Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Сабба, Преобразование Лапласа–Фурье неприводимых регулярных дифференциальных систем на сфере Римана, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 161–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:49:34

УДК 517.925+517.927.71

Посвящается памяти Андрея Болибруха

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА–ФУРЬЕ НЕПРИВОДИМЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА СФЕРЕ РИМАНА

К. САББА

Показано, что преобразование Лапласа–Фурье неприводимой регулярной дифференциальной системы на сфере Римана отвечает, в случае, когда мы рассматриваем систему только в конечной части сферы, некоторому поляризованному регулярному твисторному $\mathcal{D}$ -модулю. В силу этого ассоциированное голоморфное расслоение, определенное над дополнением к началу координат комплексной плоскости, наделяется естественной гармонической метрикой с умеренным поведением в начале координат.

Библиография: 15 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	162
1. Формулировки результатов	163
1.1. Преобразование Лапласа–Фурье плоских расслоений	163
1.2. Преобразование Лапласа–Фурье неприводимого расслоения со связностью	164
1.3. Преобразование Лапласа–Фурье расслоений со связностью и эрмитовы метрики	165
2. Экспоненциальное скручивание гармонических расслоений и твисторные $\mathcal{D}$ -модули	167
2.1. Экспоненциальное скручивание гладких твисторных структур	167
2.2. Экспоненциальное скручивание в $\mathcal{R}$ -Тройки(X^*)	168
2.3. Экспоненциальные скручивания в $\mathcal{R}$ -Тройки(X)	169
2.4. Ограничение на подмногообразии $z = z_o$	169
3. Доказательство теоремы 1	170
3.1. Доказательство теоремы 1	170
3.2. Мероморфные L^2 -комплексы де Рама и Дольбо	171
3.3. L^2 -лемма де Рама–Дольбо	173
3.4. Завершение доказательства теоремы 1	175
Список литературы	176

Введение

Один из важных результатов А. А. Болибруха состоит в положительном ответе на проблему Римана–Гильберта для полупростых¹ представлений фундаментальной группы дополнения к конечному множеству точек на сфере Римана [2], [3]. Он доказал [4], подобным образом, обобщая предшествующий результат В. Бальзера, что проблема Биркгофа имеет положительный ответ, когда соответствующая система мероморфных линейных дифференциальных уравнений является полупростой системой.

Оба результата можно единообразно доказать, используя язык мероморфных расслоений на сфере Римана. А именно, пусть $P = \{p_1, \dots, p_r, p_{r+1}\}$ — непустое конечное множество точек сферы Римана $\mathbb{P}^1$, и пусть M — свободный $\mathcal{O}(*P)$ -модуль конечного ранга,² наделенный связностью ∇ ; будем считать, что существует базис в модуле M , в котором связность ∇ для каждого $i = 1, \dots, r$ имеет ранг Пуанкаре $m_i \geq 0$ в точке p_i (т.е. порядок полюса матрицы связности ∇ в точке p_i равен $m_i + 1$); более того, предположим, что связность ∇ имеет регулярную особенность в точке ∞ (т.е. коэффициенты разложения горизонтальных сечений в заданном базисе являются многозначными аналитическими функциями, которые имеют самое большее степенной рост на бесконечности³); тогда если пара (M, ∇) является *неприводимой* (или полупростой), то существует базис в модуле M , в котором ранг Пуанкаре связности ∇ в точке p_i равен m_i ($i = 1, \dots, r$) и ∇ имеет самое большее логарифмический полюс в ∞ (т.е. имеет ранг Пуанкаре 0 в бесконечности).

После несложных предварительных редукций мы видим, что случай, когда $m_i = 0$ для всех i , соответствует проблеме Римана–Гильберта, а случай, в котором $r = 1$, отвечает проблеме Биркгофа.

Начав с систем линейных мероморфных дифференциальных уравнений, имеющих только регулярные особенности, — или, более точно, с регулярных голономных $\mathcal{D}$ -модулей — на сфере Римана, получим при помощи преобразования Лапласа–Фурье новую систему, и проблема Римана–Гильберта для исходной системы трансформируется в проблему Биркгофа для новой системы. Эти проблемы (для заданной системы и ее преобразования Лапласа–Фурье) не связаны непосредственно одна с другой.⁴ Однако если одна из них — полупростая система, то и другая является таковой, при этом существует общее условие, когда обе проблемы одновременно имеют положительное решение.

Полупростые линейные представления, о которых шла речь выше, обладают еще одним замечательным свойством: на ассоциированном плоском расслоении существует *гармоническая метрика умеренного роста* (см. [11]). Это может быть выражено на языке *поляризованных твисторных $\mathcal{D}$ -модулей*, который автор, расширяя понятия, предложенные К. Симпсоном в [13], разработал в статье [10]. А именно, с каждым таким представлением однозначно, с точностью до изоморфизма, ассоциируется регулярный голономный $\mathcal{D}$ -модуль на сфере Римана, который не имеет ни подмодулей, ни фактор-модулей с носителями в точке; предыдущее свойство можно выразить

¹Полупростыми называются объекты, являющиеся прямой суммой неприводимых объектов.

²т.е. пучок модулей над пучком колец мероморфных функций с полюсами лишь в точках из P . (Прим. ред. перевода.)

³Имеется в виду рост аналитических функций в секторах конечного раствора с вершиной в бесконечности. (Прим. ред. перевода.)

⁴Тем не менее см. [9; § V.2c].

утверждением: этот $\mathcal{D}$ -модуль отвечает поляризованному регулярному твисторному $\mathcal{D}$ -модулю, как определено в цитированных статьях (см. также ниже).

В этой статье мы анализируем поведение поляризованных твисторных $\mathcal{D}$ -модулей на сфере Римана при преобразовании Лапласа–Фурье. Однако мы не даем никакой информации о поведении в бесконечности Фурье-плоскости, где могут появиться иррегулярные особенности.

Упомянем, что, используя иную технику, С.Сабо в [14] установил совершенное Фурье-соответствие в более общей ситуации, в которой разрешаются иррегулярные особенности на бесконечности, однако при некоторых других более ограничительных предположениях.

Мы отсылаем к работе [10], где можно найти разнообразные результаты, касающиеся поляризованных твисторных $\mathcal{D}$ -модулей, которые мы здесь используем.

1. Формулировки результатов

Мы будем рассматривать проективную прямую $X = \mathbb{P}^1$ как объединение двух аффинных карт $\text{Spec } \mathbb{C}[t]$ и $\text{Spec } \mathbb{C}[t']$ с равенством для координат $t' = 1/t$ на их пересечении и определим точку ∞ как точку, где $t' = 0$. Пусть $P = \{p_1, \dots, p_r, p_\infty\}$ – конечное множество из $r + 1$ различных точек на $\mathbb{P}^1$. Положим $X^* = \mathbb{P}^1 \setminus P$.

Пусть пара (H, D_V) состоит из C^∞ -векторного расслоения H и плоской связности D_V на X^{*an} . Расслоение голоморфно относительно $(0, 1)$ -части D_V'' , и мы положим $(V, \nabla) = (\ker D_V'', D_V')$. Ассоциированная локальная система определяется равенством $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \ker[\nabla: V \rightarrow V \otimes_{\mathcal{O}_{X^{*an}}} \Omega_{X^{*an}}^1]$. Для каждой точки p_j из множества P мы обозначим через T_j локальную монодромию определенной выше локальной системы в этой точке.

1.1. Преобразование Лапласа–Фурье плоских расслоений. Априори понятие преобразования Лапласа–Фурье не определяется ни для голоморфных расслоений со связностью на X^* , ни для голоморфных расслоений на $\mathbb{P}^1$, наделенных мероморфной связностью. Оно определяется для алгебраических $\mathcal{D}$ -модулей на аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$.

Обозначим через $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ алгебру Вейля размерности 1, т.е. фактор свободной алгебры, порожденной $\mathbb{C}[t]$ и $\mathbb{C}[\partial_t]$, по соотношению $[\partial_t, t] = 1$ (см., например, [5], [7]). Пусть M – голономный $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -модуль. Мы скажем, что модуль M есть *минимальное расширение*, если он не имеет ни подмодулей, ни фактор-модулей с носителем в некоторой точке прямой $\mathbb{A}^1$. Следующее утверждение хорошо известно.

ЛЕММА 1 (соответствие Римана–Гильберта). *Функтор, который сопоставляет любому голономному $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -модулю, имеющему особенности самое большее во множестве P , его ограничение на X^{*an} , индуцирует эквивалентность категории голономных $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -модулей, которые имеют регулярные особенности (включая бесконечность) и являются минимальными расширениями (морфизмами будут все морфизмы $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -модулей), с категорией плоских голоморфных расслоений на X^{*an} .*

Для заданного голоморфного расслоения со связностью (V, ∇) на X^{*an} обозначим через M регулярный голономный $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -модуль, отвечающий (V, ∇) по лемме 1.

Преобразованием Лапласа–Фурье $\widehat{M}$ модуля M является $\mathbb{C}$ -векторное пространство M , наделенное действием алгебры Вейля $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$ с переменной τ , определенным формулами

$$\tau \cdot m = \partial_t m, \quad \partial_\tau = -tm. \quad (1.1)$$

Мы будем обозначать через $\widehat{X} = \widehat{\mathbb{A}}^1$ аффинную прямую с координатой τ и через $\widehat{\mathbb{P}}^1$ соответствующую проективную прямую. Известно, что модуль $\widehat{M}$ имеет единственную особенность в конечной части плоскости, а именно в точке $\tau = 0$, которая является регулярной особой точкой. Однако, вообще говоря, он имеет иррегулярную особенность в $\tau = \infty$ (см., например, [7] об общих свойствах преобразований Фурье голономных $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -модулей). Поэтому мы получим голоморфное расслоение со связностью $(\widehat{V}, \widehat{P})$ на проколотов проективной прямой $\widehat{X} = \widehat{\mathbb{P}}^1 \setminus \widehat{P}$, где $\widehat{\mathbb{P}}^1$ – проективная прямая с координатой τ и $\widehat{P} = \{0, \infty\}$. Ассоциированное плоское C^∞ -расслоение обозначим $(\widehat{H}, D_{\widehat{V}})$. Однако в общем случае модуль $\widehat{M}$ невозможно восстановить только по заданной паре $(\widehat{V}, \widehat{\nabla})$.

Обозначим через d ранг расслоения H . Укажем, как вычислить ранг $\widehat{d}$ расслоения $\widehat{H}$. Известно, что для любого $\tau_0 \neq 0$ $\mathbb{C}$ -линейный морфизм

$$M \xrightarrow{\partial_t - \tau_0} M$$

является инъективным морфизмом и его коядро будет конечномерным векторным пространством: оно как раз является слоем расслоения $\widehat{V}$ в точке τ_0 . Размерность коядра, которая совпадает с тотальным числом μ “исчезающих циклов” пространства M в точках множества $P \setminus \infty$ (т.е. сумма кратностей характеристического многообразия M вдоль его компонент $T_{p_i}^*$, см., например, [7; § 4, с. 66]), легко вычисляется здесь по формулам (см. [7; предложение 1.5, с. 79])

$$\widehat{d} = \mu = rd - d_1, \quad r = \text{card } P - 1, \quad d_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^r \dim \text{Ker}(T_j - \text{Id}). \quad (1.2)$$

Более точно, тензорное произведение $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[\tau]} \widehat{M}$ является свободным $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$ -модулем ранга μ .

1.2. Преобразование Лапласа–Фурье неприводимого расслоения со связностью. Предположим теперь, что плоское расслоение (H, D_V) – неприводимо, или, эквивалентно, что не существует нетривиального подпространства L , инвариантного относительно всех операторов монодромии T_j ($j = 1, \dots, r+1$). Это также эквивалентно утверждению, что ассоциированный регулярный голономный $\mathcal{D}$ -модуль M является неприводимым как $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$ (несложно). Оказывается, что это эквивалентно неприводимости его преобразования Лапласа–Фурье $\widehat{M}$ (еще проще). Однако, из-за иррегулярности модуля $\widehat{M}$ в бесконечности, его неприводимость не влечет неприводимости $(\widehat{H}, D_{\widehat{V}})$ (см. ниже). Ранг $\widehat{d}$ расслоения $\widehat{H}$ положителен до тех пор, пока не будет выполнено равенство $(V, \nabla) = (\theta_X, d)$, так как мы предполагаем неприводимость. В последующем мы неявно будем предполагать, что $\widehat{d} > 0$.

Расслоение $(\widehat{H}, D_{\widehat{V}})$ определяется его монодромией $\widehat{T}_0$ вокруг $\tau = 0$. Жорданова структура оператора монодромии $\widehat{T}_0$ определяется жордановой структурой оператора монодромии T_∞ плоского расслоения (H, D_V) вокруг точки ∞ (через A_λ мы

обозначаем здесь и далее ограничение эндоморфизма A на корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ); это составляет содержание следующей леммы, которая выводится из предложения 8.4.20 в [10].

ЛЕММА 2. *Предположим, что пара (H, D_V) неприводима. Тогда:*

- 1) *для любого $\lambda \neq 1$ жордановы структуры ограничений операторов монодромии $\hat{T}_{0,\lambda}$ и $T_{\infty,\lambda}$ совпадают;*
- 2) *любой жорданов блок размера $k \geq 1$ ограничения $T_{\infty,1}$ дает жорданов блок размера $k + 1$ ограничения $\hat{T}_{0,1}$;*
- 3) *остальные жордановы блоки ограничения $\hat{T}_{0,1}$ имеют размер единица.*

Полупростота пары $(\hat{H}, D_{\hat{V}})$ (разложимость в прямую сумму неприводимых расслоений со связностью) эквивалентна полупростоте оператора монодромии $\hat{T}_0$. Это имеет место (в предположении, что пара (H, D_V) неприводима) тогда и только тогда, когда оператор T_∞ полупрост и 1 не является собственным значением T_∞ .

1.3. Преобразование Лапласа–Фурье расслоений со связностью и эрмитовы метрики. Предположим сначала, что представление монодромии, отвечающее локальной системе $\mathcal{L} = \ker \nabla$, является унитарным. Другими словами, мы считаем, что существует D_V -плоская эрмитова метрика h на H . В частности,

- 1) *локальная система $\mathcal{L}$ есть ортогональная сумма неприводимых локальных систем; впоследствии мы будем полагать, что локальная система неприводима; случай постоянной локальной системы ранга один является тривиальным, и мы будем полагать также, что локальная система $\mathcal{L}$ не есть постоянная локальная система;*
- 2) *локальная монодромия T_j локальной системы в каждой точке p_j из P , будучи унитарной, является полупростой, и ее собственные значения равны корням из единицы.*

Мы можем спросить, имеется ли в $\hat{H}$ естественным образом определенная эрмитова метрика и будет ли эта метрика $D_{\hat{V}}$ -плоской или нет. Заметим, что плоскостность метрики влечет полупростоту и унитарность монодромии $\hat{T}_0$. В силу предшествующих предположений и леммы 2 это выполняется тогда и только тогда, когда 1 не является собственным значением оператора монодромии T_∞ .

Если предположить, что пара (H, D_V) только неприводимая, но необязательно унитарная, тогда тем не менее существует, согласно [11], единственная *гармоническая эрмитова метрика умеренного роста* h на (H, D_V) , которая, следовательно, является естественной метрикой, подлежащей рассмотрению. Такая метрика также существует, если (H, D_V) – полупростая пара, но в этом случае она может быть не единственной.

Гармонические метрики умеренного роста. Напомним определение таких метрик. Мы можем зафиксировать выбор метрической связности на H , которую мы обозначим D_E , с помощью следующего требования: если мы введем 1-форму $\theta_E = D_V - D_E$, которую мы разложим на ее $(1, 0)$ - и $(0, 1)$ -части $\theta_E = \theta'_E + \theta''_E$, тогда скажем, что h -сопряженная 1-форма к 1-форме θ'_E есть θ''_E . Так как X имеет размерность один, то расслоение $E = \ker D''_E$ является голоморфным на X^{*an} и θ'_E удовлетворяет условию Хиггса $\theta'_E \wedge \theta'_E = 0$.

Тройка (H, D_V, h) (с плоской связностью D_V) называется *гармонической*, если поле Хиггса голоморфно на E , т.е. если 1-форма $\theta'_E: E \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_{X^{an}}} \Omega^1_{\mathcal{O}_{X^{an}}}$ является голоморфной.

Следуя [11], мы будем говорить, что тройка (H, D_V, h) имеет *умеренный рост*, если собственные значения поля Хиггса (которые сами являются многозначными голоморфными 1-формами) имеют полюс самое большее первого порядка в каждой точке множества P .

Можно спросить, обладает ли также пара $(\hat{H}, D_{\hat{V}})$ такой гармонической метрикой с умеренным поведением в $\tau = 0$. Мы даем положительный ответ в следствии 1.

Твисторные $\mathcal{D}$ -модули. Мы будем использовать язык твисторных $\mathcal{D}$ -модулей из работы [10], к которой мы и отсылаем. Кратко напомним некоторые основные определения.

Обозначим, как и ранее, через X сферу Римана и положим $\mathcal{X} = X \times \mathbb{C}$, используя при этом координату z на множителе $\mathbb{C}$. Мы будем также обозначать через $\mathbf{S}$ окружность $\{|z| = 1\}$. Обозначим через $\mathcal{D}_X$ пучок голоморфных дифференциальных операторов на X и рассмотрим пучок z -дифференциальных операторов $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ на $\mathcal{X}$, а именно, относительно произвольной локальной координаты x на X этот модуль $\mathcal{R}_{\mathcal{X}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \langle \partial_x \rangle$, где $\partial_x = z \partial_x$. В частности, мы имеем $\mathcal{D}_X = \mathcal{R}_{\mathcal{X}} / (z - 1) \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$.

Рассмотрим категорию $\mathcal{R}$ -Тройки(X), объекты которой имеют вид $(\mathcal{M}', \mathcal{M}'', C)$, где $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ являются когерентными $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модулями и C есть полуторалинейное спаривание между ними: для любой точки z_o на окружности $\mathbf{S}$ это есть спаривание между стеблем пучка $\mathcal{M}'_{z_o}$ и сопряженным стеблем $\mathcal{M}''_{-z_o}$, принимающее значение в пучке распределений $\mathcal{D}\mathbf{b}_{X_{\mathbb{R}}}$ на X ; оно линейно относительно действия голоморфных дифференциальных операторов на $\mathcal{M}'_{z_o}$ и антиголоморфных дифференциальных операторов на сопряженном пространстве $\mathcal{M}''_{-z_o}$ при естественном действии дифференциальных операторов обоих типов на распределениях на X ; и, последнее, это спаривание является непрерывным относительно точки $z \in \mathbf{S}$. Мы будем смотреть на C как на полуторалинейное спаривание пучков $\mathcal{M}'|_{\mathbf{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}|\mathbf{S}}} \mathcal{M}''|_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathcal{D}\mathbf{b}_{X_{\mathbb{R}} \times \mathbf{S}} / \mathbf{S}$, где $\mathcal{D}\mathbf{b}_{X_{\mathbb{R}} \times \mathbf{S}} / \mathbf{S}$ обозначает пучок распределений на $X \times \mathbf{S}$, которые непрерывны относительно $z \in \mathbf{S}$, и где сопряжение противоположно обычному сопряжению на $\mathbf{S}$ (см. [10; § 1.5.a]).

В работе [10] определено понятие поляризованного регулярного твисторного $\mathcal{D}$ -модуля веса $w \in \mathbb{Z}$ на X : такие объекты имеют вид $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$, где $\mathcal{T} = (\mathcal{M}', \mathcal{M}'', C)$ – тройки, описанные выше, и $\mathcal{S}$ (названное *поляризацией*) состоит из двух изоморфизмов $\mathcal{M}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$. Накладываются некоторые аксиомы, которые мы не будем напоминать здесь (см. [10; гл. 4]). Большинство рассуждений можно свести к случаю, в котором вес w равен 0, $\mathcal{M}' = \mathcal{M}''$ и оба изоморфизма из $\mathcal{S}$ равны Id . Мы будем обозначать такие объекты просто $(\mathcal{M}, \mathcal{M}, C, \text{Id})$ или даже $(\mathcal{M}, \mathcal{M}, C)$.

Задав такой объект веса 0, мы получим $\mathcal{D}_X$ -модуль, рассматривая $\mathcal{M} / (z - 1) \mathcal{M}$. Более того, ограничив на X^{*an} , мы получим голоморфное расслоение V со связностью ∇ . И наконец, из аксиом следует, что полуторалинейное спаривание C позволяет определить некоторую метрику h на C^∞ -расслоении H , отвечающую расслоению со связностью V , и эта метрика является *гармонической*. Более того, предположение регулярности влечет, что эта метрика *умеренного роста*. Более точно, используя результаты из [11] и [1], автор доказал в [10; гл. 5], что категория поляризованных регулярных твисторных $\mathcal{D}_X$ -модулей эквивалентна категории ручных гармонических

расслоений⁵ (H, D_V, h) на X^{*an} с некоторой параболической структурой (названной в указанной работе “типом Делиня”). Согласно Симпсону [11], последняя категория эквивалентна категории полупростых расслоений с плоской связностью (H, D_V) на X^{*an} .

Преобразование Лапласа–Фурье объекта $(\mathcal{M}', \mathcal{M}'', C, \mathcal{S})$ определяется в [10; гл. 8] (см. также ниже). Результат преобразования – это набор объектов $(\widehat{\mathcal{M}}', \widehat{\mathcal{M}}'', \widehat{C}, \widehat{\mathcal{S}})$ над $\widehat{\mathbb{A}}^{1an} \times \mathbb{C}$. Главный результат данной статьи состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. *Если $(\mathcal{M}, \mathcal{M}, C, \text{Id})$ является поляризованным регулярным твисторным $\mathcal{D}_X$ -модулем веса 0, то $(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{M}}, \widehat{C}, \text{Id})$ является поляризованным регулярным твисторным $\mathcal{D}$ -модулем веса 0 на $\widehat{\mathbb{A}}^{1an} \times \mathbb{C}$.*

Это утверждение прямо распространяется на поляризованные регулярные твисторные $\mathcal{D}$ -модули веса w . Заметим к тому же, что часть теоремы была доказана в теореме 8.4.1 в [10], а именно, доказано условие на циклы вблизи $\tau = 0$. Поэтому мы будем, в основном, интересоваться поведением в точках τ_o , когда $\tau_o \neq 0$. “Слой” в $\tau = \tau_o \neq 0$ объекта $(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{M}}, \widehat{C})$ получается из слоя в $\tau = 1$ с помощью смены масштаба, т.е. с помощью предварительной замены переменной $t \rightarrow t/\tau_o$, так как ядро преобразования Лапласа–Фурье есть $e^{-t\tau/z}$.

Как следствие, мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если плоское расслоение (H, D_V) полупросто, то преобразование Лапласа–Фурье $(\widehat{H}, D_{\widehat{V}})$ на $\widehat{X}^*$ обладает гармонической метрикой с умеренным поведением в $\tau = 0$.*

2. Экспоненциальное скручивание гармонических расслоений и твисторные $\mathcal{D}$ -модули

Напомним основные соответствия, данные в [10; § 8.1.b]. Мы сохраним обозначения раздела 1, однако теперь зафиксируем $\tau_o = 1$.

2.1. Экспоненциальное скручивание гладких твисторных структур. Мы начнем с набора (H, h, D_V) на X^* , а затем перемасштабируем метрику h и подкрутим связность D_V , полагая по определению

$$\begin{aligned} {}^F D_V &= e^t \circ D_V \circ e^{-t}, \quad \text{т.е.} \quad {}^F D'_V = D'_V - dt, \quad {}^F D''_V = d'', \\ {}^F h &= e^{2 \operatorname{Re} t} h. \end{aligned}$$

Напомним, используя определение из [11], [12], что если тройка (H, D_V, h) – гармоническая на X^* , то такой же будет тройка $(H, {}^F D_V, {}^F h)$. Поле Хиггса задается формулами

$${}^F \theta'_E = \theta'_E - dt, \quad {}^F \theta''_E = \theta''_E - d\bar{t},$$

а ${}^F h$ – метрическая связность ${}^F D_E = {}^F D'_E + {}^F D''_E$ – формулами

$${}^F D_E = e^{-\bar{t}} \circ D_E \circ e^{\bar{t}}, \quad \text{т.е.} \quad {}^F D'_E = D'_E, \quad {}^F D''_E = D''_E + d\bar{t}.$$

⁵Т.е. расслоений с гармонической метрикой умеренного роста. (Прим. ред. перевода.)

Экспоненциальное скручивание существует на уровне гладких твисторных структур. Как и в [10], мы обозначим через $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$ пучок на $\mathcal{X}^*$ C^∞ -функций, которые являются голоморфными относительно z . Рассмотрим $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$ -модуль⁶ $\mathcal{H}^{an} = \mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{C}_{X^*}^\infty} \pi^{-1}H$, наделенный d'' -оператором

$${}^F\mathfrak{D}_z'' = {}^F D_E'' + z {}^F \theta_E'' = \mathfrak{D}_z'' + (1-z)d\bar{t}. \quad (2.1)$$

Мы получим голоморфное подрасслоение ${}^F\mathcal{H}' = \ker {}^F\mathfrak{D}_z'' \subset \mathcal{H}^{an}$, наделенное z -связностью ${}^F\mathfrak{D}_z' = z {}^F D_E' + {}^F \theta_E' = \mathfrak{D}_z' - dt$. Положим

$${}^F\mathfrak{D}_z = {}^F\mathfrak{D}_z' + {}^F\mathfrak{D}_z'' = \mathfrak{D}_z - dt + (1-z)d\bar{t}.$$

Более того, если $\pi: \mathcal{X}^* = X^* \times \mathbb{C} \rightarrow X^*$ обозначает естественную проекцию, то расслоение $\mathcal{H}^{an}$ можно наделять метрикой π^*h или метрикой $\pi^*{}^Fh$. Эти метрики являются постоянными относительно z . Мы будем также рассматривать метрику $e^{2\operatorname{Re}(z\bar{t})}\pi^*h$, которая изменяется вместе с z .

Мы имеем изоморфизм локально свободных $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$ -модулей с метрикой и z -связностью:

$$(\mathcal{H}^{an}, \pi^*{}^Fh, {}^F\mathfrak{D}_z) \xrightarrow{\cdot e^{(1-z)\bar{t}}} (\mathcal{H}^{an}, e^{2\operatorname{Re}(z\bar{t})}\pi^*h, \mathfrak{D}_z - dt). \quad (2.2)$$

Этот изоморфизм отправляет голоморфное подрасслоение ${}^F\mathcal{H}'$ в ядро $\mathcal{H}' = \ker \mathfrak{D}_z''$.

Будет полезно также иметь модель, где метрика равна π^*h . Эта модель определяется на пучке $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^\infty$, а не на пучке $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$. Положим $\mathcal{H} = \mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^\infty \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{C}_{X^*}^\infty} \pi^{-1}H$. Мы имеем изоморфизм

$$(\mathcal{H}, \pi^*{}^Fh, {}^F\mathfrak{D}_z) \xrightarrow{\cdot e^{\bar{t}-2i\operatorname{Im}(z\bar{t})}} (\mathcal{H}, \pi^*h, \mathfrak{D}_z - (1+|z|^2)dt). \quad (2.3)$$

Этот изоморфизм не определяется над $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$.

2.2. Экспоненциальное скручивание в $\mathcal{R}$ -Тройки(X^*). Напомним следующие определения (см. [10; §8.1.a]). Пусть $\mathcal{M}$ – левый $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модуль, т.е. $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -модуль с плоской относительной мероморфной связностью $\nabla_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}$ (относительной по z , т.е. не ведется дифференцирования по z). Обозначим через $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ локализованный модуль вдоль множества точек P , т.е. $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[*](P \times \mathbb{C}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{M}$. Скрученный $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модуль ${}^F\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{M}_{\text{loc}} \otimes \mathcal{E}^{-t/z}$ определяется как $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -модуль $\mathcal{M}_{\text{loc}}$, наделенный скрученной связностью $e^{t/z} \circ \nabla_{\mathcal{X}/\mathbb{C}} \circ e^{-t/z}$.

Пусть $C: \mathcal{M}'_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}|\mathbf{S}}} \overline{\mathcal{M}''_{|\mathbf{S}}} \rightarrow \mathfrak{Db}_{X_{\mathbb{R}}} \times \mathbf{S}/\mathbf{S}$ – некоторое полуторалинейное спаривание. Если ограничение $(\mathcal{M}', \mathcal{M}'', C)$ на $\mathcal{X}^*$ является гладкой твисторной структурой, то ограничение на $X^* \times \mathbf{S}$ спаривания C принимает значения в $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$ и продолжение C_{loc} спаривания C на $\mathcal{M}'_{\text{loc}|\mathbf{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}|\mathbf{S}}} \overline{\mathcal{M}''_{\text{loc}|\mathbf{S}}}$ принимает значения в продолжении $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$, доставляя нам функции на $\mathcal{X}^*$, которые могут быть продолжены до распределений, непрерывных относительно $z \in \mathbf{S}$. Более того, если мы предположим, что тройке $(\mathcal{M}', \mathcal{M}'', C)$ отвечает поляризованный регулярный твисторный $\mathcal{D}$ -модуль, то,

⁶В [10] этот модуль обозначается через $\mathcal{H}$; здесь мы подчеркиваем аналитическую зависимость от z .

используя [10; (5.3.3)], мы получим, что спаривание C_{loc} принимает значения в продолжении $\mathcal{C}_{\mathcal{X}^*}^{\infty, an}$, доставляя функции на $\mathcal{X}^*$, которые имеют умеренный рост вблизи каждого прокола из P , локально равномерно относительно $z \in \mathbf{S}$.

Заметим, что для $z \in \mathbf{S}$ число $z\bar{t} - t/z$ является чисто мнимым комплексным числом. Тогда при предыдущих предположениях ${}^F C_{\text{loc}} := \exp(z\bar{t} - t/z) C_{\text{loc}}$ является полуторалинейным спариванием на ${}^F \mathcal{M}'_{\text{loc}|\mathbf{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}|\mathbf{S}}} \overline{{}^F \mathcal{M}''_{\text{loc}|\mathbf{S}}}$, принимающим значения в том же самом пучке функций умеренного роста.

С гармоническим расслоением (H, h, D_V) на X^* связана гладкая твисторная структура $(\mathcal{H}', \mathcal{H}', \pi^* h_{\mathcal{H}'_{|\mathbf{S}} \otimes \overline{\mathcal{H}'_{|\mathbf{S}}}})$, где $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}^{an}$ есть ядро $\ker \mathfrak{D}'_z$, наделенное $\mathcal{R}_{\mathcal{X}^*}$ -структурой, которая задается z -связностью $\mathfrak{D}'_z$.

Такое гармоническое расслоение можно экспоненциально скрутить как объект категории $\mathcal{R}$ -Тройки(X^*): результатом будет тройка

$$(\mathcal{H}', \mathcal{H}', \exp(z\bar{t} - t/z) \pi^* h_{\mathcal{H}'_{|\mathbf{S}} \otimes \overline{\mathcal{H}'_{|\mathbf{S}}}}),$$

где $\mathcal{H}'$ наделяется $\mathcal{R}_{\mathcal{X}^*}$ -структурой, заданной z -связностью $\mathfrak{D}'_z - dt$.

Изоморфизм (2.2) отождествляет скрученное гармоническое расслоение и гладкую твисторную структуру, связанную с $(H, {}^F h, {}^F D_V)$ (см. [10; лемма 8.1.2]).

2.3. Экспоненциальные скручивания в $\mathcal{R}$ -Тройки(X). Пусть $\mathcal{M}$ будет левым $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модулем. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}$ его локализацию *только в бесконечности*. Тогда ${}^F \mathcal{M}$ определяется как скрученный $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модуль $\widetilde{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-t/z}$ ($\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -структур задается так же, как выше). В частности, модуль ${}^F \mathcal{M}$ локализуется в ∞ и модуль ${}^F \mathcal{M}_{\text{loc}}$ есть локализация модуля ${}^F \mathcal{M}$ в $P \setminus \{\infty\}$. Известно (см. [10; предложение 8.3.1(i)]), что при некотором условии на $\mathcal{M}$ вблизи ∞ $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модуль ${}^F \mathcal{M}$ является когерентным. Такое условие выполняется, когда $\mathcal{M}$ отвечает (поляризованному) регулярному твисторному $\mathcal{D}$ -модулю на X .

Для заданного (поляризованного) регулярного твисторного $\mathcal{D}$ -модуля $(\mathcal{M}', \mathcal{M}'', C)$ на X определение полуторалинейного спаривания ${}^F C$ на ${}^F \mathcal{M}'_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}|\mathbf{S}}} \overline{{}^F \mathcal{M}''_{|\mathbf{S}}}$ со значениями в $\mathfrak{Db}_{X_{\mathbb{R}} \times \mathbf{S}/\mathbf{S}}$ требует некоторого внимания, так как оно состоит в определении поднятия локализованного распределения (или C^∞ -функции с умеренным ростом) ${}^F C_{\text{loc}}$ до распределений на X . В этом случае в указанной в начале пункта ссылке сначала определено $\mathcal{F} C$ на глобальном экспоненциальном скручивании $\mathcal{F} \mathcal{M}'_{|\mathbf{S}} \otimes \mathcal{F} \mathcal{M}''_{|\mathbf{S}}$ (где нельзя забывать переменную τ); модуль ${}^F \mathcal{M}$ рассматривается как специализация в $\tau = 1$ модуля $\mathcal{F} \mathcal{M}$; тогда ${}^F C$ определяется как специализация (через посредство преобразования Меллина) спаривания $\mathcal{F} C$.

2.4. Ограничение на подмногообразие $z = z_o$. Проанализируем поведение предыдущих конструкций при ограничении на подмногообразие $z = z_o$.

Ограничение на подмногообразии $z = z_o$ тройки $(\mathcal{H}^{an}, \pi^* {}^F h, {}^F \mathfrak{D}_z)$ есть расслоение H , наделенное метрикой ${}^F h$ и z_o -связностью ${}^F \mathfrak{D}_{z_o}$. Изоморфизм (2.2) специализируется до изоморфизма

$$(H, {}^F h, {}^F \mathfrak{D}_{z_o}) \xrightarrow{\cdot e^{(1-z_o)\bar{t}}} (H, e^{2\text{Re}(z_o\bar{t})} h, \mathfrak{D}_{z_o} - dt), \quad (2.4)$$

а изоморфизм (2.3) специализируется до изоморфизма

$$(H, {}^F h, {}^F \mathfrak{D}_{z_o}) \xrightarrow{\cdot e^{\bar{t} - 2i \text{Im}(z_o\bar{t})}} (H, h, \mathfrak{D}_{z_o} - (1 + |z_o|^2) dt). \quad (2.5)$$

С другой стороны, из плоскостности модуля $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[* (P \times \mathbb{C})]$ (или $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[* (\{\infty\} \times \mathbb{C})]$) над кольцом $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ следует, что если модуль $\mathcal{M}$ является *точным* $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модулем (т.е. не имеет $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ -кручения), то такой же будет его локализация $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ или $\widetilde{\mathcal{M}}$. Если мы положим $\mathfrak{M}_{z_o} = \mathcal{M}/(z - z_o)\mathcal{M}$, тогда локализация loc или $\sim$ модуля $\mathfrak{M}_{z_o}$ является ограничением на подмногообразии $z = z_o$ соответствующей локализации модуля $\mathcal{M}$.

Если $z_o \neq 0$, то определим скрученный модуль ${}^F\mathfrak{M}_{z_o}$ как модуль $\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-t/z_o}$ (т.е. мы скручиваем z_o -связность, добавляя $-dt$), а если $z_o = 0$, то как модуль $\widetilde{\mathfrak{M}}_0$ с полем Хиггса, полученным добавлением $-dt$. Тогда если модуль $\mathcal{M}$ является точным модулем, мы имеем ${}^F\mathfrak{M}_{z_o} = {}^F\mathcal{M}/(z - z_o){}^F\mathcal{M}$ и ${}^F\mathfrak{M}_{z_o, \text{loc}} = {}^F\mathcal{M}_{\text{loc}}/(z - z_o){}^F\mathcal{M}_{\text{loc}}$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ – поляризованный регулярный твисторный $\mathcal{D}$ -модуль веса 0 на $\mathbb{P}^1$ (т.е. объект из $\text{MT}^r(\mathbb{P}^1, w)^{(p)}$, см. [10]). Можно считать, что он имеет вид $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, \mathcal{M}, C)$ и $\mathcal{S} = (\text{Id}, \text{Id})$. Его ограничение на X^* соответствует гармоническому расслоению (H, h, D_V) . Используя обозначения (1.2), мы докажем в этом разделе следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Комплекс $\mathbf{R}\Gamma(X, \text{DR}^F \mathcal{M})$ имеет нетривиальные когомологи степени не выше 0, и его ненулевые когомологи являются локально свободным $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ -модулем конечного ранга $\widehat{d}$.*

3.1. Доказательство теоремы 1. Напомним (см. [10; гл. 8]), что мы полагаем $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\infty) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{M}$ и если $p: X \times \widehat{X} \times \mathbb{C} \rightarrow X \times \mathbb{C} = \mathcal{X}$ и $\widehat{p}: X \times \widehat{X} \times \mathbb{C} \rightarrow \widehat{X} \times \mathbb{C} = \widehat{\mathcal{X}}$ обозначают проекции, а $\otimes \mathcal{E}^{-t\tau/z}$ обозначает экспоненциальное скручивание $\mathcal{R}$ -структуры, то мы определяем

$$\widehat{\mathcal{M}} := \widehat{p}_+ p^+ (\widetilde{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-t\tau/z}) = \widehat{p}_+^0 p^+ (\widetilde{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-t\tau/z}) := \widehat{p}_+^0 \mathcal{F} \mathcal{M}.$$

Полуторалинейное спаривание $\mathcal{F}C$ на $\mathcal{F}\mathcal{M}|_{\mathbb{S}} \otimes \overline{\mathcal{F}\mathcal{M}|_{\mathbb{S}}}$ определено в [10; гл. 8], и мы положим $\widehat{C} = \widehat{p}_+^0 \mathcal{F}C$.

1. Как следует из [10; теорема 8.4.1], вдоль подмногообразия $\tau = 0$ все необходимые условия для существования поляризованного регулярного твисторного $\mathcal{D}$ -модуля (см. [10; определение 4.1.2]) выполняются.

2. Теперь главный вопрос касается поведения $\widehat{\mathcal{M}}$ вне $\tau = 0$. Зафиксируем $\tau_o \neq 0$ в $\widehat{X}$. Напомним (см. [10; предложение 8.3.1(i)]), что модуль $\widetilde{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-t\tau_o/z}$ является $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -хорошим. Достаточно, в действительности, взять $\tau_o = 1$, используя очевидные соображения однородности. Мы обозначим через ${}^F\mathcal{M}$ $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модуль $\widetilde{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-t/z}$.

3. Из предложения 1 (которое имеет силу для любого $\tau_o \neq 0$), поскольку модуль $\mathcal{F}\mathcal{M}$ является регулярно и точно специализируемым вдоль $\tau = \tau_o$ и согласно [10] (предложение 8.3.1(ii) и (iii), теорема 3.1.8 и § 3.1.d), мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любого $\tau_o \neq 0$ модуль $\widehat{\mathcal{M}}$ является точно специализируемым и регулярным вдоль $\tau = \tau_o$ и для любого $\alpha \in \mathbb{C}$*

$$\psi_{\tau - \tau_o, \alpha} \widehat{\mathcal{M}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \notin -\mathbb{N}^*, \\ \mathbf{R}^0 \Gamma(X, \text{DR} \widetilde{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-t\tau_o/z}), & \text{если } \alpha \in -\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

4. Это следствие влечет, что вблизи любого подмногообразия $\tau_o \neq 0$ модуль $\widehat{\mathcal{M}}$ равен уровню -1 его V -фильтрации вдоль $\tau = \tau_o$. В силу регулярности модуль $\widehat{\mathcal{M}}$ является $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{X}}}$ -когерентным, и так как $\dim \widehat{\mathcal{M}}/(\tau - \tau_o)\widehat{\mathcal{M}} = \dim \psi_{\tau-\tau_o, \alpha}\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{d}$ не зависит от $\tau_o \neq 0$, то модуль $\widehat{\mathcal{M}}$ является $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{X}}}$ -локально свободным ранга $\widehat{d}$ вне $\tau = 0$. Его характеристическое многообразие в $T^*(\widehat{X} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ равно $\{\text{нулевое сечение}\} \times \mathbb{C}$, а его характеристическое многообразие в $T^*(\widehat{X}) \times \mathbb{C}$ содержится в

$$(\text{нулевое сечение} \cup T_0^*\widehat{X}) \times \mathbb{C},$$

таким образом, модуль $\widehat{\mathcal{M}}$ является голономным модулем (см. [10; определение 1.2.4]). Следствие также влечет, что S-разложимость (см. [10; определение 3.5.1]) выполняется вблизи $\tau_o \neq 0$ по тривиальным соображениям. Итак, мы получили условие (HSD) из [10; определение 4.1.2].

5. На этом шаге мы знаем, что модуль $\widehat{\mathcal{M}}$ является $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{X}}}$ -локально свободным конечного ранга вне $\tau = 0$. Это влечет (см. [10; лемма 1.5.3]), что в указанной области тройка $(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{M}}, \widehat{C})$ является гладким объектом из категории $\mathcal{R}$ -Тройки $(\widehat{X}^*)$. Мы хотим показать, что спаривание $\widehat{C}$ определяет, при помощи склеивания, семейство тривиальных векторных расслоений на $\mathbb{P}^1$, параметризованное проколотой комплексной прямой $\widehat{X}^*$. Это семейство получается из C^∞ -векторного расслоения $\widehat{H}$ на $\widehat{X}^*$, наделенного эрмитовой метрикой $\widehat{h}$, при помощи соответствия из [10; лемма 2.2.2]. По этой конструкции метрика будет *гармонической*. В силу простого соображения однородности относительно τ , достаточно доказать это свойство в некоторой окрестности $\tau = 0$, которую мы продолжаем обозначать $\widehat{X}^*$.

Из [10; теорема 8.4.1] мы знаем, что твисторные свойства выполняются вдоль $\tau = 0$. Через посредство тройки $\widehat{\mathcal{T}} = (\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{M}}, \widehat{C})$, наделенной поляризацией $\widehat{\mathcal{S}} = (\text{Id}, \text{Id})$, мы можем применить рассуждения, приведенные в [10; §§ 5.4.c–5.4.e], чтобы получить твисторное свойство и поляризуемость в некоторой окрестности $\tau = 0$. Теорема 1 доказана.

Мы теперь докажем предложение 1. Так как ${}^F\mathcal{M}$ является хорошим $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -модулем, мы априори знаем, что когомологии комплекса $\mathbf{R}\Gamma(X, \text{DR}^F \mathcal{M}) - \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ -когерентны. Поэтому достаточно доказать, что для любого комплексного числа $z_o \in \mathbb{C}$ комплекс $\mathbf{R}\Gamma(X, \text{DR}^F \mathfrak{M}_{z_o})$ имеет когомологии только степени 0 и что размерность пространства нульмерных когомологий $\mathbf{H}^0(X, \text{DR}^F \mathfrak{M}_{z_o})$ равна $\widehat{d}$ (напомним, что ${}^F\mathfrak{M}_{z_o} = {}^F\mathcal{M}/(z - z_o){}^F\mathcal{M}$).

Как и в работе [15], мы будем отождествлять комплекс $\text{DR}^F \mathfrak{M}_{z_o}$ с L^2 -комплексом. Это отождествление является *локальным* на X . Тогда L^2 -когомологии X можно получить посредством L^2 -теории Ходжа. То, что размерность $\mathbf{H}^*(X, \text{DR}^F \mathfrak{M}_{z_o})$ не зависит от z_o , будет следовать из независимости соответствующего лапласиана от z_o (с помощью рассуждений, которые можно извлечь из работы [12]).

3.2. Мероморфные L^2 -комплексы де Рама и Дольбо. Для того чтобы дать общее доказательство, независимо от того, равно z_o нулю или нет, удобно рассмотреть скрученный модуль ${}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t}$, где $c(z_o)$ обозначает обычное сопряжение z_o , так что пишем $|z_o|^2 = z_o c(z_o)$ (мы сохраняем более традиционное обозначение $\overline{z_o}$ для “геометрического сопряжения” $-1/z_o$). Другими словами, ${}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t}$

есть не что иное, как $\mathcal{O}_X$ -модуль $\widetilde{\mathfrak{M}}_{z_o}$, наделенный скрученной z_o -связностью $\mathfrak{D}'_{z_o} - (1 + |z_o|^2)dt$.

Напомним, что мы обозначали через ${}^F\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o}$ модуль ${}^F\mathfrak{M}_{z_o}$, локализованный в точках множества P (но в точке ∞ модуль ${}^F\mathfrak{M}_{z_o}$ не обязательно является локализованным). Мы рассмотрим L^2 -комплекс $\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})_{(2)}$, полученный взятием сечений пучка $\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o}$ или пучка $\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o} \otimes \Omega_X^1$. Эти сечения локально являются L^2 -сечениями, так же как и их образы при действии связности $\mathfrak{D}'_{z_o} - (1 + |z_o|^2)dt$, в случае, когда мы берем метрику h на ограничении V_{z_o} пучка $\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o}$ на X^{*an} (V_{z_o} является голоморфным подрасслоением расслоения H , определенным ядром d'' -оператора $\mathfrak{D}''_{z_o} = D''_V + (z_o - 1)\theta''_E$), и эта метрика локально эквивалентна метрике Пуанкаре вблизи каждого прокола из P на X^* . Мы имеем естественный морфизм

$$\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})_{(2)} \rightarrow \text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t}).$$

Действительно, вне точки ∞ это было объяснено в [10; §6.2.a] (так как не очевидно, что комплекс, записанный слева, содержится в комплексе, записанном справа). Вблизи ∞ включение очевидно, так как модуль ${}^F\mathfrak{M}_{z_o}$ равен там модулю ${}^F\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o}$.

ЛЕММА 3. *Естественный морфизм $\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})_{(2)} \rightarrow \text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})$ является квазиизоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вне точки ∞ это было доказано в [10; предложение 6.2.4]. Поэтому мы рассмотрим ситуацию вблизи точки ∞ с локальной координатой t' и опустим индекс “loc”, так как пучок ${}^F\mathfrak{M}_{z_o}$ равен его локализации в окрестности $t' = 0$.

По предположению регулярности модуля $\mathcal{M}$ в окрестности ∞ мы знаем, что там существует локальный мероморфный базис $\mathbf{e}^{(z_o)}$ модуля $\mathfrak{M}_{z_o}$, в котором матрица связности $\mathfrak{D}'_{z_o}$ имеет простые полюсы в $t' = 0$ (см. [10; (5.3.7)]). Рассматривая максимальный порядок полюса коэффициентов сечения пучка $\widetilde{\mathfrak{M}}_{z_o}$ в базисе $\mathbf{e}^{(z_o)}$ и согласно слагаемому $(1 + |z_o|^2)dt'/t'^2$ в z_o -связности, получаем, что $\mathcal{H}^{-1}(\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})) = 0$, следовательно, также имеем $\mathcal{H}^{-1}(\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})_{(2)}) = 0$.

С другой стороны, те же рассуждения показывают, что любое локальное сечение пучка $\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \Omega_X^1$ в $t' = 0$ с максимальным порядком полюса, равным k , эквивалентно по модулю образа оператора $\mathfrak{D}'_{z_o} + (1 + |e|z_o^2)dt'/t'^2$ сечению, имеющему полюс порядка не выше $k - 1$. Итерируя этот процесс и используя умеренное поведение h -нормы каждого элемента базиса $\mathbf{e}^{(z_o)}$, мы видим, что такое сечение эквивалентно сечению пучка $\widetilde{\mathfrak{M}}_{z_o} \otimes \Omega_X^1$, которое является L^2 -сечением относительно метрики h , или, эквивалентно, что морфизм

$$\mathcal{H}^0(\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})_{(2)}) \rightarrow \mathcal{H}^0(\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t}))$$

является морфизмом “на”.

Наконец, если задать локальное сечение пучка $\widetilde{\mathfrak{M}}_{z_o} \otimes \Omega_X^1$, которое является L^2 -сечением (относительно метрики h) и лежит в образе $(\mathfrak{D}'_{z_o} - (1 + |z_o|^2))\mathfrak{M}_{z_o}$, то аналогичное рассуждение показывает, что это сечение является образом L^2 -сечения пучка $\mathfrak{M}_{z_o}$; эквивалентно, морфизм

$$\mathcal{H}^0(\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})_{(2)}) \rightarrow \mathcal{H}^0(\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t}))$$

является инъективным морфизмом. Лемма 3 доказана.

3.3. L^2 -лемма де Рама–Дольбо. Мы рассмотрим C^∞ -расслоение H , наделенное метрикой h и z_o -связностью $\mathfrak{D}_{z_o} - (1 + |z_o|^2)dt$, которую мы далее для простоты будем обозначать $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}$, а ассоциированный L^2 -комплекс обозначим через $\mathcal{L}_{(2)}^\bullet(H, h, \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o})$; в частности, отметим, что d'' -оператор есть оператор $\mathfrak{D}_{z_o}''$, соответствующее голоморфное подрасслоение есть V_{z_o} и продолжение этого голоморфного подрасслоения, полученное с помощью рассмотрения сечений, которые имеют h -норму умеренного роста, есть пучок $\mathfrak{M}_{\text{loc}, z_o}$ (см. [10; следствие 5.3.1(1)]).

“Голоморфный” L^2 -подкомплекс есть следующий подкомплекс L^2 -комплекса $\mathcal{L}_{(2)}^\bullet(H, h, \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o})$:

$$0 \longrightarrow \ker \mathfrak{D}_{z_o}''^{(0)} \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}'} \ker \mathfrak{D}_{z_o}''^{(1)} \cap \mathcal{L}_{(2)}^{(1,0)}(H, h, \mathfrak{D}_{z_o}'') \longrightarrow 0, \quad (3.1)$$

где мы обозначаем через $\mathfrak{D}_{z_o}''^{(k)}$ действие оператора $\mathfrak{D}_{z_o}''$ на $\mathcal{L}_{(2)}^k(H, h, \mathfrak{D}_{z_o}'')$. Наша цель в этом разделе – доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 4 (L^2 -лемма де Рама–Дольбо). *Предположим, что (H, h, D_V) является ручным голоморфным расслоением X^{*an} . Тогда включение голоморфного L^2 -подкомплекса (3.1) в $\mathcal{L}_{(2)}^\bullet(H, h, \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o})$ является квазиизоморфизмом комплексов.*

Доказательство будет аналогично доказательству леммы Дольбо в [15] и подобно доказательству теоремы 6.2.5 из [10], на которое мы будем постоянно ссылаться. Как и выше, мы будем работать в окрестности точки ∞ , так как результат вне ∞ содержится в [10; §§ 6.2.d и 6.2.e].

В определении L^2 -комплекса L^2 -условие на сечения и условие на действие антиголоморфной части связности суть те же, что и в указанных параграфах. L^2 -условие на производную сечений изменяется. Новое слагаемое $(1 + |z_o|^2)dt'/t'^2$ в голоморфной части связности облегчает доказательства.

Мы используем полярные координаты: $t' = re^{i\theta}$. Сначала напомним некоторые понятия из [10]. В окрестности $t' = 0$ расслоение H оснащается $\mathfrak{D}_{z_o}''$ -голоморфным базисом $e^{(z_o)'}_{\beta, \ell, k}$. Элементы этого базиса имеют h -норму умеренного роста вблизи $t' = 0$. Мы обозначим их $e^{(z_o)'}_{\beta, \ell, k}$, где $\beta = \beta' + i\beta''$ пробегает конечное множество комплексных чисел, причем вещественная часть β' лежит в полуинтервале $[0, 1)$, ℓ – целое число (вес элемента) и k – индекс, используемый, чтобы различать разные элементы с одинаковыми β и ℓ . В таком базисе матрица связности $\mathfrak{D}_{z_o}'$ записывается как Θ'_{z_o} . Разложим ее на диагональную и нильпотентную части $\Theta'_{z_o, \text{diag}} + \Theta'_{z_o, \text{nilp}}$, где

$$\Theta'_{z_o, \text{diag}} = \bigoplus_{\beta} (q_{\beta, \zeta_o} + \beta) \star z \text{Id} \frac{dt'}{t'},$$

$$\Theta'_{z_o, \text{nilp}} = [Y + P(t, z)] \frac{dt'}{t'}$$

с $Y = (\bigoplus_{\beta} Y_{\beta})$ и q_{β, ζ_o} – так выбранное целое число, что число $\ell_{z_o}(q_{\beta, \zeta_o} + \beta) := q_{\beta, \zeta_o} + \beta' - \zeta_o \beta''$ принадлежит полуинтервалу $[0, 1)$, при этом ζ_o обозначает мнимую часть числа z_o . Теперь так упорядочим базис, что для любых ℓ, k мы имеем $Y(e^{(z_o)'}_{\beta, \ell, k}) = e^{(z_o)'}_{\beta, \ell-2, k}$, и формула для слагаемого $P(t, z_o)$ задается выражением (6.2.7) из [10].

Напомним, что мы обозначаем $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o} = \mathfrak{D}_{z_o} + (1 + |z_o|^2)dt'/t'^2$. Тогда, при очевидных обозначениях, имеем $\tilde{\Theta}'_{z_o, \text{nilp}} = \Theta'_{z_o, \text{nilp}}$ и $\tilde{\Theta}'_{z_o, \text{diag}} = \Theta'_{z_o, \text{diag}} + (1 + |z_o|^2) \text{Id } dt'/t'^2$.

Исчезновение H^2 . Сначала без каких-либо изменений в формулировке применим лемму 6.2.11 из [10] при фиксированном значении $z = z_o$. И вследствие этого мы все доказательство сведем к тому, что если для любого $\beta \in \ell_{z_o}(q_{\beta, \zeta_o} + \beta) = 0$ и любого $\ell \leq -1$ (на самом деле, $\ell = -1$ будет достаточно, так как здесь значение z приравнено к z_o) выражение $f(r)e'_{\beta, \ell, k} \frac{dt'}{t'} \wedge \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'}$ задает локальное сечение пучка $\mathcal{L}_{(2)}^2(H)$, то это сечение принадлежит образу оператора $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o} \left(t' f(r) e'_{\beta, \ell, k} \left(z_o \frac{dt'}{t'} + \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'} \right) \right) &= (1 + |z_o|^2 + z_o + (\beta \star z_o) t') f(r) e'_{\beta, \ell, k} \frac{dt'}{t'} \wedge \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'} \\ &\quad + \Theta'_{z_o, \text{nilp}} \left(t' f(r) e'_{\beta, \ell, k} \left(z_o \frac{dt'}{t'} + \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'} \right) \right). \end{aligned}$$

Из [15] и [10] в силу того, что множитель t' лежит в образе оператора $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}'' = \mathfrak{D}_{z_o}''$ (см. лемму 6.2.11 из [10]), легко увидеть, что последнее выражение будет из L^2 . По тем же причинам часть, которая умножена на t' в среднем выражении, лежит в образе $\mathfrak{D}_{z_o}''$. Следовательно, оба выражения лежат в образе $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}$. Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что константа $1 + |z_o|^2 + z_o$ не может равняться 0.

Вычисление H^1 . Из предыдущего результата следует, что L^2 -комплекс $\mathcal{L}_{(2)}^\bullet(H, h, \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o})$ квазиизоморфен своему подкомплексу

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{(2)}^0(H, h, \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}) \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}} \ker \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}^{(1)} \longrightarrow 0.$$

Мы теперь покажем, что имеет место аналог леммы 6.2.13 из [10]. Иными словами, мы покажем, что любое локальное сечение $\psi dt/t + \varphi d\bar{t}/\bar{t}$ из $\ker \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}^{(1)} \subset \mathcal{L}_{(2)}^1(H, h, \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o})$ может быть записано как сумма элемента из $\text{Image } \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}$ и элемента из $\mathcal{L}_{(2)}^{(1,0)}(H, h) \cap \ker \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}^{(1)}$.

Первая часть доказательства леммы 6.2.13 из [10] применяется сходным образом к рассматриваемой ситуации и сводит доказательство к случаю, где мы начинаем с локального сечения $\omega = \psi \frac{dt'}{t'} + \varphi \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'}$ из $\ker \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}^{(1)}$, где $\varphi = \sum_{\beta, \ell, k} \varphi_{\beta, \ell, k}(r) e'_{\beta, \ell, k}(z_o)$ и удовлетворяет здесь уравнению $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o} \omega = 0$.

Далее, рассмотрим коэффициент при $e^{-i\theta} e'_{\beta, \ell, k}(z_o) \frac{dt'}{t'} \wedge \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'}$ из соотношения

$$\mathfrak{D}_{z_o}'' \left(\psi \frac{dt'}{t'} \right) + \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}' \left(\varphi \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'} \right) = 0.$$

Обозначив $\psi_{\beta, \ell, k; -1}(r)$ коэффициент при $e^{-i\theta}$ в разложении Фурье коэффициента $\psi_{\beta, \ell, k}$, мы получаем для любых β, ℓ, k

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta, \ell, k}(r) e'_{\beta, \ell, k}(z_o) \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'} &= \frac{1}{2} r (r \partial_r - 1) \psi_{\beta, \ell, k; -1}(r) e'_{\beta, \ell, k}(z_o) \frac{d\bar{t}'}{\bar{t}'} \\ &= \mathfrak{D}_{z_o}'' (r e^{-2i\theta} \psi_{\beta, \ell, k; -1}(r) e'_{\beta, \ell, k}(z_o)). \end{aligned}$$

Так как локальное сечение $\psi dt'/t'$ есть L^2 -сечение, это влечет, что $r\psi$ есть L^2 и что $\tilde{\mathfrak{D}}'_0(re^{-2i\theta}\psi_{\beta,\ell,k;-1}e'^{(z_o)}_{\beta,\ell,k})$ есть также L^2 -сечение.

Это вычисление показывает, что локальное сечение ω эквивалентно по модулю $\text{Image } \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}(1,0)$ -сечению, которое есть L^2 -сечение и которое лежит в $\ker \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}^{(1)}$ (так как $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}\omega = 0$), как и ожидалось.

3.4. Завершение доказательства теоремы 1. Мы разобьем рассуждение на четыре шага.

1. Рассуждая точно так же, как в [10; §6.2.f], показываем, что “голоморфный” L^2 -комплекс (3.1) равен его подкомплексу $\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{\text{loc},z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})_{(2)}$. В силу когерентности комплекса гиперкогомологии комплекса $\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})$ являются конечномерными. По лемме 3 и в силу аргументов, приведенных выше, такими же являются гиперкогомологии голоморфного L^2 -комплекса (3.1).

2. Из леммы 4 и предыдущего результата мы заключаем, что когомологии комплекса сечений $\Gamma(X, \mathcal{L}_{(2)}^\bullet(H, h, \tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}))$ являются конечномерными. Согласно изометрии (2.5), когомологии комплекса $\Gamma(X, \mathcal{L}_{(2)}^\bullet(H, {}^Fh, {}^F\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}))$ также являются конечномерными. Следовательно, мы можем применить теорию Ходжа к L^2 -когомологиям. Соответствующее пространство гармонических k -форм ($k = 0, 1, 2$) является конечномерным, и его размерность не зависит от z_o , так как лапласиан ${}^F\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o}$ относительно метрики Fh не зависит от z_o , что обусловлено свойством гармоничности тройки $(H, {}^Fh, {}^FD_V)$.

3. Идя в обратном направлении, мы видим, что размерность пространства $\mathbf{H}^k(X, \text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t}))$ ($k = -1, 0, 1$) не зависит от z_o . Если $z_o = 1$, то нетривиальными могут быть только когомологии степени 0 (этот факт хорошо известен для регулярных $\mathcal{D}_X$ -модулей, скрученных при помощи экспоненты $e^{\lambda t}$ с $\lambda \in \mathbb{C}^*$). Следовательно, это верно для любого z_o и, более того, размерность пространства $\mathbf{H}^0$ не зависит от z_o .

4. Остается заметить, что гиперкогомологии комплексов $\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o} \otimes \mathcal{E}^{-c(z_o)t})$ и $\text{DR}({}^F\mathfrak{M}_{z_o})$ имеют одну и ту же размерность. Это очевидно, если $z_o = 0$, так как в этом случае объекты равны. С другой стороны, если $z_o \neq 0$, мы сводим вопрос к $\mathcal{D}_X$ -модулям. Работая в алгебраической категории, мы сводим все к доказательству того, что для заданного регулярного голономного $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -модуля размерность коядра оператора

$$\partial_t - \lambda: M \rightarrow M$$

не зависит от $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Это следует из регулярности модуля M в бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно дать другое доказательство предложения 1, когда $z_o \neq 0$, используя z_o -связность $\tilde{\mathfrak{D}}_{z_o} - dt$ на H с метрикой $e^{2\text{Re}(z_o\bar{t})}h$. Это доказательство аналогично доказательству в [8]⁷, и можно использовать изометрию (2.4) вместо (2.5).

⁷Воспользуемся благоприятным случаем, чтобы исправить небольшую неточность в [8]: на с. 1283 неравенство должно иметь вид

$$\int_{\rho}^{r_1} r^{2\beta} |\log r|^{k-2} \psi(r) \frac{dr}{r} \leq \rho^{2\beta} |\log \rho|^{k-2} \psi(\rho) (|\log \rho| - |\log r_1|)$$

с константой C , ограниченной сверху величиной $4|\log r_1|^{-1} < +\infty$. Подобным же образом, на с. 1284, строка 5, константа C должна быть ограничена сверху $4\kappa(\epsilon)|\log r_1|^{-1} < +\infty$.

Тем не менее промежуточные шаги будут другие, так как аналог леммы 3, где L^2 -условие берется относительно метрики $e^{2\operatorname{Re}(z_o\bar{t})}h$, неверен. Лемма работает, как и в [8], в пространстве, полученном из X при помощи вещественного раздутия в бесконечности. Сравнение различных комплексов нужно делать на этом пространстве. Однако такое доказательство, по-видимому, не распространяется на случай $z_o = 0$. По этой причине мы не излагаем его здесь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Biquard. Fibrés de Higgs et connexions intégrables: le cas logarithmique (diviseur lisse) // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1997. V. 30. № 1. P. 41–96.
- [2] А. А. Болибрух. Проблема Римана–Гильберта // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 3–47.
- [3] А. А. Болибрух. О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 9–19.
- [4] А. А. Болибрух. Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 553–555.
- [5] A. Borel, F. Ehlers, P.-P. Grivel, A. Haeffliger, B. Kaup, B. Malgrange. Algebraic $\mathcal{D}$ -modules. Boston, MA: Academic Press, 1987. (Perspect. Math. V. 2.)
- [6] B. Malgrange. Équations différentielles à coefficients polynomiaux. Boston, MA: Birkhäuser, 1991. (Progr. Math. V. 96.)
- [7] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations // Éléments de la théorie des systèmes différentiels. I: $\mathcal{D}$ -modules cohérents et holonomes / ed. Ph. Maisonobe, C. Sabbah. Paris: Hermann, 1993. P. 1–80.
- [8] C. Sabbah. Harmonic metrics and connections with irregular singularities // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1999. V. 49. № 4. P. 1265–1291.
- [9] C. Sabbah. Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius. Paris: CNRS Éditions & EDP Sciences, 2002. (Savoirs Actuels (Les Ulis).)
- [10] C. Sabbah. Polarizable twistor $\mathcal{D}$ -modules // <http://math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/articles.html>.
- [11] C. Simpson. Harmonic bundles on noncompact curves // J. Amer. Math. Soc. 1990. V. 3. № 3. P. 713–770.
- [12] C. Simpson. Higgs bundles and local systems // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1992. V. 75. P. 5–95.
- [13] C. Simpson. Mixed twistor structures // Prépublication. Toulouse: Université de Toulouse, 1997; arXiv:math.AG/9705006.
- [14] S. Szabo. Nahm transform of meromorphic integrable connections on the Riemann sphere. Manuscript, 2004.
- [15] S. Zucker. Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 -cohomology in the Poincaré metric // Ann. of Math. (2). 1979. V. 109. № 3. P. 415–476.

UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz,
École polytechnique, F-91128 Palaiseau cedex, France
E-mail: sabbah@math.polytechnique.fr

Поступила в редакцию
27.07.2004