Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Сергеев, Гармонические отображения в однородные римановы многообразия: твисторный подход, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 177–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:06:04

УДК 517.957

Памяти Андрея Андреевича Болибруха

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ОДНОРОДНЫЕ
РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ: ТВИСТОРНЫЙ ПОДХОД

А. Г. СЕРГЕЕВ

Статья посвящена твисторному подходу к исследованию гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow N$ из римановых поверхностей M в римановы многообразия N . Идея подхода заключается в том, чтобы для заданного риманова многообразия N построить так называемое твисторное расслоение $\pi: Z \rightarrow N$, где Z — почти комплексное многообразие, которое обладает следующим свойством: проекция $\pi \circ \psi: M \rightarrow N$ любого почти голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow Z$ является гармоническим отображением. Для широких классов римановых многообразий N твисторный подход позволяет построить указанным образом все гармонические отображения $\varphi: M \rightarrow N$ и тем самым свести исходную вещественную задачу описания гармонических отображений в римановы многообразия к комплексной задаче описания почти голоморфных отображений в почти комплексные многообразия. В статье подробно рассмотрены следующие классы однородных римановых многообразий N , к которым применим твисторный метод, — это компактные группы Ли, пространства петель таких групп и грассмановы многообразия, включая гильбертов грассманиан.

Библиография: 11 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	178
§ 1. Гармонические отображения и интегрируемые системы	179
1.1. Гармонические отображения римановых многообразий	179
1.2. Гармонические отображения в компактные группы Ли (конструкция Уленбек)	180
§ 2. Пространства петель и флаговые многообразия	183
2.1. Пространство петель компактной группы Ли	183
2.2. Флаговые многообразия	185
§ 3. Твисторные конструкции гармонических отображений	189
3.1. Гармонические отображения в грассмановы многообразия и симметрические пространства	189
3.2. Пространство петель как твисторное расслоение	193
3.3. Гармонические отображения в гильбертов грассманиан и пространства петель	195
Список литературы	199

Введение

Статья посвящена исследованию гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow N$ из римановых поверхностей M в римановы многообразия N с помощью твисторного подхода. Идея этого подхода состоит в том, чтобы свести вещественную задачу описания гармонических отображений к комплексной задаче описания голоморфных отображений в почти комплексные многообразия. А именно, для заданного риманова многообразия строится твисторное расслоение $\pi: Z \rightarrow N$, где Z — почти комплексное многообразие, которое обладает следующим свойством: для любого почти голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow Z$ его проекция $\varphi := \pi \circ \psi: M \rightarrow N$ является гармоническим отображением. Общая теория твисторных пространств представлена в [6], в данной статье мы ограничиваемся подробным изложением твисторного подхода для важных классов однородных многообразий N , а именно компактных групп Ли, их пространств петель и грассмановых многообразий, включая гильбертов грассманиан.

Твисторный подход к исследованию гармонических отображений римановых поверхностей в компактные группы Ли G (на примере унитарной группы) был предложен Уленбек в работе [10] (хотя твисторная терминология и не использовалась в этой статье). Мы излагаем конструкцию Уленбек в п. 1.2. В ее основе лежит представление гармонического уравнения в виде уравнения нулевой кривизны для семейства связностей, зависящих от спектрального параметра λ . На языке твисторов это означает, что естественное отображение $\Omega G \rightarrow G$, сопоставляющее петле $\gamma \in \Omega G$ ее значение в точке $-1 \in S^1$, является твисторным расслоением над группой G (как это объясняется в п. 3.2). Более того, в рассматриваемом случае любое гармоническое отображение $\varphi: M \rightarrow G$ может быть реализовано как проекция почти голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow \Omega G$. С помощью подхода Уленбек можно также построить преобразование типа Бэклунда на пространстве гармонических отображений, которое позволяет “размножать” гармонические отображения.

В следующем параграфе приводятся основные необходимые для дальнейшего сведения о пространствах петель компактных групп Ли и флаговых многообразиях (более подробно об этом см. в [9]).

Третий параграф посвящен твисторным конструкциям гармонических отображений. В п. 3.1 строится целая серия твисторных расслоений над грассмановыми многообразиями, ассоциированных с флаговыми многообразиями. В случае римановой сферы $M = \mathbb{CP}^1$ твисторный подход позволяет получить любые гармонические отображения из M в грассмановы многообразия. Указанная твисторная конструкция переносится на так называемые внутренние симметрические пространства, возникающие как базы однородных расслоений флаговых многообразий. В п. 3.2 дается твисторная интерпретация конструкции Уленбек из п. 1.2. В п. 3.3 рассматриваются гармонические отображения в грассманиан гильбертова пространства и строятся аналоги флаговых расслоений над ними (предложение 3.9). Так как пространство петель ΩG допускает изометрическое вложение в гильбертов грассманиан, этот класс содержит, в частности, все гармонические отображения в ΩG . Последние представляют особый интерес ввиду их связи с уравнениями Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00236, 02-02-04002), программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1542.2003.1) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

§ 1. Гармонические отображения и интегрируемые системы

1.1. Гармонические отображения римановых многообразий. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ есть гладкое отображение римановых многообразий. Его дифференциал $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ можно рассматривать как сечение $d\varphi$ расслоения $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$, где $\varphi^{-1}(TN)$ – обратный образ касательного расслоения TN при отображении φ : слой $\varphi^{-1}(TN)_p$ в точке $p \in M$ есть $T_{\varphi(p)}N$. Наделим расслоение $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$ римановой метрикой, индуцированной римановыми метриками на M и N , и обозначим через $|d\varphi|$ норму $d\varphi$, вычисленную в указанной метрике. В локальных координатах (x^i) в точке $p \in M$ и (u^α) в точке $\varphi(p) \in N$ эта норма равна

$$|d\varphi(p)|^2 = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta},$$

где $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x)$ – компоненты отображения φ , (g_{ij}) и $(h_{\alpha\beta})$ – метрические тензоры многообразий M и N соответственно, а (g^{ij}) – матрица, обратная к (g_{ij}) .

Определим *энергию отображения* φ по формуле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi(p)|^2 \text{vol}_g, \quad (1.1)$$

где vol_g – элемент объема в метрике g на M . Отображение φ называется *гармоническим*, если оно является экстремальным для функционала $E(\varphi)$ по отношению к гладким вариациям φ с компактным носителем.

Уравнение Эйлера–Лагранжа для $E(\varphi)$ имеет вид

$$\text{tr}(\nabla d\varphi) = 0, \quad (1.2)$$

где оператор $\tau_\varphi := \text{tr}(\nabla d\varphi)$ называется *полем напряжений* отображения φ . В локальном ортонормированном базисе $\{X_j\}$ касательного расслоения TM в окрестности точки $p \in M$ он задается формулой

$$\text{tr}(\nabla d\varphi)_p = \sum_j ({}^M \nabla_{X_j} d\varphi)(X_j),$$

где ${}^M \nabla$ – связность Леви-Чивита многообразия M . Пользуясь этим выражением, выпишем уравнения (1.2) в локальных координатах (x^i) на M и (u^α) на N :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k {}^M \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_k} + \sum_{\alpha,\beta} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\varphi) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} \right\} \\ & = \Delta_M \varphi_\gamma + \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\varphi) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ${}^M \Gamma_{ij}^k$, ${}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ – символы Кристоффеля связностей Леви-Чивита ${}^M \nabla$ на M и ${}^N \nabla$ на N соответственно, а Δ_M – оператор Лапласа–Бельтрами многообразия M . В случае $N = \mathbb{R}^n$ уравнение (1.3) становится линейным и превращается в обычное уравнение Лапласа–Бельтрами на многообразии M .

Нас будет особо интересовать случай, когда M есть риманова поверхность, а N — кэлерово многообразие. В этой ситуации мы будем предполагать, что многообразия M и N наделены комплексными структурами, совместимыми с римановыми метриками на данных многообразиях. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ есть гладкое отображение римановой поверхности M в кэлерово многообразие N . Продолжим дифференциал $d\varphi$ комплексно-линейно на комплексифицированное расслоение $T^{\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ и представим его в виде

$$d\varphi = \delta\varphi + \bar{\delta}\varphi,$$

где $\delta\varphi$ есть сечение расслоения $T^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, а $\bar{\delta}\varphi$ — сечение $T^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. Тогда условие гармоничности отображения φ примет вид

$$\bar{\delta}\delta\varphi = \nabla_{\partial/\partial\bar{z}}d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0 \iff \delta\bar{\delta}\varphi = \nabla_{\partial/\partial z}d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) = 0, \quad (1.4)$$

где через ∇ обозначена связность на расслоении $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированная связностью Леви-Чивита ${}^N\nabla$ на N .

Для кэлерова многообразия N дифференциал $d\varphi$ можно разложить и далее, пользуясь представлением

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \bar{\partial}''\varphi, \quad \bar{\delta}\varphi = \partial''\varphi + \bar{\partial}'\varphi,$$

где $\partial'\varphi$ — сечение $T^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}N)$, а $\partial''\varphi$ — сечение $T^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}N)$. Условие гармоничности (1.4) в этих обозначениях принимает вид

$$\bar{\delta}\partial'\varphi = 0 \iff \delta\partial''\varphi = 0. \quad (1.5)$$

Напомним теорему Кошуля–Мальгранжа (см. [7]), согласно которой для любого комплексного векторного расслоения E над римановой поверхностью M , наделенного связностью ∇ , существует единственная комплексная структура J на E , относительно которой $E \rightarrow M$ является голоморфным векторным расслоением, а $\bar{\partial}_J$ -оператор совпадает с $(0,1)$ -составляющей $\nabla^{0,1}$ связности ∇ . Указанную комплексную структуру J будем называть *КМ-структурой*.

В ее терминах первое из условий гармоничности (1.4) означает, что $\delta\varphi$ является голоморфным сечением расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ относительно КМ-структуры на $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированной связностью ${}^N\nabla$. Аналогично, первое из условий (1.5) означает, что $\partial'\varphi$ — голоморфное сечение расслоения $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$.

1.2. Гармонические отображения в компактные группы Ли (конструкция Уленбек). Пусть G есть компактная группа Ли, снабженная двусторонне инвариантной (относительно присоединенного представления) римановой метрикой. Обозначим через μ форму Картана–Маурера на G , т.е. тавтологическую 1-форму на G со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Она задается формулой: $\mu(\xi) = \xi$ для любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}$, рассматриваемого как левоинвариантное векторное поле на G . Тогда

$$d\mu + \frac{1}{2}\mu \wedge \mu = 0,$$

где 2-форма $\mu \wedge \mu$ на G определяется посредством

$$\frac{1}{2}(\mu \wedge \mu)(\xi, \eta) := [\mu(\xi), \mu(\eta)] \quad \text{для } \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Тем самым μ является формой плоской связности на G .

Пусть теперь $\varphi: M \rightarrow G$ есть гладкое отображение римановой поверхности M в группу G . Обозначим через $\alpha := \varphi^*\mu$ обратный образ формы Картана–Маурера при отображении φ . Тогда α есть $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма на M , удовлетворяющая равенству

$$d\alpha + \frac{1}{2}\alpha \wedge \alpha = 0. \quad (1.6)$$

Иначе говоря, форма α задает плоскую связность на расслоении $\varphi^{-1}(TG)$. Продолжая форму α на комплексифицированное расслоение $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$, мы можем записать ее в локальной карте на M с локальной координатой z в виде $\alpha = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$. Условие гармоничности отображения φ переписывается в терминах α в виде

$$\bar{\partial}A_z + \partial A_{\bar{z}} = 0, \quad (1.7a)$$

а условие (1.6) дает соотношение

$$\bar{\partial}A_z - \partial A_{\bar{z}} + 2[A_{\bar{z}}, A_z] = 0. \quad (1.7b)$$

Соотношения (1.7) можно записать в эквивалентном, но более симметричном виде

$$\bar{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z] = 0, \quad \partial A_{\bar{z}} - [A_{\bar{z}}, A_z] = 0. \quad (1.8)$$

Сопоставим форме α семейство форм α_λ , зависящее от параметра $\lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-1})A_z dz + \frac{1}{2}(1 - \lambda)A_{\bar{z}} d\bar{z}.$$

Заметим, что семейство α_λ включает в себя исходную форму α при $\lambda = -1$.

ЛЕММА 1.1 (Уленбек [10]). *Отображение $\varphi: M \rightarrow G$ гармонично тогда и только тогда, когда связность на расслоении $\varphi^{-1}(TG)$, задаваемая формой α_λ , является плоской при всех $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Иначе говоря,*

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0 \quad \text{для любого } \lambda \in \mathbb{C}^*. \quad (1.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В терминах локальной комплексной координаты z на M имеем

$$\begin{aligned} & 2\left(d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda\right) \\ &= (1 - \lambda^{-1})\bar{\partial}A_z \wedge dz + (1 - \lambda)\partial A_{\bar{z}} \wedge d\bar{z} + [(1 - \lambda^{-1})A_z, (1 - \lambda)A_{\bar{z}}] \\ &= \lambda(-\partial A_{\bar{z}} + [A_{\bar{z}}, A_z]) + (-\bar{\partial}A_z + \partial A_{\bar{z}} - 2[A_{\bar{z}}, A_z]) + \frac{1}{\lambda}(\bar{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z]). \end{aligned}$$

Коэффициенты при λ и $\frac{1}{\lambda}$ равны нулю ввиду соотношений (1.8), а постоянный по λ член равен нулю ввиду (1.7b). Лемма доказана.

С формой α_λ связана система линейных уравнений типа Захарова–Шабата, имеющая вид

$$dE_\lambda = E_\lambda \alpha_\lambda \iff E_\lambda^{-1} dE_\lambda = \alpha_\lambda \quad \text{при } \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad (1.10)$$

которую в локальной карте можно переписать в виде

$$\bar{\partial}E_\lambda = (1 - \lambda)E_\lambda A_{\bar{z}}, \quad \partial E_\lambda = (1 - \lambda^{-1})E_\lambda A_z, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*. \quad (1.11)$$

Уравнение нулевой кривизны (1.9) является условием совместности системы (1.10) (или (1.11)). Поэтому, фиксируя произвольную отмеченную точку $p_0 \in M$, мы можем вывести отсюда утверждение о разрешимости системы (1.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 (Уленбек [10]). Пусть $\varphi: M \rightarrow G$ — центрированное (т.е. $\varphi(p_0) = e \in G$) гармоническое отображение односвязной римановой поверхности M в компактную группу Ли G . Тогда существует единственное решение $E: M \times \mathbb{C}^* \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ системы (1.10), удовлетворяющее условиям:

$$E_1 = e, \quad E_{-1} = \varphi, \quad E_\lambda(p_0) = e \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Более того, E_λ голоморфно зависит от $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и $E_\lambda \in G$ при $\lambda \in S^1$.

Заметим, что семейство E_λ при каждом $\lambda \in \mathbb{C}^*$ задает тривиализацию расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$, рассматриваемого как голоморфное расслоение относительно канонической комплексной КМ-структуры, порождаемой формой Картана–Маурера α .

Обратно, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (Уленбек [10]). Пусть $E: M \times \mathbb{C}^* \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ — семейство голоморфных сечений расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$, наделенного канонической комплексной КМ-структурой, которое голоморфно зависит от $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Предположим, что $E_1 = e$ и выражения

$$\frac{1}{1-\lambda} E_\lambda^{-1} \bar{\partial} E_\lambda \quad \text{и} \quad \frac{1}{1-\lambda^{-1}} E_\lambda^{-1} \partial E_\lambda$$

не зависят от λ . Тогда отображение $\varphi := E_{-1}$ гармонично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно проверить в произвольной локальной карте на M с локальной координатой z . Обозначим

$$A_z := \frac{E_\lambda^{-1} \partial E_\lambda}{1-\lambda^{-1}}, \quad A_{\bar{z}} := \frac{E_\lambda^{-1} \bar{\partial} E_\lambda}{1-\lambda}$$

и положим $\alpha := A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$. По условию форма α не зависит от λ и (при $\lambda = -1$) совпадает с $\frac{1}{2} \varphi^{-1} d\varphi$. Сечения E_λ при любом $\lambda \in \mathbb{C}^*$ удовлетворяют системе уравнений

$$\bar{\partial} E_\lambda = (1-\lambda) E_\lambda A_{\bar{z}}, \quad \partial E_\lambda = (1-\lambda^{-1}) E_\lambda A_z.$$

Следовательно, для этой системы выполняется условие совместности, т.е. условие нулевой кривизны (1.9) для связности $\alpha_\lambda = \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1}) A_z dz + \frac{1}{2}(1-\lambda) A_{\bar{z}} d\bar{z}$. Отсюда вытекает в силу леммы 1.1, что отображение φ гармонично. Предложение доказано.

Представление условия гармоничности в виде уравнения нулевой кривизны позволяет ожидать, что на пространстве гармонических отображений $\varphi: M \rightarrow G$ действует преобразование типа Бэклунда, позволяющее “размножать” гармонические отображения. Такое преобразование в случае унитарной группы $G = U(N)$ было найдено Уленбек [10]. Мы приведем его конструкцию в изложении Валли [11]. (Обобщение конструкции Уленбек на произвольные компактные группы Ли G дано в [3], см. также [6].)

Обозначим через $\text{Gr}(\mathbb{C}^N)$ полное грассманово многообразие

$$\text{Gr}(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{r=0}^N G_r(\mathbb{C}^N).$$

Точки $\text{Gr}(\mathbb{C}^N)$, т.е. подпространства в $\mathbb{C}^N$, можно отождествить с эрмитовыми проекторами в $\mathbb{C}^N$, сопоставляя проектору P его образ $\text{Im } P \in \text{Gr}(\mathbb{C}^N)$. С учетом этого многообразие $\text{Gr}(\mathbb{C}^N)$ можно вложить в группу $U(N)$ посредством

$$\text{Gr}(\mathbb{C}^N) \ni P \longmapsto P - P^\perp = V \in U(N).$$

Образ $\text{Gr}(\mathbb{C}^N)$ при этом вложении совпадает с подмножеством $\{V \in U(N) \mid V^2 = I\}$.

Тем самым, любое гладкое отображение $M \rightarrow \text{Gr}(\mathbb{C}^N)$ можно рассматривать как семейство проекторов $\{P\}$ на M , которое в композиции с вложением $\text{Gr}(\mathbb{C}^N) \hookrightarrow U(N)$ порождает отображение $\varphi: M \rightarrow U(N)$, $\varphi = P - P^\perp$. Семейству проекторов $\{P^\perp\}$ на M будет отвечать отображение $-\varphi: M \rightarrow U(N)$. Отображение $\varphi = P - P^\perp$ голоморфно тогда и только тогда, когда $P^\perp \cdot \bar{\partial}P = 0$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.4 (Уленбек [10], Валли [11]). *Для любого гармонического отображения $\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow U(N)$ существует конечная последовательность $\varphi_0, \dots, \varphi_k$ гармонических отображений $\mathbb{CP}^1 \rightarrow U(N)$, удовлетворяющих условиям:*

$$\varphi_0 = \text{const}, \quad \varphi_k = \varphi, \quad \varphi_j = \varphi_{j-1} \cdot (P_j - P_j^\perp), \quad 1 \leq j \leq k,$$

и доставляющих каноническую факторизацию отображения φ вида

$$\varphi = \varphi_0 \cdot (P_1 - P_1^\perp) \cdots (P_k - P_k^\perp).$$

Отображение вида $\varphi \mapsto \varphi \cdot (P - P^\perp)$ Уленбек называет *добавлением унитарона*. Таким образом, отображение φ в теореме 1.4 получается из $\varphi_0 = \text{const}$ добавлением k унитаронов. Можно показать, что в этом случае энергия отображения φ равна $4\pi k$.

§ 2. Пространства петель и флаговые многообразия

Конструкция Уленбек, изложенная в предыдущем параграфе, допускает естественную интерпретацию в терминах твисторных расслоений. Мы объясним это в п. 3.2, но предварительно нам необходимо ввести основные понятия, относящиеся к пространствам петель компактных групп Ли и их флаговым многообразиям.

2.1. Пространство петель компактной группы Ли. Для компактной группы Ли G обозначим через $LG = \text{Map}(S^1, G)$ ее группу петель, т.е. пространство C^∞ -гладких отображений $S^1 \rightarrow G$, где S^1 отождествляется с единичной окружностью в $\mathbb{C}$. Это группа Ли–Фреше относительно операции поточечного умножения (см. [9]). *Пространством петель ΩG группы G (или пространством центрированных петель)* называется однородное пространство (правых смежных классов) группы LG вида

$$\Omega G = LG/G, \tag{2.1}$$

где группа G в знаменателе отождествляется с подгруппой постоянных отображений $S^1 \rightarrow g_0 \in G$.

Группа петель LG действует на ΩG левыми сдвигами. Обозначим через o начало (нейтральный элемент) в ΩG , отождествляемое с классом постоянных отображений: $o := [G]$. Пространство петель ΩG можно отождествить (как однородное пространство) с подгруппой $L_1 G$ центрированных отображений в LG , переводящих $1 \in S^1$ в

единицу e группы G . Касательное пространство к ΩG в начале o отождествляется с пространством

$$\Omega \mathfrak{g} = L\mathfrak{g}/\mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G , $L\mathfrak{g} = \text{Map}(S^1, \mathfrak{g})$. Векторы касательного пространства $T_o(\Omega G)$ удобно задавать рядами Фурье: произвольный вектор ξ комплексифицированного касательного пространства $T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G) = T_o(\Omega G) \otimes \mathbb{C}$ имеет разложение Фурье вида $\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta}$, где коэффициенты ξ_k принадлежат комплексифицированной алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Вектор $\xi \in T_o(\Omega G) \iff \xi_{-k} = \bar{\xi}_k$.

Пространство петель ΩG обладает естественной симплектической структурой, инвариантной относительно действия группы петель LG на ΩG . Ввиду инвариантности, достаточно задать ее ограничение на $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$. Для этого зафиксируем на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и рассмотрим на $L\mathfrak{g}$ 2-форму ω вида

$$\omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta) \rangle d\theta, \quad \xi, \eta \in L\mathfrak{g}.$$

Эта формула задает левоинвариантную замкнутую 2-форму на LG , причем $\omega(\xi, \eta) = 0$, если хотя бы одно из отображений ξ, η постоянно. Поэтому она спускается до левоинвариантной замкнутой 2-формы на $\Omega \mathfrak{g}$, которая, как нетрудно проверить, невырождена и потому порождает симплектическую структуру на ΩG . Более того, в случае полупростой группы Ли G она однозначно определяется выбором инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ (см. [8], а также [9]).

Инвариантная комплексная структура на ΩG обеспечивается “комплексным” представлением $\Omega G = LG/G$ в виде однородного пространства комплексной группы Ли–Фреше $LG^{\mathbb{C}} = \text{Map}(S^1, G^{\mathbb{C}})$, где $G^{\mathbb{C}}$ – комплексификация группы Ли G . Указанное представление имеет вид (см. [8], а также [9])

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}}, \quad (2.2)$$

где $L^+G^{\mathbb{C}} = \text{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$ есть подгруппа $LG^{\mathbb{C}}$, состоящая из отображений $S^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$, продолжающихся до голоморфных отображений круга $\Delta := \{|z| < 1\} \rightarrow G^{\mathbb{C}}$. Заметим, что в случае унитарной группы $G = U(N)$ равенство (2.2) означает, иными словами, что любая гладкая невырожденная матричная функция $T(\theta)$ на окружности допускает факторизацию вида

$$T(\theta) = U(\theta) \cdot H_+(\theta),$$

где $U(\theta)$ – гладкая унитарная (т.е. со значениями в $U(N)$) матричная функция, а $H_+(\theta)$ продолжается до голоморфной (и гладкой вплоть до границы) невырожденной матричной функции в единичном круге Δ . Указанная факторизация является параметрическим аналогом стандартного представления невырожденной матрицы в виде произведения унитарной и верхнетреугольной матриц.

Индукцированную комплексным представлением (2.2) инвариантную комплексную структуру J^1 на ΩG нетрудно описать и в терминах разложений Фурье. А именно, ограничение J^1 на комплексифицированное касательное пространство $T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ в начале задается следующей явной формулой:

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta} \longmapsto J^1 \xi = -i \sum_{k > 0} \xi_k e^{ik\theta} + i \sum_{k < 0} \xi_k e^{ik\theta}.$$

Введенные симплектическая и комплексная структуры на ΩG согласованы в том смысле, что $\omega(J^1\xi, J^1\eta) = \omega(\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in T_o(\Omega G)$ и симметричная форма

$$g^1(\xi, \eta) := \omega(\xi, J^1\eta) \quad \text{на } T_o(\Omega G) \times T_o(\Omega G)$$

положительно определена. Тем самым, ввиду инвариантности ω и J^1 эта форма продолжается до инвариантной римановой метрики g^1 на ΩG . Иначе говоря, пространство петель ΩG является *кэлеровым многообразием Фреше, наделенным кэлеровой метрикой g^1* .

Существование двух типов представлений пространства петель ΩG в виде однородного пространства вещественной и комплексной групп Ли–Фреше

$$\Omega G = LG/G = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}}$$

является характеристическим свойством пространства ΩG . Конечномерные кэлеровы многообразия, обладающие аналогичным свойством, называются *флаговыми многообразиями*.

2.2. Флаговые многообразия. Приведем основные определения, относящиеся к флаговому многообразию (более подробно об этих многообразиях см. в [9]).

Для любого разложения натурального числа N в сумму натуральных чисел $N = r_1 + \dots + r_n$ можно построить *многообразие флагов типа $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_n)$* в $\mathbb{C}^N$, полагая

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N) = \{ \mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n) : V_i \text{ — линейные подпространства в } \mathbb{C}^N \\ \text{такие, что } V_1 \subset \dots \subset V_n \text{ и } \dim V_i = r_1 + \dots + r_i \}.$$

В частности, при $\mathbf{r} = (r, N - r)$ флаговое многообразие

$$\mathcal{F}_{(r, N-r)}(\mathbb{C}^N) = \{ \text{подпространства } V \subset \mathbb{C}^N \text{ размерности } r \} = G_r(\mathbb{C}^N)$$

совпадает с грассмановым многообразием r -мерных подпространств в $\mathbb{C}^N$. При $\mathbf{r} = (1, \dots, 1)$ многообразие $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N) =: \mathcal{F}(\mathbb{C}^N)$ называется *многообразием полных флагов*

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^N) = \{ V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{N-1} \subset V_N = \mathbb{C}^N : \dim V_i = i \}.$$

Возвращаясь к определению флагового многообразия $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$, введем для $i = 1, \dots, n$ подпространства $E_i := V_{i-1}^{\perp} \cap V_i$, совпадающие с ортогональным дополнением V_{i-1} в V_i (относительно стандартного эрмитова скалярного произведения в $\mathbb{C}^N$). Тогда набор подпространств $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ будет задавать разложение $\mathbb{C}^N$ в ортогональную прямую сумму подпространств E_i размерности r_i , $i = 1, \dots, n$. Чтобы восстановить исходный флаг $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$ по набору $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ указанного вида, достаточно положить: $V_i := E_1 + \dots + E_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тем самым, многообразие флагов $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ можно эквивалентным образом определить как *множество наборов $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ попарно ортогональных подпространств E_i размерности r_i , $i = 1, \dots, n$, задающих разложение $\mathbb{C}^N$ в ортогональную прямую сумму*

$$\mathbb{C}^N = \bigoplus_{i=1}^n E_i.$$

На многообразии флагов $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ транзитивно действует унитарная группа $U(N)$, так что $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ является однородным пространством этой группы, а именно

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N) = U(N)/U_{\mathbf{r}}(N) = U(N)/U(r_1) \times \cdots \times U(r_n). \quad (2.3)$$

С другой стороны, группа $GL(N, \mathbb{C})$ также действует на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ транзитивно, при этом подгруппа изотропии в начале будет совпадать с подгруппой $P_{\mathbf{r}}$ блочных верхнетреугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} \boxed{r_1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{r_2} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{r_n} \end{pmatrix}.$$

Итак, наряду с “вещественным” представлением (2.3) мы получаем для $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ “комплексное” представление в виде однородного пространства группы $GL(N, \mathbb{C})$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N) = GL(N, \mathbb{C})/P_{\mathbf{r}}. \quad (2.4)$$

В частных случаях $\mathbf{r} = (r, N-r)$ и $\mathbf{r} = (1, \dots, 1)$ возникают известные представления в виде однородных пространств для грассманова многообразия

$$G_r(\mathbb{C}^N) = U(N)/U(r) \times U(N-r) = GL(N, \mathbb{C})/P_{(r, N-r)}$$

и многообразия полных флагов

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^N) = U(N)/T^N = GL(N, \mathbb{C})/B_+,$$

где $T^N = U(1) \times \cdots \times U(1)$ есть N -мерный тор, а $B_+ = P_{(1, \dots, 1)}$ – стандартная борелевская подгруппа верхнетреугольных матриц.

Можно представить флаговое многообразие $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ и в виде однородного пространства комплексной *полупростой* группы, заменив группу $GL(N, \mathbb{C})$ на $SL(N, \mathbb{C})$.

Приведем общее алгебраическое определение флаговых многообразий. Для этого рассмотрим комплексную полупростую группу Ли $G^{\mathbb{C}}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и корневое разложение алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ относительно этой картановской подалгебры:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad (2.5)$$

где Δ есть множество всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Зафиксируем в множестве Δ некоторое подмножество $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ простых корней, выбор которого задает на множестве Δ отношение частичной упорядоченности, и обозначим через Δ^+ множество положительных корней относительно этого отношения. Тем самым, $\alpha \in \Delta^+$, если и только если $\alpha = \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i$ с $a_i > 0$.

Введем теперь, по аналогии с борелевской подалгеброй верхнетреугольных матриц, стандартную борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}_+$ алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$: $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{n}_+$ – нильпотентная подалгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ вида

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

В частном случае алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}_+$ отождествляется с подалгеброй наддиагональных матриц, а $\mathfrak{b}_+$ – с подалгеброй верхнетреугольных матриц.

Вообще, будем называть *борелевской подалгеброй* любую подалгебру $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, сопряженную стандартной борелевской подалгебре $\mathfrak{b}_+$ относительно присоединенного действия группы $G^{\mathbb{C}}$ на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Любая подалгебра $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, содержащая борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}$, называется *параболической*. По аналогии с борелевскими параболические подалгебры $\mathfrak{p}$ можно также определить как подалгебры в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, сопряженные одной из стандартных параболических подалгебр. Последние являются аналогами алгебр Ли $\mathfrak{p}_r$ введенных выше параболических групп P_r и определяются следующим образом. Зафиксируем произвольное упорядоченное подмножество π в множестве $\{1, \dots, l\}$ и обозначим через $\Pi_{\pi} \subset \Pi$ множество простых корней алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ с номерами из π . Рассмотрим редуктивную подалгебру $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ вида

$$\mathfrak{l}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\pi}} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

где Δ_{π} – линейная оболочка простых корней Π_{π} в Δ , и нильпотентную подалгебру $\mathfrak{u}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, равную

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\pi}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Стандартная параболическая подалгебра $\mathfrak{p}_{\pi}$, отвечающая π , есть $\mathfrak{p}_{\pi} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u}$. Она содержит стандартную борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}_+$ и потому является параболической. В случае алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ подалгебра $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ совпадает с подалгеброй блочно-диагональных матриц в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, а $\mathfrak{u}$ – с подалгеброй блочных наддиагональных матриц.

После этого алгебраического отступления вернемся к общему определению флаговых многообразий комплексной полупростой группы Ли $G^{\mathbb{C}}$. Пусть $\mathfrak{p}$ – произвольная параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и P – отвечающая ей параболическая подгруппа в $G^{\mathbb{C}}$. *Флаговым многообразием* группы $G^{\mathbb{C}}$, отвечающим параболической подалгебре $\mathfrak{p}$, называется однородное пространство вида

$$F = G^{\mathbb{C}}/P. \quad (2.6)$$

Наряду с “комплексным” представлением (2.6) флагового многообразия F имеет и “вещественное” представление F в виде однородного пространства вещественной группы Ли. А именно, вспомним, что группа $G^{\mathbb{C}}$ является комплексификацией компактной группы Ли G . Группа G транзитивно действует на $G^{\mathbb{C}}/P$ и

$$F = G/L, \quad (2.7)$$

где подгруппа $L = G \cap P$ в случае стандартной параболической подалгебры $\mathfrak{p}$ имеет своей алгеброй Ли вещественную форму $\mathfrak{l}$ введенной выше подалгебры $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. Более инвариантно, подгруппу L можно определить как централизатор $C(T)$ некоторого тора T в группе G .

Итак, мы получаем для флагового многообразия F вещественное и комплексное представления в виде однородного пространства

$$F = G/L = G^{\mathbb{C}}/P.$$

Из комплексного представления (2.6) вытекает, что F — комплексное многообразие, которое обладает G -инвариантной комплексной структурой. Касательное пространство векторов типа $(1, 0)$ в начале (относительно этой структуры) отождествляется с подалгеброй $\mathfrak{u}$ из разложения

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u} \oplus \bar{\mathfrak{u}}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u}.$$

Из вещественного представления (2.7) вытекают компактность и кэлеровость F .

Пространство петель ΩG можно рассматривать как универсальное флаговое многообразие группы G в том смысле, что все флаговые многообразия F группы G допускают каноническую иммерсию в пространство петель ΩG .

Для того чтобы доказать это, заметим, прежде всего, что вещественное представление многообразия флагов $F = G/L$ можно интерпретировать по-другому как представление F в виде орбиты присоединенного действия Ad группы G на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Именно, орбита элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ относительно присоединенного действия имеет вид $G/G(\xi)$, где подгруппа изотропии $G(\xi)$ в точке ξ совпадает с централизатором ξ , равным $G(\xi) = \{g \in G : \text{Ad } g(\xi) = \xi\}$. Все такие орбиты являются многообразиями флагов, и, наоборот, любое многообразие флагов компактной полупростой группы Ли можно представить в этом виде.

Рассмотрим теперь естественное действие окружности S^1 на пространстве петель ΩG (отождествляемом с подгруппой L_1G в группе петель LG), задаваемое вращением петель

$$\lambda \cdot \gamma(z) = \gamma(\lambda)^{-1} \gamma(\lambda z), \quad \lambda \in S^1,$$

где $\gamma \in \Omega G$. Петля γ является неподвижной точкой относительно S^1 -действия тогда и только тогда, когда $\gamma(\lambda z) = \gamma(\lambda) \gamma(z)$ для всех $\lambda, z \in S^1$. Иначе говоря, γ есть гомоморфизм $S^1 \rightarrow G$. Но если $\gamma: S^1 \rightarrow G$ — гомоморфизм, то и все сопряженные к γ петли $\gamma_g = g \gamma g^{-1}$ для $g \in G$ также являются гомоморфизмами. Множество всех таких петель (классы сопряженности гомоморфизма γ) параметризуется точками однородного пространства $F_\gamma = G/G(\gamma)$, где $G(\gamma)$ — централизатор однопараметрической подгруппы $\gamma(S^1)$ в G . Указанное однородное пространство F_γ отождествляется, как мы видели, с многообразием флагов группы G . Итак, *множество неподвижных точек S^1 -действия на ΩG является несвязным объединением*

$$\text{Fix}(S^1) = \bigcup_{\gamma} F_\gamma$$

флаговых многообразий F_γ , где γ пробегает множество классов сопряженности гомоморфизмов $S^1 \rightarrow G$, а флаговые многообразия F_γ вкладываются в ΩG в виде конечномерных кэлеровых подмногообразий. Тем самым, построены отображения $\Gamma: F \rightarrow \Omega G$, которые, как можно показать, являются вполне геодезическими иммерсиями.

§ 3. Твисторные конструкции гармонических отображений

Пусть N – риманово многообразие и Z – почти эрмитово многообразие, т.е. почти комплексное многообразие, наделенное эрмитовой метрикой. Расслоение $\pi: Z \rightarrow N$ называется *твисторным*, если для любого почти голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow Z$ римановой поверхности M в многообразие Z его проекция $\pi \circ \psi$ является гармоническим отображением. Наличие твисторного расслоения у заданного риманова многообразия N дает эффективный способ построения гармонических отображений в N как проекций почти голоморфных отображений в твисторное пространство Z над N . Общая теория твисторных расслоений рассматривается в [6], в данной статье мы ограничиваемся несколькими наиболее важными примерами, связанными с приложениями к интегрируемым системам.

3.1. Гармонические отображения в грассмановы многообразия и симметрические пространства. Имеется целая серия твисторных расслоений над грассмановыми многообразиями $G_r(\mathbb{C}^N)$, задаваемых флаговыми многообразиями. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ есть флаговое многообразие типа $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ в $\mathbb{C}^N$ (см. п. 2.2), допускающее однородное представление (2.3):

$$\mathcal{F} = U(N)/U(r_1) \times \dots \times U(r_n).$$

На уровне алгебр Ли это представление соответствует разложению комплексифицированной алгебры Ли $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(N)$ в прямую ортогональную сумму

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(N) &\cong \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \cong \overline{\mathbb{C}^N} \otimes \mathbb{C}^N \\ &\cong (\overline{E}_1 \oplus \dots \oplus \overline{E}_n) \otimes (E_1 \oplus \dots \oplus E_n) \\ &\cong [\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_n)] \oplus \left[\bigoplus_{i < j} (\overline{E}_i E_j \oplus \overline{E}_j E_i) \right]. \end{aligned}$$

(В последней формуле опущен знак тензорного произведения в выражении $\overline{E}_i E_j$ и сопряженном к нему, чтобы сделать формулы обозримыми. Это правило применяется и в дальнейшем.)

Из приведенного разложения алгебры $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(N)$ вытекает, что комплексифицированное касательное пространство $T_o^{\mathbb{C}} \mathcal{F}$ в начале $o \in \mathcal{F}$ есть

$$T_o^{\mathbb{C}} \mathcal{F} = \bigoplus_{i < j} D_{ij}^{\mathbb{C}} := \bigoplus_{i < j} (\overline{E}_i E_j \oplus \overline{E}_j E_i).$$

Каждую из компонент D_{ij} можно наделять двумя различными комплексными структурами: для одной из них $(1, 0)$ -подпространство совпадает с $\overline{E}_i E_j$, для другой – с $\overline{E}_j E_i$. По теореме Бореля–Хирцебруха [2] любая $U(N)$ -инвариантная почти комплексная структура J на $\mathcal{F}$ задается выбором одной из двух указанных комплексных структур на каждом D_{ij} . Будем называть *канонической* почти комплексную структуру J^1 , для которой

$$T_o^{1,0} \mathcal{F} = \bigoplus_{i < j} \overline{E}_i E_j.$$

Фиксируем упорядоченное подмножество $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$. Обозначим через σ^c дополнение к σ в $\{1, \dots, n\}$ и положим $r = \sum_{i \in \sigma} r_i$. С каждым таким подмножеством σ ассоциировано однородное расслоение

$$\pi = \pi_\sigma: \mathcal{F} = \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)} \longrightarrow \frac{U(N)}{U(r) \times U(N-r)} = G_r(\mathbb{C}^N),$$

сопоставляющее $(E_1, \dots, E_n) \mapsto E = \bigoplus_{i \in \sigma} E_i$. Ему отвечает разложение комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ в прямую сумму вертикального и горизонтального подрасслоений. В частности, вертикальное подпространство в начале есть $\bigoplus_{i,j} D_{ij}^{\mathbb{C}}$, где $i < j$ и $i, j \in \sigma$, либо $i, j \in \sigma^c$. Соответственно, горизонтальное подпространство в начале совпадает с $\bigoplus_{i,j} D_{ij}^{\mathbb{C}}$, где $i < j$ и $i \in \sigma, j \in \sigma^c$ либо $i \in \sigma^c, j \in \sigma$.

Введем теперь, наряду с канонической, $U(N)$ -инвариантную почти комплексную структуру J^2 на $\mathcal{F}$, полагая $J^2 = J^1$ на горизонтальных векторах и $J^2 = -J^1$ на вертикальных векторах. Заметим, что построенное однородное расслоение π_σ , вообще говоря, не голоморфно относительно обеих почти комплексных структур. Кроме того, почти комплексная структура J^2 никогда не является интегрируемой. Однако оказывается, что именно она связана с гармоническими отображениями, точнее, мы покажем далее, что расслоение $\pi_\sigma: (\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^N), J^2) \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ является твисторным.

Пусть M – риманова поверхность. Обозначим через $\underline{\mathbb{C}}^N = M \times \mathbb{C}^N$ тривиальное расслоение над M , наделенное стандартной эрмитовой метрикой на слое $\mathbb{C}^N$. Любое подрасслоение $E \subset \underline{\mathbb{C}}^N$ ранга r определяет отображение $\varphi_E: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ тавтологическим образом: $\varphi_E(p) :=$ слой E_p над точкой $p \in M$. Обратно, любое отображение $\varphi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ задает подрасслоение $E \subset \underline{\mathbb{C}}^N$ ранга r .

Рассмотрим гладкое отображение римановой поверхности M в грассманово многообразие $G_r(\mathbb{C}^N)$. Обозначим через π и $\pi^\perp$ ортогональные проекции $\underline{\mathbb{C}}^N$ на подрасслоение E и его ортогональное дополнение $E^\perp$. Расслоение E наделяется комплексной КМ-структурой, которая в локальной карте на M с локальной координатой z задается $\bar{\partial}$ -оператором $\partial''_E = \pi \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi$. Обратный образ $\varphi_E^{-1}(T^{\mathbb{C}}G_r(\mathbb{C}^N))$ комплексифицированного касательного расслоения грассманиана при отображении φ_E допускает разложение

$$\varphi_E^{-1}(T^{\mathbb{C}}G_r(\mathbb{C}^N)) \cong \overline{E}E^\perp \oplus \overline{E^\perp}E,$$

в терминах которого дифференциал φ_E задается локально компонентами

$$A'_E := \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi, \quad A''_E := \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi.$$

(В дальнейшем мы иногда опускаем знак $\circ$ для упрощения формул.) В частности, расслоение $E \subset \underline{\mathbb{C}}^N$ голоморфно тогда и только тогда, когда $A''_E = 0$, и в этом случае комплексная КМ-структура на E совпадает с индуцированной из $\underline{\mathbb{C}}^N$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \pi^\perp \left[\frac{\partial}{\partial z} (\pi + \pi^\perp) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\pi + \pi^\perp) \frac{\partial}{\partial z} \right] \pi \\ &= A'_E \partial''_E + \partial'_{E^\perp} A''_E - A''_E \partial'_E - \partial''_{E^\perp} A'_E = A'_E \partial''_E - \partial''_{E^\perp} A'_E. \end{aligned}$$

Иначе говоря, расслоение $A'_E \in \text{Hom}(E, E^\perp)$ голоморфно относительно КМ-структур на E и $E^\perp$.

Вообще, будем называть подрасслоение $E \subset \underline{\mathbb{C}}^N$ *гармоническим*, если

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E.$$

Гармоничность E эквивалентна гармоничности отображения $\varphi_E: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ (см. [5]). Заметим также, что расслоение E гармонично тогда и только тогда, когда гармонично его ортогональное дополнение $E^\perp$.

Более общим образом, рассмотрим произвольный набор $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ попарно ортогональных подрасслоений E_i в $\underline{\mathbb{C}}^N$ ранга r_i с $r_1 + \dots + r_n = N$, порождающих разложение $\underline{\mathbb{C}}^N$ в ортогональную прямую сумму

$$\underline{\mathbb{C}}^N = \bigoplus_{i=1}^k E_i.$$

Будем называть такой набор подрасслоений $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ *движущимся флагом* на M . Он определяет, так же как и выше, отображение $\psi_{\mathcal{E}}: M \rightarrow \mathcal{F}_{r_1 \dots r_n} = \mathcal{F}$, сопоставляющее точке $p \in M$ флаг, задаваемый подпространствами $(E_{1,p}, \dots, E_{n,p})$. Обратно, любое гладкое отображение $\psi: M \rightarrow \mathcal{F}$ определяет движущийся флаг $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ указанного выше вида, где $E_i = \psi^{-1}T_i$ есть обратный образ естественного тавтологического расслоения $T_i \rightarrow \mathcal{F}$: слой T_i в точке $\mathcal{E}^0 = (E_1^0, \dots, E_n^0) \in \mathcal{F}$ совпадает, по определению, с подпространством E_i^0 для $1 \leq i \leq n$.

Так же как в грасмановом случае, дифференциал $\psi_{\mathcal{E}}$ задается локально компонентами

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi_j, \quad A''_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi_j,$$

где $\pi_i: \underline{\mathbb{C}}^N \rightarrow E_i$ — ортогональная проекция.

ТЕОРЕМА 3.1 (Берстол–Саламон [4]). *Построенное выше однородное расслоение $\pi_\sigma: (\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^N), J^2) \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ является твисторным, т.е. для любого J^2 -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{F}$ его проекция $\varphi := \pi_\sigma \circ \psi: M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ есть гармоническое отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого движущегося флага $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$, которому отвечает J^2 -голоморфное отображение $\psi_{\mathcal{E}}: M \rightarrow \mathcal{F}$, расслоение $E := \bigoplus_{i \in \sigma} E_i$ гармонично. Голоморфность отображения $\psi_{\mathcal{E}}$ означает, что

$$A'_{ij} = 0 = A''_{ji}, \quad \text{если} \quad \begin{cases} i > j \text{ и } i, j \in \sigma \text{ или } i, j \in \sigma^c, \\ i < j \text{ и } i \in \sigma, j \in \sigma^c \text{ или } i \in \sigma^c, j \in \sigma. \end{cases}$$

Если $k < l$ и $k \in \sigma, l \in \sigma^c$, то, так же как в грасмановом случае, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_l \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \pi_i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \pi_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] \pi_k = \sum_i (A''_{li} A'_{ik} - A'_{li} A''_{ik}) \\ &= \sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} A'_{ik} - \sum_{i \in \sigma} A'_{li} A''_{ik} = \left(\sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} \right) \left(\sum_{i \in \sigma^c} A'_{ik} \right) - \left(\sum_{i \in \sigma} A'_{li} \right) \left(\sum_{i \in \sigma} A''_{ik} \right) \\ &= \pi_l \left(\partial''_{E^\perp} \circ A'_E - A'_E \circ \partial''_E \right) \pi_k. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения выполняются также при $k > l$, откуда следует, что $A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E$, т.е. расслоение E гармонично. Теорема доказана.

В случае, когда M есть риманова сфера $\mathbb{CP}^1$, можно доказать обращение теоремы 3.1, позволяющее получить твисторное описание всех гармонических отображений $\mathbb{CP}^1 \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$.

ТЕОРЕМА 3.2 (Берстол, см. [4]). *Любое гармоническое отображение $\mathbb{CP}^1 \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ является проекцией J^2 -голоморфного отображения $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathcal{F}$ в многообразии флагов $\mathcal{F} = \mathcal{F}_r(\mathbb{C}^N)$ при отображении $\pi_\sigma: (\mathcal{F}_r(\mathbb{C}^N), J^2) \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$.*

Доказательство указанного обращения основано на теореме Биркгофа–Гротендика о классификации голоморфных векторных расслоений над $\mathbb{CP}^1$.

Твисторная конструкция гармонических отображений в грассмановы многообразия, изложенная в предыдущем параграфе, допускает непосредственное обобщение на широкий класс симметрических пространств, являющихся базами однородных расслоений флаговых многообразий. Это так называемые *внутренние* симметрические пространства, класс которых включает в себя, помимо грассмановых многообразий, четномерные сферы, эрмитовы симметрические пространства и т.д. (подробнее об этих пространствах см. в [3]). Приведем конструкцию внутренних симметрических пространств, ассоциированных с флаговыми многообразиями.

Пусть $F = G/L = G^{\mathbb{C}}/P$ есть флаговое многообразие компактной полупростой группы Ли G . Алгебра Ли $\mathfrak{p}$ параболической группы P представляется в виде

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u},$$

где $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{u}$ – редуктивная и нильпотентная подалгебры $\mathfrak{p}$, построенные в п. 2.2 для стандартных параболических подалгебр. Здесь мы дадим другое определение этих подалгебр в терминах так называемого канонического элемента.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 (см. [3; теорема 4.4]). *Для любой параболической подалгебры $\mathfrak{p}$ найдется единственный элемент ξ (принадлежащий центру алгебры $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$), для которого все собственные значения оператора $\text{ad } \xi$ являются целыми мнимыми числами, т.е. принадлежат $\sqrt{-1}\mathbb{Z}$. Указанный элемент ξ называется каноническим элементом параболической подалгебры $\mathfrak{p}$.*

Обозначим через $\mathfrak{g}_j$ собственное подпространство оператора $\text{ad } \xi$ с собственным значением $\sqrt{-1}j$. В этих терминах подалгебры $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{u}$ задаются формулами

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{u} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}_i.$$

Построим теперь *симметрическое пространство* $N = N(F)$, ассоциированное с флаговым многообразием F , полагая $N = G/K$, где K – подгруппа G с алгеброй Ли

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \left[\bigoplus_i \mathfrak{g}_{2i} \right].$$

Так как алгебра Ли $\mathfrak{l}$ группы L содержится в $\mathfrak{g}_0$, то имеется однородное расслоение

$$F = G/L \longrightarrow G/K = N$$

флагового многообразия F над ассоциированным с ним симметрическим пространством N . Подгруппу K можно также определить с помощью оператора $\tau_\xi := \text{Ad} \exp \pi \xi$ на $\mathfrak{g}$. Поскольку собственные значения $\text{ad } \xi$ являются мнимыми целыми числами, оператор τ_ξ задает инволюцию на $\mathfrak{g}$, экспонента которой дает инволюцию σ группы G . Подгруппа K совпадает со связной компонентой единицы G_0^σ в группе неподвижных точек G^σ этой инволюции.

Итак, мы построили для каждого флагового многообразия F ассоциированное с ним *симметрическое G -пространство* $N = N(K)$ (которое определяется единственным образом) и *каноническое однородное расслоение* $F \rightarrow N$. Заметим, что расслоение $F \rightarrow N$ определяется, вообще говоря, неоднозначно, но весь произвол состоит в том, что различные точки N могут иметь один и тот же стабилизатор K . Число таких точек конечно, поэтому имеется не более конечного числа расслоений указанного вида.

Определим, так же как и выше, почти комплексные структуры J^1 и J^2 на F . В терминах подалгебр $\mathfrak{g}_j$ они описываются следующим образом. Подпространство $(1, 0)$ -векторов $T_o^{1,0}F$ почти комплексной структуры J^1 в начале o совпадает с

$$\bar{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_i,$$

тогда как подпространство $(1, 0)$ -векторов $T_o^{1,0}F$ почти комплексной структуры J^2 в начале o есть

$$\left[\bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_{2i} \right] \oplus \left[\bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_{2i+1} \right].$$

В остальные точки F эти структуры разносятся с помощью действия группы G на F .

Справедлив следующий аналог теоремы 3.1.

ТЕОРЕМА 3.4 (Берстол–Ронсли [3]). *Любое из канонических расслоений $\pi: (F, J^2) \rightarrow N(F)$ является твисторным расслоением.*

Иными словами, проекция $\varphi := \pi \circ \psi$ любого J^2 -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow F$ римановой поверхности M в многообразие флагов F является гармоническим отображением $\varphi: M \rightarrow N$. Некоторые условия, достаточные для справедливости обратного утверждения, т.е. для существования твисторного поднятия $\psi: M \rightarrow F$ заданного гармонического отображения $\varphi: M \rightarrow N$, приведены в [3] (см. также [6]).

3.2. Пространство петель как твисторное расслоение. В этом пункте будет дана твисторная интерпретация конструкции Уленбек из п. 1.2.

Обозначим через

$$\pi: \Omega G \rightarrow G, \quad \gamma \rightarrow \gamma(-1),$$

отображение, сопоставляющее петле γ ее значение в точке $-1 \in S^1$. Это отображение является аналогом однородного расслоения $\pi: F \rightarrow N$, рассмотренного в предыдущем пункте.

В п. 1.2 мы сопоставили гармоническому отображению $\varphi: M \rightarrow G$ из римановой поверхности M в компактную группу Ли G отображение $E_\lambda: M \rightarrow G^\mathbb{C}$, которое голоморфно зависит от $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и удовлетворяет условиям

$$E_1 = e, \quad E_{-1} = \varphi, \quad E_\lambda(p_0) = e \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Рассматривая E_λ при $\lambda \in S^1$, получим отображение $E: S^1 \times M \rightarrow G$ или, иначе, отображение $E: M \rightarrow \Omega G$ в пространство петель ΩG .

В п. 1.2 была построена почти комплексная структура J^1 на пространстве ΩG . Теперь, так же как в предыдущем пункте, мы введем на ΩG почти комплексную структуру J^2 , ответственную за гармонические отображения. А именно, для вектора $\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta}$, принадлежащего касательному пространству $T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, положим

$$J^2 \xi = -i \sum_{k \neq 0} (-1)^{k+1} \operatorname{sign} k \cdot \xi_k e^{ik\theta}.$$

Структура J^2 совпадает с J^1 при нечетных k и с $-J^1$ — при четных k .

Заметим, что построенное отображение $E: M \rightarrow \Omega G$ обладает тем свойством, что разложение Фурье формы $E_\lambda^{-1} dE_\lambda$ по $\lambda \in S^1$ содержит, согласно формуле (1.11), только члены, линейные по λ и λ^{-1} . Назовем такое отображение $E: M \rightarrow \Omega G$ *супергоризонтальным*. Тем самым, отображение $E: M \rightarrow \Omega G$ супергоризонтально и потому голоморфно относительно обеих почти комплексных структур J^1 и J^2 . Оно задает, очевидно, твисторное поднятие отображения $\varphi: M \rightarrow G$, которое мы будем называть *каноническим*. Итак, доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $\varphi: M \rightarrow G$ — центрированное (т.е. $\varphi(p_0) = e \in G$) гармоническое отображение. Тогда его каноническое твисторное поднятие $E: M \rightarrow \Omega G$ супергоризонтально и голоморфно относительно обеих почти комплексных структур J^1 и J^2 .

Предложение 1.3 из п. 1.2 показывает, обратно, что проекция $E_{-1} =: \varphi$ любого супергоризонтального голоморфного отображения $E: M \rightarrow \Omega G$ является гармоническим отображением. Последнее утверждение можно усилить следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6 (Берстол). Отображение $\pi: (\Omega G, J^2) \rightarrow G$ является твисторным расслоением, т.е. проекция $\varphi := \pi \circ \psi$ любого J^2 -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow \Omega G$ римановой поверхности M является гармоническим отображением.

Доказательство этого утверждения проводится так же, как в случае однородных флаговых расслоений $\pi: F \rightarrow N$ (см. теорему 3.4).

В п. 2.2 отмечалось, что пространство петель ΩG можно рассматривать как универсальное флаговое многообразие группы G в том смысле, что все флаговые многообразия F группы G вкладываются в ΩG . Точно так же твисторное расслоение $\pi: \Omega G \rightarrow G$ можно рассматривать как универсальное твисторное расслоение в следующем смысле.

Рассмотрим, как и в п. 2.2, естественное S^1 -действие на ΩG , порождаемое вращением петель. Указанное действие индуцирует S^1 -действие на отображениях $\Phi: M \rightarrow \Omega G$, которое сохраняет J^1 - и J^2 -голоморфность этих отображений. Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7 (Уленбек [10]). Пусть отображение $\Phi: M \rightarrow \Omega G$, являющееся каноническим поднятием гармонического отображения $\varphi: M \rightarrow G$, неподвижно относительно S^1 -действия: $S^1 \cdot \Phi = \Phi$. Тогда образ $\Phi(M)$ содержится

в некотором флаговом многообразии $F = G/L$, а образ $\varphi(M)$ – в симметрическом пространстве $N(F) = G/K$.

Тем самым, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\Gamma} & \Omega G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{\gamma} & G \end{array},$$

в которой $\pi: F \rightarrow N(F)$ есть твисторное расслоение над симметрическим пространством $N(F)$, построенное в п. 3.1, а отображение Γ – вполне геодезическая иммерсия, построенная в п. 2.2, которая голоморфна относительно обеих почти комплексных структур J^1 и J^2 .

Горизонтальные отображения в приведенной диаграмме допускают простое описание в терминах канонического элемента, введенного в п. 3.1. Именно, предположим, что группа G имеет тривиальный центр, и рассмотрим флаговое многообразие $F = G/L = G^{\mathbb{C}}/P$ с каноническим элементом ξ . Условие тривиальности центра G означает, что $\exp(2\pi\xi) = e \in G$. Поэтому мы можем определить отображение $\Gamma: F \rightarrow \Omega G$, полагая его на нейтральном элементе $o \in F$ равным $\Gamma(o) :=$ отображение $\{e^{it} \mapsto \exp(t\xi)\}$ и распространяя в другие точки G/L с помощью левых сдвигов группы G . С другой стороны, имеется естественное отображение $\gamma: N \rightarrow G$, сопоставляющее точке x внутреннего симметрического пространства N , ассоциированного с F , элемент $\gamma(x)$ группы G , порождающий инволюцию в точке x . Оба отображения Γ и γ являются вполне геодезическими иммерсиями.

3.3. Гармонические отображения в гильбертов грассманиан и пространства петель. В этом пункте мы рассмотрим гармонические отображения в грассманиан комплексного гильбертова пространства. Данный класс содержит, в частности, все гармонические отображения в пространства петель ΩG , поскольку пространства ΩG допускают изометрическое вложение в гильбертов грассманиан.

Напомним основные определения, относящиеся к гильбертову грассманиану (более подробно об этом см. [8], [9]). Пусть H есть комплексное (сепарабельное) гильбертово пространство, моделью которого для нас является пространство $L^2(S^1, \mathbb{C})$ квадратично интегрируемых функций на окружности или его векторный аналог $L^2(S^1, \mathbb{C}^N)$. Предположим, что H обладает *поляризацией*, т.е. разложением

$$H = H_+ \oplus H_- \quad (3.1)$$

в прямую ортогональную сумму бесконечномерных замкнутых подпространств. В случае $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^N)$ в качестве таких подпространств выступают

$$H_+ = \left\{ f \in H : f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k, f_k \in \mathbb{C}^N \right\},$$

$$H_- = \left\{ f \in H : f(z) = \sum_{k < 0} f_k z^k, f_k \in \mathbb{C}^N \right\},$$

где $z = e^{i\theta}$.

Обозначим через $\mathrm{GL}(H)$ группу линейных ограниченных операторов на H , имеющих ограниченный обратный. Относительно поляризации (3.1) любой линейный оператор $A \in \mathrm{End} H$ записывается в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a: H_+ \rightarrow H_+, & b: H_- \rightarrow H_+ \\ c: H_+ \rightarrow H_-, & d: H_- \rightarrow H_- \end{pmatrix}.$$

По определению, группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ состоит из преобразований $A \in \mathrm{GL}(H)$, для которых “внедиагональные” члены b и c являются операторами Гильберта–Шмидта (коротко: HS-операторами). Иными словами, группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ состоит из преобразований $A \in \mathrm{GL}(H)$, в которых “внедиагональные” члены b и c операторов A из $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ “малы” по сравнению с “диагональными” членами a и d . Через $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H)$ обозначим пересечение $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ с группой $\mathrm{U}(H)$ унитарных операторов в H .

Напомним, что линейный оператор $T: H_1 \rightarrow H_2$, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 , называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в H_1 сходится ряд $\sum_i \|Te_i\| < \infty$. Операторы Гильберта–Шмидта $T: H_1 \rightarrow H_2$ образуют комплексное гильбертово пространство $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$ с нормой, равной

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пространство $\mathrm{HS}(H, H)$ операторов Гильберта–Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H , является двусторонним идеалом в алгебре $\mathrm{L}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в H .

С группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$, так же как в конечномерном случае, связано некоторое грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, которое мы и называем *гильбертовым грассманианом*. Более подробно, обозначим через $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ множество замкнутых подпространств $W \subset H$ таких, что ортогональная проекция $\mathrm{pr}_+: W \rightarrow H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\mathrm{pr}_-: W \rightarrow H_-$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Иначе говоря, множество $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ состоит из подпространств $W \subset H$, которые “мало” отличаются от подпространства H_+ в том смысле, что проекция $\mathrm{pr}_+: W \rightarrow H_+$ “близка” к изоморфизму, а проекция $\mathrm{pr}_-: W \rightarrow H_-$ “мала”. Эквивалентное определение: подпространство $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, если оно является образом линейного оператора $w: H_+ \rightarrow H$ такого, что оператор $w_+ := \mathrm{pr}_+ \circ w$ фредгольмов, а $w_- := \mathrm{pr}_- \circ w$ – оператор Гильберта–Шмидта.

Легко видеть, что если $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, то график любого HS-оператора $w': W \rightarrow W^\perp$ также принадлежит $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$. Обозначим множество таких подпространств через U_W :

$$\begin{aligned} U_W &= \{W' \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H) : W' \text{ есть график HS-оператора } w': W \rightarrow W^\perp\} \\ &= \{W' \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H) : \text{ортогональная проекция } W' \rightarrow W \text{ есть изоморфизм}\}. \end{aligned}$$

Открытые подмножества $\{U_W\}$ играют роль атласа координатных окрестностей для грассманова многообразия $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$.

Введенная выше группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ естественным образом действует на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$. Это действие транзитивно, так же как и действие унитарной подгруппы $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H)$. Подгруппа изотропии $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H)$ в точке $H_+ \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ совпадает с $\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-)$, тем самым грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ является однородным пространством группы $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H)$ вида

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H) = \mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H) / \mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-).$$

Пользуясь этим представлением, можно доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8 (см. [8], а также [9]). *Гильбертов грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ является комплексным гильбертовым многообразием, локальная модель которого совпадает с пространством операторов Гильберта–Шмидта. Атлас на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ задается координатными окрестностями*

$$U_W = \{W' \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H) : W' \text{ есть график HS-оператора } w' : W \rightarrow W^\perp\},$$

а карты – отображениями $U_W \ni W' \mapsto w' \in \mathrm{HS}(W, W^\perp)$.

Многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ имеет счетное число связных компонент, нумеруемых индексом фредгольмова оператора w_+ для подпространства $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, совпадающего с образом линейного оператора $w : H_+ \rightarrow H$. Будем говорить, что подпространство W имеет *виртуальную размерность* d , если индекс w_+ равен d . Обозначим компоненту $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, состоящую из подпространств W виртуальной размерности d , через $G_d(H)$. Тогда

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H) = \bigcup_d G_d(H). \quad (3.2)$$

С этим разложением связано другое “координатное” представление $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, которое мы опишем в терминах модели H , задаваемой гильбертовым пространством $L^2(S^1, \mathbb{C})$. Наделим $L^2(S^1, \mathbb{C})$ каноническим базисом $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, так что подпространство H_+ будет порождаться элементами $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, а H_- – элементами $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}_-}$, где через $\mathbb{Z}_+$ обозначено подмножество целых неотрицательных чисел в $\mathbb{Z}$, а через $\mathbb{Z}_-$ – его дополнение в $\mathbb{Z}$. Рассмотрим в качестве “координатных” подпространств в H замкнутые линейные подпространства H_S , порождаемые векторами $\{z^s\}_{s \in S}$, которые нумеруются подмножествами $S \subset \mathbb{Z}$, *сравнимыми с $\mathbb{Z}_+$* . Иначе говоря, подмножествами S , для которых множества $S - \mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Z}_+ - S$ состоят из конечного числа точек. Число $|S - \mathbb{Z}_+| - |\mathbb{Z}_+ - S|$ называется *виртуальной мощностью* S . Заметим, что виртуальная размерность подпространства H_S в точности совпадает с виртуальной мощностью S .

Нетрудно показать, что для любого $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ найдется подмножество S , сравнимое с $\mathbb{Z}_+$, для которого ортогональная проекция $\mathrm{pr}_S : W \rightarrow H_S$ является изоморфизмом. Пользуясь этим свойством, введем на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ новый атлас, задаваемый открытыми множествами $\{U_S\}$, где S – подмножество $\mathbb{Z}$, сравнимое с $\mathbb{Z}_+$. Координатная окрестность $U_S = U_{H_S}$ состоит, по определению, из подпространств, являющихся графиками операторов Гильберта–Шмидта $H_S \rightarrow H_S^\perp = H_{S^\perp}$, где $S^\perp = \mathbb{Z} - S$.

Так как $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H)$ транзитивно действует на грассманиане $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, то можно построить $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H)$ -инвариантную элерову метрику на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ по скалярному произведению на касательном пространстве $T_{H_+} \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ в начале $H_+ \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$, инвариантному относительно действия подгруппы изотропии $\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-)$. Касательное пространство $T_{H_+} \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$ совпадает с пространством операторов Гильберта–Шмидта $\mathrm{HS}(H_+, H_-)$, а инвариантное скалярное произведение на нем задается

формулой

$$(A, B) \mapsto \operatorname{Re}\{\operatorname{tr}(AB^*)\}, \quad A, B \in \operatorname{HS}(H_+, H_-).$$

Заметим, что мнимая часть комплексного скалярного произведения $\operatorname{tr}(AB^*)$ определяет на $T_{H_+} \operatorname{Gr}_{\operatorname{res}}(H)$ невырожденную инвариантную 2-форму, которая продолжается до $\operatorname{U}_{\operatorname{res}}(H)$ -инвариантной симплектической структуры на многообразии $\operatorname{Gr}_{\operatorname{res}}(H)$. Тем самым, на $\operatorname{Gr}_{\operatorname{res}}(H)$ задана кэлерова структура, превращающая его в *кэлерово гильбертово многообразие*.

Ввиду разложения (3.2) исследование гармонических отображений в $\operatorname{Gr}_{\operatorname{res}}(H)$ сводится к исследованию гармонических отображений в грассманианы $G_d(H)$ виртуальной размерности d , которое можно проводить теми же методами, что и в случае грассманова многообразия $G_r(\mathbb{C}^N)$. Так же как в п. 2.2, строятся флаговые многообразия $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$ типа $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, состоящие из наборов $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_n)$ подпространств $W_i \subset H$ виртуальной размерности r_i с $r_1 + \dots + r_n = d$. Далее, для любого упорядоченного подмножества $\sigma \subset \{1, \dots, d\}$ строится однородное расслоение $\pi_\sigma: \mathcal{F} \rightarrow G_d(H)$, сопоставляющее $(W_1, \dots, W_n) \mapsto W = \bigoplus_{i \in \sigma} W_i$. Так же как в п. 3.1, на флаговом многообразии $\mathcal{F}$ вводятся почти комплексные структуры J^1 и J^2 . Справедливо следующее предложение, которое доказывается так же, как теорема 3.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. *Однородное расслоение $\pi_\sigma: (\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H), J^2) \rightarrow G_d(H)$ является твисторным, т.е. для любого J^2 -голоморфного отображения $\psi: M \rightarrow \mathcal{F}$ его проекция $\varphi := \pi_\sigma \circ \psi: M \rightarrow G_d(H)$ есть гармоническое отображение.*

Обратимся теперь к гармоническим отображениям в пространства петель и построим, прежде всего, изометрическое вложение пространств ΩG в гильбертов грассманиан $\operatorname{Gr}_{\operatorname{res}}(H)$, упомянутое в начале этого пункта.

Рассмотрим сначала группу петель LG , где $G = \operatorname{GL}(N, \mathbb{C})$ – группа невырожденных комплексных $(N \times N)$ -матриц. Выберем в качестве комплексного гильбертова пространства H пространство $L^2(S^1, \mathbb{C}^N)$ с естественной поляризацией, описанной в начале этого пункта. Каждой петле $\gamma \in \operatorname{LGL}(N, \mathbb{C})$ можно сопоставить линейный оператор $M_\gamma \in \operatorname{End} H$, который действует на вектор $f \in L^2(S^1, \mathbb{C}^N)$ поточечным применением матрицы $\gamma(z) \in \operatorname{GL}(N, \mathbb{C})$ к вектору $f(z) \in \mathbb{C}^N$:

$$(M_\gamma f)(z) := \gamma(z)f(z).$$

Нетрудно показать, что построенный оператор M_γ принадлежит $\operatorname{GL}_{\operatorname{res}}(H)$ для любого $\gamma \in \operatorname{LGL}(N, \mathbb{C})$.

Действительно, пусть $\gamma(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k z^k$, где $\gamma_k \in \operatorname{L}(N, \mathbb{C})$. Выберем в H базис, задаваемый функциями вида $\varepsilon_i z^p$, где $\{\varepsilon_i\}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathbb{C}^N$, а $p \in \mathbb{Z}$. В этом базисе оператор M_γ имеет матричное представление вида

$$M_\gamma \leftrightarrow (M_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}, \quad \text{где } M_{p,q} = \gamma_{q-p} \in \operatorname{L}(N, \mathbb{C}).$$

Для того чтобы оператор $M_\gamma \in \operatorname{GL}_{\operatorname{res}}(H)$, необходимо и достаточно, чтобы его компоненты, задаваемые отображениями $M_\gamma^{+-}: H_+ \rightarrow H_-$ и $M_\gamma^{-+}: H_- \rightarrow H_+$, были операторами Гильберта–Шмидта. В терминах матричного представления $(M_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}$ это означает, что должны выполняться неравенства

$$\sum_{p \geq 0, q < 0} \|M_{p,q}\|^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{p < 0, q \geq 0} \|M_{p,q}\|^2 < \infty.$$

Указанные соотношения равносильны неравенству $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k \|\gamma_k\|^2 < \infty$, которое выполняется, если петля γ непрерывно дифференцируема.

Для того чтобы построить вложение в $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ группы петель LG , где G – компактная группа Ли, нужно выбрать в качестве H гильбертово пространство $L^2(S^1, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, на котором группа LG действует с помощью присоединенного представления. Отождествляя алгебру Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ с $\mathbb{C}^N$ (где N – размерность $\mathfrak{g}$) и фиксируя инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, мы реализуем LG в виде подгруппы группы $LU(N)$. Вложение $\mathrm{LGL}(N, \mathbb{C})$ в $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$, описанное выше, переводит $LU(N)$ в $U_{\mathrm{res}}(H)$.

Построенное вложение группы петель LG в $U_{\mathrm{res}}(H)$ индуцирует изометрическое вложение пространства петель ΩG , наделенного кэлеровой метрикой g^1 (см. п. 2.1), в грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$. Наличие указанного вложения позволяет свести исследование гармонических отображений в пространства петель ΩG к изучению рассмотренных выше гармонических отображений в гильбертов грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H)$.

Заметим, что гармонические отображения в пространства петель ΩG тесно связаны с уравнениями Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$. Как показано в работе Атьи [1], пространство модулей G -инстантонов на $\mathbb{R}^4$ (с фиксированной тривиализацией на бесконечности) можно отождествить с пространством центрированных голоморфных отображений $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \Omega G$ из римановой сферы в ΩG . Указанное отождествление основано на теореме Дональдсона, сводящей описание пространства модулей G -инстантонов на $\mathbb{R}^4$ к описанию голоморфных G -расслоений на $\mathbb{CP}^2$, голоморфно тривиальных на “кресте” $\mathbb{CP}_{\infty}^1 \cup \mathbb{CP}_{\infty}^1$ из “бесконечно удаленных” проективных прямых. Поскольку каждое голоморфное расслоение над $\mathbb{CP}^1$ можно задать “гладкой функцией перехода”, т.е. отображением из $S^1 \subset \mathbb{CP}^1$ в группу G , мы получаем семейство отображений $S^1 \rightarrow G$, параметризуемых точками $\mathbb{CP}_{\infty}^1$, т.е. голоморфное отображение $\mathbb{CP}_{\infty}^1 \rightarrow \Omega G$. С учетом отождествления Атьи решения полных G -уравнений Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ должны отвечать гармоническим отображениям $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \Omega G$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. F. Atiyah. Instantons in two and four dimensions // Comm. Math. Phys. 1984. V. 93. № 4. P. 437–451.
- [2] A. Borel, F. Hirzebruch. Characteristic classes and homogeneous spaces. I // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 458–538.
- [3] F. E. Burstall, J. H. Rawnsley. Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces With Applications to Harmonic Maps of Riemann Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1990. (Lecture Notes in Math. V. 1424.)
- [4] F. E. Burstall, S. M. Salamon. Tournaments, flags and harmonic maps // Math. Ann. 1987. V. 277. № 2. P. 249–265.
- [5] F. E. Burstall, J. C. Wood. The construction of harmonic maps into complex Grassmannians // J. Differential Geom. 1986. V. 23. № 3. P. 255–297.
- [6] Ё. Давидов, А. Г. Сергеев. Твисторные пространства и гармонические отображения // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 3–96.
- [7] J.-L. Koszul, B. Malgrange. Sur certaines structures fibrées complexes // Arch. Math. (Basel). 1958. V. 9. P. 102–109.
- [8] Э. Прессли, Г. Сигал. Группы петель. М.: Мир, 1990.
- [9] А. Г. Сергеев. Кэлерова геометрия пространств петель. М.: МЦНМО, 2001.

- [10] K. Uhlenbeck. Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model // J. Differential Geom. 1989. V. 30. № 1. P. 1–50.
- [11] G. Valli. On the energy spectrum of harmonic 2-spheres in unitary groups // Topology. 1988. V. 27. № 2. P. 129–136.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
03.11.2004