Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Абилов, Г. А. Айгунов, Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a, b)^n; p(x))$, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:07:08

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ
ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2((a, b)^n; p(x))$

М. В. Абилов, Г. А. Айгунов

Пусть $L_2 = L_2((a, b)^n; p(x))$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f: (a, b)^n \rightarrow \mathbb{R}$ с весом $p(x)$ и нормой

$$\|f\| = \left(\int_{(a,b)^n} p(x) f^2(x) dx \right)^{1/2} \quad \left((a, b)^n = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k), \quad p(x) = \prod_{k=1}^n p_k(x_k) \right);$$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k(f) P_k(x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n}(f) P_{k_1}(x_1) \cdots P_{k_n}(x_n)$$

— n -кратный ряд Фурье функции $f \in L_2$ по ортонормальным системам многочленов $P_{k_i}(x_i)$ [1; с. 38] с весом $p_i(x_i)$ на интервалах (a_i, b_i) ($i = 1, \dots, n$; $k_i = 0, 1, 2, \dots$),

$$S_N(f; x) = \sum_{0 \leq |k| < N} c_k(f) P_k(x) \quad (k = (k_1, \dots, k_n), \quad |k| = k_1 + \dots + k_n)$$

— его “треугольные” частичные суммы,

$$E_N(f) = \inf_{Q_N} \|f - Q_N\| = \|f - S_N(f)\|$$

— наилучшее приближение функции $f \in L_2$ алгебраическими многочленами “треугольного” вида.

Пусть, далее,

$$T(x; t; h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} P_k(x) P_k(t) h^{|k|} \quad (0 < h < 1),$$

$$F_h f(x) = \int_{(a,b)^n} p(t) f(t) T(x; t; 1-h) dt$$

и

$$\Omega_m(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} F_h^i f(x) \right\| \quad (m = 1, 2, \dots)$$

— обобщенный модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f \in L_2$ справедливо неравенство

$$E_N(f) \leqslant (N+1)^m \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{-m(N+1)} \left(\int_0^{\frac{1}{N+1}} \Omega_m^{1/m}(f; h) dh\right),$$

причем при каждом фиксированном $N = 1, 2, \dots$ константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_2$. Тогда

$$\Omega_m\left(f; \frac{1}{N}\right) \leqslant \left(\frac{2m}{N^{2m}} \sum_{\ell=1}^N \ell^{2k-1} E_\ell^2(f)\right)^{1/2}.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что

$$E_N(f) = O(N^{-m\alpha}) \iff \Omega_m(f; \delta) = O(\delta^{m\alpha}) \quad (m = 1, 2, \dots; \quad 0 < \alpha < 1).$$

Аналогичное утверждение для функций одной переменной доказано в [2] (см. также [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Сеге. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. [2] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова // Изв. вузов. Матем. 1997. № 3. С. 40–43. [3] С. З. Рафальсон // Вестн. Ленингр. ун-та. Мех., матем. астрон. 1969. № 7. С. 68–79.

Дагестанский государственный технический университет;
Дагестанский государственный университет

Принято редколлегией
27.07.2004