Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Грбич, С. Терио, Гомотопический тип дополнения конфигурации координатных подпространств коразмерности два, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:21:25

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП ДОПОЛНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ КООРДИНАТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

Е. ГРБИЧ, С. ТЕРИО

Координатное подпространство в $\mathbb{C}^n$ есть $L_\sigma = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$, где $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\}$ – подмножество в $[n]$. Каждому симплициальному комплексу K на множестве $[n]$ сопоставим конфигурацию координатных подпространств $\mathcal{CS}(K) = \{L_\sigma \mid \sigma \notin K\}$ и ее дополнение $U(K) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\sigma \notin K} L_\sigma$. С другой стороны, комплексу K сопоставляется пространство Дэвиса–Янушкиевича $DJ(K) = \bigcup_{\sigma \in K} BT_\sigma \subset BT^n$, где BT^n – классифицирующее пространство n -мерного тора, т.е. произведение n экземпляров пространства $\mathbb{C}P^\infty$, и $BT_\sigma := \{(x_1, \dots, x_n) \in BT^n \mid x_i = *, \text{ где } i \notin \sigma\}$. Определим $\mathcal{Z}_K$ как гомотопический слой вложения $DJ(K) \rightarrow BT^n$. Согласно результату [1; 8, 9], имеется эквивариантная деформационная ретракция $U(K) \rightarrow \mathcal{Z}_K$, кроме того, кольцо целочисленных когомологий пространства $\mathcal{Z}_K$ было вычислено в [1; 7.6, 7.7].

ТЕОРЕМА 1. *Дополнение конфигурации координатных подпространств коразмерности два в $\mathbb{C}^n$ гомотопически эквивалентно букету сфер $\bigvee_{k=2}^n (k-1) \binom{n}{k} S^{k+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – несвязное объединение n точек. Тогда $DJ(K)$ является букетом из n копий пространства $\mathbb{C}P^\infty$, а $U(K)$ получается удалением из $\mathbb{C}^n$ всех координатных подпространств коразмерности два, т.е. вида $z_i = z_j = 0$, $1 \leq i < j \leq n$. Таким образом, для доказательства теоремы необходимо описать гомотопический слой вложения $\bigvee_{t=1}^n \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \prod_{t=1}^n \mathbb{C}P^\infty$. Необходимое описание получается применением предложения 1 к случаю $X_1 = \dots = X_n = \mathbb{C}P^\infty$, с учетом того, что $\Omega \mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$.

Необходимо подчеркнуть, что теорема 1 имеет место без применения надстройки. Ранее известные гомотопические разложения имели место лишь после применения некоторого числа надстроек. Наилучшее из таких разложений принадлежит Шаперу [2] и требует одной надстройки. Для завершения доказательства теоремы 1 необходимо доказать предложение 1. Это утверждение было впервые доказано Портером [3] путем исследования подпространств в стягиваемых пространствах. Мы приводим более эффективное доказательство, основанное на лемме о кубе. Мы работаем в категории связных пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений. Пусть $*$ обозначает отмеченную точку. Для пары пространств X, Y положим $X \rtimes Y = (X \times Y)/(* \times Y)$, $X \wedge Y = (X \rtimes Y)/(X \times *)$ и $X * Y = \Sigma X \wedge Y$. Будем обозначать тождественное отображение на X через X и отображение в точку через $*$.

ЛЕММА 2. *Пусть A, B и C – пространства, а Q – гомотопический копредел отображения $A \times B \xrightarrow{* \times B} C \times B$ и проекции $A \times B \xrightarrow{\pi_1} A$. Тогда $Q \simeq (A * B) \vee (C \rtimes B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму итерированных гомотопических копределов

$$\begin{array}{ccccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B & \xrightarrow{i_2} & C \times B \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow * & & \downarrow s \\ A & \xrightarrow{*} & A * B & \xrightarrow{t} & \overline{Q} \end{array},$$

где π_2 – проекция, а i_2 – вложение. Известно, что левый квадрат является гомотопически кодекартовым. Пространство $\overline{Q}$ определяется как гомотопический копредел правого квадрата. Заметим, что $i_2 \circ \pi_2 \simeq * \times B$. Внешний прямоугольник является гомотопически кодекартовым, как композиция двух гомотопически кодекартовых квадратов, поэтому $\overline{Q} \simeq Q$. Из правого квадрата вытекает, что гомотопическим кослоем отображения $C \times B \rightarrow Q$ является $\Sigma B \vee (A * B)$. Следовательно, отображение t имеет левое гомотопическое обратное r . Кроме того, $s \circ i_2 \simeq *$, и поэтому стягивание B в точку в правом квадрате приводит к гомотопическому корасслоению $C \times B \rightarrow Q \xrightarrow{r} A * B$, где $r \circ t$ гомотопно тождественному отображению.

ЛЕММА 3. *Для любых $Y_1, \dots, Y_n$ имеет место гомотопическая эквивалентность*

$$\Sigma(Y_1 \times \dots \times Y_n) \simeq \bigvee_{k=1}^n \left(\bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Sigma Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_k} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индуктивное применение разложения $\Sigma(A \times B) = \Sigma A \vee \Sigma B \vee (\Sigma A \wedge B)$.

Следующее утверждение принадлежит Матеру [4] и известно как лемма о кубе.

ЛЕММА 4. Пусть задана диаграмма пространств и отображений

где нижняя грань является гомотопически кодекартовым квадратом, а боковые стороны являются декартовыми квадратами, индуцированными отображением $H \rightarrow D$. Тогда верхняя грань является гомотопически кодекартовым квадратом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – пространства и F_n – гомотопический слой вложения $X_1 \vee \dots \vee X_n \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$. Тогда имеется гомотопическое разложение

$$F_n \simeq \bigvee_{k=2}^n \left(\bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (k-1)(\Sigma \Omega X_{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega X_{i_k}) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по n . При $n = 2$ хорошо известно, что $F_2 \simeq \Sigma \Omega X_1 \wedge \Omega X_2$. Пусть $n \geq 3$ и предположим, что утверждение имеет место для F_{n-1} . Положим $M_k = X_1 \vee \dots \vee X_k$ и $N_k = X_1 \times \dots \times X_k$. Заметим, что M_n является копроизведением M_{n-1} и X_n . Отображая каждую вершину соответствующего кодекартова квадрата в N_n , мы получаем гомотопические расслоения $\Omega N_n \rightarrow * \rightarrow N_n$, $\Omega N_{n-1} \rightarrow X_n \rightarrow N_n$, $F_{n-1} \times \Omega X_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow N_n$ и $F_n \rightarrow M_n \rightarrow N_n$. Представим N_n как $N_{n-1} \times X_n$. Тогда из леммы 4 вытекает существование гомотопически кодекартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} \Omega N_{n-1} \times \Omega X_n & \xrightarrow{h} & F_{n-1} \times \Omega X_n \\ \downarrow g & & \downarrow \\ \Omega N_{n-1} & \longrightarrow & F_n \end{array},$$

где, как легко видеть, g является проекцией, а h – связывающим отображением для гомотопического расслоения $F_{n-1} \times \Omega X_n \rightarrow M_{n-1} \times * \rightarrow N_{n-1} \times X_n$. Следовательно, $h \simeq \partial_{n-1} \times \Omega X_n$, где ∂_{n-1} – связывающее отображение для расслоения $F_{n-1} \rightarrow M_{n-1} \rightarrow N_{n-1}$. Но $\partial_{n-1} \simeq *$, так как отображение $\Omega M_{n-1} \rightarrow \Omega N_{n-1}$ имеет правое гомотопически обратное. Итак, $h \simeq * \times \Omega X_n$. В силу леммы 2, $F_n \simeq (\Omega N_{n-1} * \Omega X_n) \vee (F_{n-1} \times \Omega X_n)$. Поскольку пространство F_{n-1} является надстройкой, мы имеем $F_{n-1} \times \Omega X_n \simeq F_{n-1} \vee (F_{n-1} \wedge \Omega X_n)$. Теперь, применяя разложение $\Sigma \Omega N_n \simeq \Sigma(\Omega X_1 \times \dots \times \Omega X_n)$ из леммы 3 совместно с разложением для F_{n-1} из предположения индукции и приводя подобные члены, мы получаем необходимое разложение пространства F_n в букет.

Авторы выражают благодарность Т.Е. Панову и Н. Рэю за стимулирующие обсуждения, привлечшие нас к рассмотрению этой проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov // Univ. Lecture Ser. 2002. V. 24. [2] Ch. Schaper // Math. Ann. 1997. V. 309. № 3. P. 463–473. [3] T. Porter // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 655–663. [4] M. Mather // Canad. J. Math. 1976. V. 28. № 2. P. 225–263.

University of Aberdeen, United Kingdom
E-mail: jelena@maths.abdn.ac.uk,
s.theriault@maths.abdn.ac.uk

Принято редколлегией
27.07.2004