Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Миллион-
щиков, А. Фиаловски, Когомологии некоторых $\mathbb{N}$ -градуированных алгебр Ли,
УМН, 2004, том 59, выпуск 6, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 09:50:33

КОГОМОЛОГИИ НЕКОТОРЫХ $\mathbb{N}$ -ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ

Д. В. Миллионщиков, А. Фиаловски

В работе [1] были классифицированы бесконечномерные $\mathbb{N}$ -градуированные алгебры Ли с двумя образующими над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Из этой классификации, в частности, вытекает, что произвольная $\mathbb{N}$ -градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}_i$ с одномерными однородными компонентами $\mathfrak{g}_i$ такая, что $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i \geq 2$, изоморфна одной (и только одной) из следующих трех алгебр: L_1 , $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_2$, заданных при помощи базиса $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$, $\mathfrak{g}_i = \langle e_i \rangle$, и нетривиальных коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} L_1: [e_i, e_j] &= (j-i)e_{i+j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}; \\ \mathfrak{m}_0: [e_1, e_i] &= e_{i+1}, \quad \forall i \geq 2; \\ \mathfrak{m}_2: [e_1, e_i] &= e_{i+1}, \quad \forall i \geq 2, \quad [e_2, e_j] = e_{j+2}, \quad \forall j \geq 3. \end{aligned}$$

Когомологии с тривиальными коэффициентами $H^*(L_1)$ были вычислены Л. В. Гончаровой в [2]. Цель настоящей заметки – вычисление когомологий $H^*(\mathfrak{m}_0)$ и $H^*(\mathfrak{m}_2)$.

Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \langle e_i \rangle$ – произвольная $\mathbb{N}$ -градуированная алгебра Ли с одномерными компонентами. Рассмотрим двойственный базис $\{e^i, e^i(e_j) = \delta_j^i\}$. Пространство $C^q(\mathfrak{g})$ q -мерных коцепей алгебры $\mathfrak{g}$ может быть отождествлено с пространством $\Lambda^q(\mathfrak{g}^*)$ формальных рядов $\sum \alpha_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}$, причем $C^q(\mathfrak{g}) = \widehat{\bigoplus_k C_k^q(\mathfrak{g})}$, где (конечномерное) подпространство $C_k^q(\mathfrak{g})$ порождено мономами $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}$ такими, что $i_1 + \dots + i_q = k$. Последнее разложение определяет вторую градуировку коцепного комплекса $C^*(\mathfrak{g})$ и соответственно когомологий $H^*(\mathfrak{g})$.

Пусть $\mathfrak{b}$ – идеал коразмерности один в некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Выберем $X \in \mathfrak{g}$, $X \notin \mathfrak{b}$. Сопряженный оператор $\text{ad } X^*$ к оператору $\text{ad } X$ продолжается на $\Lambda^q(\mathfrak{g}^*)$:

$$\text{ad } X^*(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_q) = \text{ad } X^* \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_q + \xi_1 \wedge \text{ad } X^* \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_q + \dots + \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \text{ad } X^* \xi_q.$$

Оператор $\text{ad } X^*$ коммутирует с дифференциалом d коцепного комплекса и тем самым определяет отображение в когомологиях $\text{ad } X^*: H^*(\mathfrak{b}) \rightarrow H^*(\mathfrak{b})$.

ТЕОРЕМА 1 (Диксмье, [3]). *Имеется длинная точная последовательность когомологий алгебр Ли: $\dots \rightarrow H^{q-1}(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\text{ad } X^*} H^{q-1}(\mathfrak{b}) \rightarrow H^q(\mathfrak{g}) \rightarrow H^q(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\text{ad } X^*} H^q(\mathfrak{b}) \rightarrow \dots$.*

Применим теорему 1 к $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{b}_1 = \langle e_2, e_3, \dots \rangle$, $X_1 = e_1$. Когомологии абелева идеала $\mathfrak{b}_1$ есть (пополненная) внешняя алгебра $\Lambda^*(\mathfrak{b}_1^*)$. Можно показать, что оператор $\text{ad } X_1^* = \text{ad } e_1^*$ сюръективен на $\Lambda^*(\mathfrak{b}_1^*)$ и задача вычисления когомологий $H^*(\mathfrak{m}_0)$ сводится к нахождению его ядра. Обозначим через $P_q(k)$ число разбиений натурального числа k ровно на q слагаемых: $k = x_1 + \dots + x_q$, $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_q$.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра когомологий $H^*(\mathfrak{m}_0) = \bigoplus_{k,q} H_k^q(\mathfrak{m}_0)$ линейно порождена классами следующих однородных коциклов:*

$$e^1, \quad e^2, \quad \omega(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} \wedge e^{i_q+1}) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l (\text{ad } e_1^*)^l (e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_q}) \wedge e^{i_q+1+l}, \quad (1)$$

где $1 \leq q$, $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q$, в частности,

$$\dim H_{k + \frac{q(q+1)}{2}}^q(\mathfrak{m}_0) = P_q(k) - P_q(k-1).$$

Мультипликативная структура определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} [e^1] \wedge \omega(\xi \wedge e^i \wedge e^{i+1}) &= 0, \quad [e^2] \wedge \omega(\xi \wedge e^i \wedge e^{i+1}) = \omega(e^2 \wedge \xi \wedge e^i \wedge e^{i+1}), \quad (2) \\ \omega(\xi \wedge e^i \wedge e^{i+1}) \wedge \omega(\eta \wedge e^j \wedge e^{j+1}) &= \sum_{l=0}^{j-i+1} (-1)^l \omega((\operatorname{ad} e_1^*)^l (\xi \wedge e^i) \wedge e^{i+1+l} \wedge \eta \wedge e^j \wedge e^{j+1}) \\ &+ (-1)^{j-i+\deg \eta} \sum_{s \geq 1} \omega((\operatorname{ad} e_1^*)^{j-i-1+s} (\xi \wedge e^i) \wedge (\operatorname{ad} e_1^*)^s (\eta \wedge e^j) \wedge e^{j+s} \wedge e^{j+s+1}) \\ &+ (-1)^{j-i+\deg \eta+1} \sum_{s \geq 1} \omega((\operatorname{ad} e_1^*)^{j-i+1+s} (\xi \wedge e^i) \wedge (\operatorname{ad} e_1^*)^s (\eta \wedge e^j) \wedge e^{j+s+1} \wedge e^{j+s+2}), \end{aligned}$$

где $i < j$, ξ и η обозначают произвольные однородные формы в $\Lambda^*(e^2, \dots, e^{i-1})$ и $\Lambda^*(e^2, \dots, e^{j-1})$ соответственно.

ПРИМЕР. Базис $H^2(\mathfrak{m}_0)$ составляют следующие коциклы:

$$e^2 \wedge e^3, e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5, e^4 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^7, \dots, \omega(e^j \wedge e^{j+1}) = \sum_{l=0}^{j-2} (-1)^l e^{j-l} \wedge e^{j+1+l}, \dots$$

Теперь применим теорему 1 к $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{b}_2 = \langle e_1, e_3, e_4, \dots \rangle$, $X_2 = e_2$. Идеал $\mathfrak{b}_2$ очевидным образом изоморфен $\mathfrak{m}_0$ и тем самым его когомологии уже известны. Оператор $\operatorname{ad} e_2^*$ является “почти сюръективным”: $\operatorname{Im}(\operatorname{ad} e_2^*) \oplus \langle e^3 \rangle = H^*(\mathfrak{b}_2^*)$.

ТЕОРЕМА 3. Однородным базисом биградуированной алгебры когомологий $H^*(\mathfrak{m}_2) = \bigoplus_{q,k} H_k^q(\mathfrak{m}_2)$ являются следующие коциклы:

$$\begin{aligned} e^1, \quad e^2, \quad e^2 \wedge e^3, \quad e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5, \\ w_{i_1, \dots, i_q, i_q+1, i_q+2} = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{2^l} \omega((\operatorname{ad} e_2^* + (\operatorname{ad} e_1^*)^2)^l (e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}) \wedge e^{i_q+1+l} \wedge e^{i_q+2+l}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $1 \leq q$, $3 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q$, в частности, для $q \geq 3$

$$\dim H_{k + \frac{q(q+1)}{2}}^q(\mathfrak{m}_2) = P_q(k) - P_q(k-1) - P_q(k-2) + P_q(k-3).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулах (1)–(4) стоят на самом деле конечные суммы, так как операторы $\operatorname{ad} e_1^*$ и $\operatorname{ad} e_2^* + (\operatorname{ad} e_1^*)^2$ понижают вторую градуировку на один и два соответственно. Операторы $\operatorname{ad} e_2^*$ и $(\operatorname{ad} e_1^*)^2$ совпадают только на пространстве 1-форм. Стоит отметить, что теорема 2 справедлива над полем любой характеристики, а теорема 3 – над произвольным полем нечетной характеристики. Это важно, так как все рассмотренные нами алгебры являются алгебрами Ли максимального класса (см. [4]), которые широко применяются в теории p -групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Фиаловски // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 2. С. 62–64. [2] Л. В. Гончарова // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7. № 2. С. 6–14. [3] J. Dixmier // Acta Sci. Math. Szeged. 1955. V. 16. P. 246–250. [4] A. Shalev, E. I. Zelmanov // J. Algebra. 1997. V. 189. № 2. P. 294–331.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Этвеш Лоранд Университет, Будапешт
E-mail: million@mech.math.msu.su, fialowsk@cs.elte.hu

Принято редколлегией
24.11.2004