на одной из его сторон до объединения двух других сторон не превосходит некоторого фиксированного $\delta > 0$. Если конкретное значение δ неважно, говорят просто, что X – гиперболическое.

М. Громовым было доказано, что любой асимптотический конус и подконус гиперболического метрического пространства есть 0-гиперболическое пространство, т.е. *вещественное дерево* (см. [1], [3]). В работе [7] определялись функциональные пространства S и D , являющиеся вещественными деревьями, ветвящимися в каждой точке, и служащие примерами асимптотических подконусов плоскости Лобачевского. Подобные конструкции рассматривались также В. Берестовским [8] и А. Шнирельманом [9]. Оказывается, что структура на бесконечности любого многообразия отрицательной кривизны (под этим мы понимаем полное односвязное риманово многообразие, секционные кривизны которого ограничены сверху некоторым $\kappa < 0$) полностью описывается похожим пространством функций.

Обозначим через A множество функций $f: [0, \rho_f] \rightarrow [0, 1]$, $0 < \rho_f < \infty$, таких, что 1) $f(0) = 0$; 2) функции f “кусочно-постоянны справа”, т.е. для всякого $t \in [0, \rho_f]$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f|_{[t, t+\varepsilon]} = \text{const}$. Определим на A расстояние: $d_A(f_1, f_2) = (\rho_{f_1} - s) + (\rho_{f_2} - s)$, где $s = \sup\{t \mid f_1(t') = f_2(t') \ \forall t' < t\}$ есть момент разделения функций f_1, f_2 (см. [7]).

Главное отличие A от пространств S и D заключается в том, что A состоит из кусочно-непрерывных функций (быть может, с бесконечным числом интервалов непрерывности) и за счет этого становится полным метрическим пространством:

ТЕОРЕМА 1. *Метрическое пространство (A, d_A) полно. Оно является вещественным деревом, причем валентность каждой его точки (т.е. мощность множества компонент связности ее дополнения) есть континуум.*

Заметим, что всякое полное вещественное дерево, такое что каждая его точка имеет валентность континуум, изометрично A . Пространство A однородно и является “максимальным” среди деревьев мощности не более чем континуум – всякое такое дерево можно изометрично вложить в A .

Сформулируем основной результат настоящей работы:

ТЕОРЕМА 2. *Пространство A можно изометрически вложить на бесконечности в любое многообразие отрицательной кривизны.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любое вещественное дерево не более чем континуальной мощности изометрически вкладывается на бесконечности в многообразие отрицательной кривизны. Обратно, всякое геодезическое метрическое пространство, вкладывающееся на бесконечности в многообразие отрицательной кривизны есть вещественное дерево не более чем континуальной мощности.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Любое вещественное дерево является асимптотическим подконусом многообразия отрицательной кривизны.*

ТЕОРЕМА 3. *Любой асимптотический конус многообразия отрицательной кривизны изометричен A .*

В частности, это означает, что асимптотические конусы таких многообразий изометричны и не зависят от выбора ультрафильтра. Оказывается, что это верно и для гиперболических групп.

Конечно-порожденная группа называется *гиперболической*, если ее граф Кэли относительно некоторой системы образующих является гиперболическим пространством (см. [2], [3]).

Следующая теорема показывает, что гиперболические группы можно характеризовать не только в терминах их свободных подгрупп или *границ* (см. [3]), но и в терминах их асимптотических конусов.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой гиперболической группы Γ выполнено одно из следующих трех условий:*

- (i) *для всякого ω конус $\text{Con}_\omega \Gamma$ есть точка $\iff \Gamma$ конечна $\iff$ граница Γ пуста;*
- (ii) *для всякого ω конус $\text{Con}_\omega \Gamma$ изометричен $\mathbf{R}$ $\iff \Gamma$ содержит бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса $\iff$ граница Γ состоит ровно из двух элементов;*
- (iii) *для всякого ω конус $\text{Con}_\omega \Gamma$ изометричен A $\iff \Gamma$ содержит свободную подгруппу с двумя образующими $\iff$ граница Γ имеет мощность континуум (в этом случае говорят, что Γ неэлементарна).*

Авторы выражают глубокую благодарность А. Шнирельману за плодотворные обсуждения, послужившие стимулом к написанию этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gromov M. Asymptotic Invariants of Infinite Groups (Geometric Group Theory. Vol. 2). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. [2] Gromov M. // Essays in Group Theory / ed. S. M. Gersten. New York: Springer-Verlag, 1987. P. 75–263. [3] Э. Гис, П. де ля Арп (ред.) Гиперболические группы по Михаилу Громову. М.: Мир, 1992. [4] van den Dries L., Wilkie A. J. // J. Algebra. 1984. V. 89. P. 349–374. [5] Kapovich M., Leeb B. // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5. №3. P. 582–603. [6] Papasoglu P. // J. Diff. Geom. 1996. V. 44. P. 789–806. [7] Полтерович И., Шнирельман А. // УМН. 1997. Т. 52. №4. С. 29–210. [8] Берестовский В. Н. Квазиконусы на бесконечности пространств Лобачевского // Сообщение на Межд. алг. конф. памяти А. И. Мальцева. Новосибирск, 1989. [9] Shnirelman A. On the structure of asymptotic space of the Lobachevsky plane // Preprint, 1997.

Санкт-Петербургский государственный университет;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
и Институт Вейцмана (Израиль)

Принято редколлегией
19.08.1998