Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадильшин, Существование и асимптотики полюсов с малой мнимой частью для резонатора Гельмгольца, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 1, 3–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:11:20

УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИКИ ПОЛЮСОВ С МАЛОЙ
МНИМОЙ ЧАСТЬЮ ДЛЯ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Р. Р. Гадильшин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава I . Поверхностные потенциалы в задаче о резонаторе Гельмгольца	9
§ 1.1. Предварительные сведения для предельных задач	10
§ 1.2. Существование полюсов с малой мнимой частью	16
§ 1.3. Представление и равномерные оценки аналитического продолжения в окрестности полюсов	24
§ 1.4. Резонатор с граничными условиями Дирихле	33
§ 1.5. Обобщения для резонаторов в $\mathbb{R}^n$	38
Глава II . Асимптотики полюсов резонатора Гельмгольца	39
§ 2.1. Асимптотика полюса в невырожденном случае	40
§ 2.2. Квазистационарный случай	50
§ 2.3. Расщепление кратного собственного значения	54
§ 2.4. Вырожденный случай	65
§ 2.5. Асимптотики полюсов для задачи Дирихле и для краевых задач на плоскости	69
Список литературы	73

Введение

Сингулярно возмущенные уравнения и краевые задачи издавна привлекают внимание широкого круга специалистов в области дифференциальных уравнений и математической физики. Одними из наиболее обсуждаемых в последнее время задач являются краевые задачи для эллиптических уравнений в сингулярно возмущенных областях. Типичными задачами, относящимися к этому классу, являются краевые задачи в областях с малыми отверстиями [37], [39], [48], [58], [77] или со сменой типа

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00501) и Международного научного фонда (грант № NMB000).

граничного условия на малой части границы [10]–[12], [53], [64], задачи во внешности тонкого тела [36], [49], [61]–[63] или, наоборот, в областях с узкими отростками и каналами связи [4], [13], [14], [68], [69], [71], [73], [74], краевые задачи в перфорированных областях [7], [34], [50] и т.п. Такого рода задачи возникают в теории дифракции волн и теории упругости. Однако, для старейшей из подобного типа задач – задачи рассеяния на резонаторе Гельмгольца, являющейся объектом обсуждения настоящей работы, – удовлетворительные асимптотики решений и их строгие обоснования до недавнего времени отсутствовали. Более того, в связи с физическим характером этой задачи (см., например, [9], [57], [66]), случаи наиболее общих положений рассматривались с упором на вывод формул для основных характеристик резонатора без акцента на их строгое математическое обоснование [15]–[17]. С другой стороны, строгое изложение приведено в [18] в технически громоздком случае расщепления полюсов резонатора, в результате чего основные (и достаточно простые) идеи построения асимптотик и их обоснования приобретают излишне усложненную форму. Настоящий обзор служит для устранения этого разнобоя. Доказательство существования полюсов с малой мнимой частью и построение их полных асимптотик для разнообразных случаев мы приводим в единой и последовательной форме изложения на основе подходов, использованных в [15]–[32], [72].

Классический акустический резонатор Гельмгольца представляет собой поверхность $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_0 \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$, получающуюся из границы $\Gamma_0 \in C^\infty$ ограниченной односвязной области Ω в $\mathbb{R}^3$ вырезанием малого отверстия ω_ε , имеющего диаметр $O(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, соединяющего внешность и внутренность резонатора. Соответствующая математическая модель имеет вид

$$(0.1) \quad (\Delta + k^2)u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = p_\varepsilon f, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

$$(0.2) \quad u_\varepsilon = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - ik u_\varepsilon = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty,$$

где $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma_\varepsilon}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = |x|$, ν – внешняя нормаль к Ω , $k \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\Gamma_0)$, p_ε – сужение на Γ_ε . Решения задачи (0.1), (0.2) рассматриваются в классе функций из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Поверхность $\overline{\Gamma_\varepsilon}$ понимается как двусторонняя.

Здесь и всюду далее $C^\infty(Q)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций, $L_2(Q)$ и $W_2^m(Q)$ – пространства Соболева с нормами $\|\cdot\|_{L_2(Q)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^m(Q)}$, соответственно. Если X – символ какого-либо банахова пространства, то

$$X_{\text{loc}}(D) = \{u : u \in X(D \cap S(R)) \forall R\},$$

где $S(R)$ – открытый шар радиуса R с центром в начале координат. Под сходимостью в $X_{\text{loc}}(D)$ понимается сходимость в $X(D \cap S(R))$ для любого (всех) R .

В акустике к решению задачи (0.1), (0.2) сводится задача отыскания поля с потенциальной скоростью $\mathbf{v}_\varepsilon = \nabla u_\varepsilon$, возникающего в однородной и изотропной жидкой или газообразной среде при дифракции внешнего поля $\mathbf{v}^{\text{out}} = \nabla u^{\text{out}}$ на идеально жесткой поверхности Γ_ε . В этом случае $f = -\partial u^{\text{out}}/\partial \nu$. Если f – произвольно, то (0.1), (0.2) естественно рассматривать как задачу излучения.

Еще в 1916 году для случая, когда Γ_0 является сферой, Рэлей нестрогими методами показал [78], что при некоторых частотах $k = k(\varepsilon)$, близких к нулю, поле, рассеянное

на резонаторе, существенно отличается от поля, рассеянного на Ω (на “закрытом” резонаторе). В 1971 году Майлс вычислительными методами установил [76], что похожая картина имеет место и в окрестности любой собственной частоты (корня из собственного значения) задачи Неймана для $-\Delta$ в шаре. Результаты Майлса наводили на мысль, что резонансные явления каким-то образом связаны с дискретным спектром задачи Неймана для $-\Delta$ в Ω и, вообще говоря, не должны зависеть от какой-либо симметрии резонатора.

Следующим звеном в понимании природы резонансов, по-видимому, явились работы, связанные с возможностью аналитического продолжения в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ функций Грина внешних задач для уравнения Гельмгольца и наличием у этих продолжений полюсов в нижней комплексной полуплоскости (см. [6], [47], [75]).

В 1971 году А. А. Арсеньев [4] рассмотрел задачу Дирихле для ловушечной области, представляющей собой внутренность и внешность шарового слоя, соединенные узким каналом связи, и имеющей гладкую границу. Им было доказано существование у решений этой задачи полюсов с малой мнимой частью, сходящихся к простым собственным значениям предельной внутренней задачи в $\Omega^{\text{in}} = \Omega$, и даны оценки скорости сходимости таких полюсов. В 1973 году Дж. Т. Бил [68] для подобного типа резонаторов (со стенками конечной толщины) доказал сходимость полюсов аналитического продолжения решений возмущенной задачи к собственным частотам предельной внутренней задачи (являющимся полюсами ее функции Грина) и полюсам аналитического продолжения решений предельной внешней задачи в $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ в случае граничных условий Дирихле и Робена. Для краевой задачи Неймана им было показано существование дополнительного вещественного множества предельных значений полюсов возмущенной задачи, порождаемого каналом связи. В дальнейшем [5], [54], [55], [69], [70], [73] было установлено соответствие между порядками полюсов возмущенной задачи, порядками полюсов предельных задач, а также уточнены оценки скорости сходимости.

Настоящая работа посвящена классическому резонатору Гельмгольца с идеально тонкими стенками. В первой главе доказываются существование полюсов у аналитического продолжения функции Грина задачи (0.1), (0.2) и сходимость их к полюсам функций Грина предельных задач. Техника доказательств этих утверждений заметно отличается как от подходов, предложенных ранее для резонаторов со стенками конечной толщины, так и от подхода для двумерных задач, анонсированного в [33]. Основная идея заключается в следующем. Пусть $E(k; r) = (4\pi r)^{-1} \exp\{ikr\}$, $k \in \mathbb{C}$, $\varphi \in C^\infty(\Gamma_0)$. Известно, что в этом случае нормальная производная потенциала двойного слоя

$$u(x, k) = [\mathcal{L}(k)\varphi](x) \equiv - \int_{\Gamma_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(k; |x - y|) ds_y$$

непрерывна на Γ_0 , а сам потенциал удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в Ω^{in} и Ω^{ex} и граничному условию $\partial u / \partial \nu = f \in C^\infty(\Gamma_0)$, где для f справедливо равенство

$$[A_0(k)\varphi](x) \equiv - \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(k; |x - y|) ds_y = f(x).$$

При $k \in \mathbb{R}$ функция u удовлетворяет условию излучения (0.2), а для k из верхней полуплоскости u экспоненциально убывает на бесконечности. Если к тому же

$\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ (где $C_0^\infty(Q)$ – множество финитных бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых содержится в Q), то, очевидно, u является решением (0.1), аналитически зависящим от $k \in \mathbb{C}$. Таким образом, разрешимость краевой задачи (0.1), (0.2) и существование аналитического продолжения ее решения

$$u_\varepsilon(x, k) = [\mathcal{L}(k)\varphi_\varepsilon](x)$$

свелись к вопросу существования “достаточно гладкого” решения уравнения

$$(0.3) \quad A_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon = f_\varepsilon$$

на Γ_ε , где $f_\varepsilon = p_\varepsilon f$, $A_\varepsilon(k) = p_\varepsilon A_0(k)$, и оценке обратного оператора в подходящей норме.

Пусть $-\infty < s < \infty$, $H_s(\Gamma_0)$ – пространства Соболева–Слободецкого. Обозначим через $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ подпространство функций из $H_s(\Gamma_0)$ с носителями из $\overline{\Gamma_\varepsilon}$, а через $H_s(\Gamma_\varepsilon)$ обозначим пространство обобщенных функций в Γ_ε , допускающих продолжение на Γ_0 , принадлежащее $H_s(\Gamma_0)$. Норма в $H_s(\Gamma_\varepsilon)$ определяется равенством

$$\|u\|_{s, \Gamma_\varepsilon} = \inf \|l_\varepsilon u\|_{s, \Gamma_0},$$

где $\|\cdot\|_{s, \Gamma_0}$ – норма в $H_s(\Gamma_0)$, а нижняя грань берется по всем продолжениям $l_\varepsilon u \in H_s(\Gamma_0)$.

Рассматривая $A_0^{-1}(k)$ и $\mathcal{L}(k)$ как псевдодифференциальные операторы (ПДО), удастся показать, что $A_\varepsilon^{-1}(k)$ и $\mathcal{L}(k)$ являются мероморфными ограниченными оператор-функциями из $H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ в $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и из $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ в $W_{2, \text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, соответственно. Следовательно, функция

$$(0.4) \quad u_\varepsilon(x, k) = [\mathcal{L}(k)A_\varepsilon^{-1}(k)p_\varepsilon f](x)$$

является мероморфной функцией из $W_{2, \text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, а из единственности решения задачи (0.1), (0.2) при $\text{Im } k \leq 0$ вытекает, что полюсы аналитического продолжения функции Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$ возмущенной задачи лежат в нижней комплексной полуплоскости.

С другой стороны, анализ $A_\varepsilon^{-1}(k)$ по малому параметру ε показывает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ эти полюсы сходятся либо к полюсам аналитического продолжения функции Грина предельной внешней задачи, либо к собственным частотам предельной внутренней задачи. Последний результат и доказывает существование у резонатора Гельмгольца полюсов с малой мнимой частью. Аналогичный подход распространяется на пространство любой размерности и на граничные условия Дирихле.

В случае, когда $k_0^2 \neq 0$ является простым собственным значением предельной внутренней задачи, для k , близких к k_0 , из (0.4) и свойств оператора $A_\varepsilon^{-1}(k)$ вытекает следующее представление для аналитического продолжения решения задачи (0.1), (0.2):

$$(0.5) \quad u_\varepsilon(x, k) = \frac{\Psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon^2 - k^2} \int_{\Gamma_0} \{\Psi_\varepsilon\} f \, ds + U_\varepsilon(x, k),$$

где τ_ε – полюс, сходящийся к k_0 , $\Psi_\varepsilon = [\mathcal{L}(k)\Phi_\varepsilon]$, Φ_ε – нетривиальное решение уравнения $A_\varepsilon(\tau_\varepsilon)\Phi_\varepsilon = 0$, функция U_ε аналитична по k , сходится к аналитическому продолжению решения предельной внешней задачи и ограничена в $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$, а $\{ \cdot \}$ означает скачок функции на Γ_0 . Обобщенная собственная функция Ψ_ε является решением уравнения $(\Delta + \tau_\varepsilon^2)\Psi_\varepsilon = 0$ в Ω_ε , удовлетворяет граничному условию $\partial\Psi_\varepsilon/\partial\nu = 0$ на Γ_ε и сходится (в $L_{2,\text{loc}}(\Omega_\varepsilon)$) к собственной функции предельной внутренней задачи, продолженной нулем в Ω^{ex} . Ясно, что при фиксированном ε функция Ψ_ε экспоненциально растет на бесконечности.

Однако в квазистационарном случае ($k_0 = 0$) ситуация несколько иная. Дело в том, что функция Грина предельной внутренней задачи в окрестности простого собственного значения имеет вид

$$(0.6) \quad G^{\text{in}}(x, y, k) = (k_0^2 - k^2)^{-1}\psi(x)\psi(y) + \tilde{G}^{\text{in}}(x, y, k^2),$$

где ψ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, а функция $\tilde{G}^{\text{in}}(x, y, \lambda)$ аналитична по λ . Так как $k_0 = 0$ является полюсом второго порядка, то, вообще говоря, у возмущенной задачи может существовать либо один полюс второго порядка, сходящийся к нулю, либо два полюса первого порядка с неограниченно растущими вычетами в них. Методы функционального анализа не дают ответа на вопрос, какая именно ситуация реализуется. Аналогичная картина имеет место и в окрестности кратного собственного значения предельной задачи.

Кроме того, даже для случая простого $k_0 \neq 0$ формула (0.5) не очень конструктивна для приложений, так как она не позволяет, например, оценить вклад резонансного члена (первого слагаемого в правой части (0.5)) в Ω^{ex} в силу того, что $\Psi_\varepsilon \rightarrow 0$ в этой области.

Для выяснения указанных выше вопросов во второй главе строятся асимптотики по малому параметру ε полюса τ_ε и соответствующей ему обобщенной собственной функции Ψ_ε . Построение этих величин проводится методом согласования асимптотических разложений [8], [38], [51].

Основные идеи метода согласования, применительно к рассматриваемой выше задаче для случая простого собственного значения $k_0^2 \neq 0$, выглядят следующим образом. Пусть в окрестности начала координат область Ω совпадает с полупространством $x_3 > 0$, а отверстие имеет форму $\omega_\varepsilon = \{x : x\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, где ω – односвязная область на плоскости $x_3 = 0$ с бесконечно дифференцируемой границей. Обозначим через $R_j^{\text{in(ex)}}(D_y)$ дифференциальные многочлены j -го порядка по переменным y_1, y_2 с постоянными коэффициентами и положим

$$\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (k_0^2 - k^2) R_j^{\text{in(ex)}}(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, 0, k),$$

где G^{in} и G^{ex} – функции Грина (и их аналитические продолжения) предельных внутренней и внешней задач, соответственно. По определению каждый член ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в $\Omega^{\text{in(ex)}}$ и однородному граничному условию Неймана на $\Gamma_0 \setminus \{0\}$. К тому же, на формальном уровне $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, k) \rightarrow R_0^{\text{in}}\psi(0)\psi(x)$, $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow k_0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому, если $\psi(0) \neq 0$,

то вне окрестности отверстия асимптотику функции $\Psi_\varepsilon(x)$ (с точностью до умножения на скалярный множитель) естественно искать в виде $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$, где коэффициенты многочленов $R_j^{\text{in(ex)}}(D_y)$, как и коэффициенты асимптотического разложения полюса, которое также естественно искать в виде

$$(0.7) \quad \tau_\varepsilon = k_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \tau_j,$$

вообще говоря, произвольны.

Однако, так как в начале координат коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$ имеют особенности, то в окрестности отверстия функция $\Psi_\varepsilon(x)$ не может иметь такие асимптотики. Поэтому в окрестности отверстия для Ψ_ε строится другое разложение по степеням ε с коэффициентами, зависящими от переменной $\xi = x\varepsilon^{-1}$, соответствующей размеру отверстия. Оно ищется в виде

$$(0.8) \quad V_\varepsilon(x/\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(x/\varepsilon).$$

Краевые задачи для коэффициентов (0.8) получаются стандартным для метода согласования способом. В (0.1) вместо k и u_ε подставляем, соответственно, ряды (0.7) и (0.8) и переходим в (0.1) к переменной ξ . Затем выписываем отдельно равенства при одинаковых степенях ε и переходим к формальному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге получаем следующую рекуррентную систему краевых задач для $v_j(\xi)$:

$$(0.9) \quad \Delta_\xi v_j = -k_0^2 v_{j-2} - \sum_{i=1}^{j-2} \lambda_i v_{j-i-2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Gamma}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma,$$

где λ_i – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2 - k_0^2$, а Γ – внешность $\bar{\omega}$ на плоскости $\xi_3 = 0$. С другой стороны, если в $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$ коэффициенты заменить на их асимптотики в нуле, а затем перейти к переменной ξ , то получим формальные ряды

$$V_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j V_j^{\text{in(ex)}}(\xi), \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0),$$

коэффициенты которых также являются асимптотическими рядами степенного роста $O(|\xi|^j)$ на бесконечности, удовлетворяют граничному условию $\partial V_j^{\text{in(ex)}}/\partial \xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$, $\xi \neq 0$ и являются при $\rho = |\xi| \rightarrow \infty$ асимптотическими решениями уравнений из (0.9), где v_q заменены на $V_q^{\text{in(ex)}}$.

Задача согласования рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$ и $v_\varepsilon(\xi)$ сводится к доказательству существования решений $v_j(\xi)$ краевых задач (0.9), имеющих при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики, совпадающие при $\xi_3 \geq 0$ ($\xi_3 \leq 0$) с рядами $V_j^{\text{in(ex)}}(\xi)$. В этом случае данные ряды в пограничной области (где x – мало, а ξ – велико), грубо говоря, будут переходить в друг друга. Достигается же указанное совпадение выбором коэффициентов $R_j^{\text{in(ex)}}$ и τ_j .

Для обсуждаемого случая в результате получаются следующие значения:

$$(0.10) \quad \tau_1 = \frac{1}{2k_0} \pi \psi^2(0) c_\omega, \quad \operatorname{Im} \tau_2 = -\frac{1}{2} (\pi \psi(0) c_\omega)^2 \sigma_\Omega,$$

$$(0.11) \quad \Psi_\varepsilon(x) = \varepsilon \pi \psi(0) c_\omega G^{\text{ex}}(x, 0, k_0) (1 + o(1)), \quad x \in \Omega^{\text{ex}},$$

где $c_\omega > 0$ – емкость ”диска” ω [46], [56], а σ_Ω – положительное число, называемое в теории дифракции поперечником рассеяния (см., например, [41]) и определяемое как

$$\sigma_\Omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r=R} |G^{\text{ex}}(x, 0, k_0)|^2 ds > 0.$$

С учетом формул (0.10), (0.11) представление (0.5) становится конструктивным. Однако, очевидно, что в вырожденном случае (когда $\psi(0) = 0$) формулы (0.10), (0.11) теряют свою эффективность. Тем не менее, и в этом случае удастся построить полные асимптотические разложения по степеням ε и дать явные выражения в терминах предельных задач для главных членов асимптотик основных величин, к которым относятся $\tau_\varepsilon - k_0$, $\operatorname{Im} \tau_\varepsilon$ и Ψ_ε . Как будет показано ниже, вырожденность существенно влияет на порядки сингулярности решения.

В главе II построены также асимптотики полюсов, сходящихся к нулю и к корню двукратного собственного значения предельной внутренней задачи. Эти построения, в частности, показывают, что в обоих случаях у возмущенной задачи существуют по два несовпадающих полюса первого порядка. Таким образом, асимптотический анализ позволяет получить результат, который оставался открытым после функционального анализа, проводимого в первой главе.

В последнем разделе главы приведены асимптотики аналогичных полюсов для задачи Дирихле и краевых задач на плоскости.

Ссылка при доказательствах идет на формулы той же главы, которую мы опускаем в нумерации формул. Для ссылок на формулы из введения нумерация сохранена. При использовании во второй главе формул из первой главы указывается нумерация из трех чисел, первое из которых означает номер главы (первой).

ГЛАВА I ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ЗАДАЧЕ О РЕЗОНАТОРЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Всюду в этой главе ω_ε – открытое подмножество на Γ_0 , имеющее границу класса C^∞ , диффеоморфное кругу при любом фиксированном ε и лежащее в шаре радиуса ε с центром в некоторой фиксированной точке $\tilde{x} \in \Gamma_0$. Далее, под $C^m(Q)$ понимается следующее: $C^m(Q)$ – класс функций, непрерывных в Q вместе со своими производными до порядка m включительно, если Q – открытое множество, и – банахово пространство указанных функций с обычной нормой, если Q – замкнутое множество (в последнем случае предполагается $m < \infty$).

§ 1.1. Предварительные сведения для предельных задач

Обозначим

$$[L(k)\varphi](x) = - \int_{\Gamma_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu} E(k; |x-y|) ds_y, \quad x, y \in \Gamma_0.$$

ЛЕММА 1.1. Пусть $k \in \mathbb{C}$. Тогда

(а) если $\varphi \in L_2(\Gamma_0)$, то потенциал двойного слоя $u = \mathcal{L}(k)\varphi$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в $\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}$, бесконечно дифференцируем вне Γ_0 , является ограниченным оператором из $L_2(\Gamma_0)$ в $C^m(Q)$ для любого m и любого компакта Q , отделенного от Γ_0 , и при $\text{Im } k \geq 0$ удовлетворяет условию излучения (0.2);

(б) если функция φ принадлежит $L_2(\Gamma_0)$ и бесконечно дифференцируема в окрестности x_0 , то

$$\begin{aligned} \varphi &= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} (u(x - h\nu) - u(x + h\nu)), \\ \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\partial u(x - h\nu)}{\partial \nu} &= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\partial u(x + h\nu)}{\partial \nu} \end{aligned}$$

для $x \in \Gamma_0$ из некоторой окрестности этой точки; более того, нормальная производная потенциала двойного слоя и пределы $u(x \pm h\nu)$ — непрерывны;

(в) если $\varphi \in C^\infty(\Gamma_0)$, то потенциал двойного слоя непрерывно продолжается из Ω^{ex} в $\overline{\Omega^{\text{ex}}}$ и из Ω^{in} в $\overline{\Omega^{\text{in}}}$, является решением предельных внутренней и внешней задач в классе функций $C^1(\overline{\Omega^{\text{in}}}) \cap C^\infty(\Omega^{\text{in}})$ и $C^1_{\text{loc}}(\Omega^{\text{ex}}) \cap C^\infty(\Omega^{\text{ex}})$ при $f = A_0(k)\varphi$ и

$$\mp u(x \mp \nu h) = \varphi \pm 2L(k)\varphi;$$

(г) если $f \in C^\infty(\Gamma_0)$ и $\text{Im } k > 0$, то предельные внутренняя и внешняя задачи однозначно разрешимы в классе функций $C^1(\overline{\Omega^{\text{in}}}) \cap C^\infty(\Omega^{\text{in}})$ и $C^1(\overline{\Omega^{\text{ex}}}) \cap C^\infty(\Omega^{\text{ex}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения пункта (а) очевидна. Доказательство п.п. (б)–(г) в случае, когда $\text{Im } k \geq 0$, хорошо известно (см., например, [41]) и переносится на случай любого $k \in \mathbb{C}$.

Заметим, что представление решений предельных задач с достаточно гладкими граничными условиями (из класса функций, непрерывных по Гёльдеру) в виде потенциала двойного слоя с плотностью, определяемой из уравнения Фредгольма первого рода на Γ_0 , детально исследовано в [41]. Однако, перенос этого подхода к решению (0.1), (0.2) в упомянутом классе функций наталкивается на трудности, связанные с наличием у возмущенной краевой задачи ребер. Известно (см., например, [35], [44], [52]), что при наличии ребер решение краевых задач имеет особенности в их окрестности даже в случае бесконечно дифференцируемых граничных условий. Поэтому представляется удобным распространить указанный выше подход в классе обобщенных функций, в том числе, и для рассмотренных в настоящем параграфе предельных задач. Сформулированная же выше лемма 1.1 играет роль мостика между классическим подходом и его естественным обобщением, приведенным ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [59]. Функция $u(z)$, определенная в области $K \subset \mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве X называется *голоморфной* в K , если она дифференцируема (в смысле нормы) в каждой точке K .

Обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y ; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [59]. Операторнозначная функция $\mathcal{P}(z) \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется *голоморфной* в области $K \subset \mathbb{C}$, если она дифференцируема по норме в каждой точке K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [59]. Операторнозначная функция $\mathcal{P}(z) \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется *мероморфной* в области $K \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна в K за исключением некоторых изолированных точек, которые являются полюсами для $\mathcal{P}(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Функцию $u(z) \in X_{\text{loc}}(D)$ будем называть *голоморфной* (*мероморфной*), если она голоморфна (мероморфна) как элемент $X(D \cap S(R))$ для любого R .

Пусть $\mathcal{B}(Y(Q), X_{\text{loc}}(D))$ – множество отображений $\mathcal{P}: Y(Q) \rightarrow X_{\text{loc}}(D)$ таких, что $\mathcal{P} \in \mathcal{B}(Y(Q), X(D \cap S(R)))$ для любого R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Отображение $\mathcal{P}(z) \in \mathcal{B}(Y(Q), X_{\text{loc}}(D))$ будем называть *голоморфным* (*мероморфным*), если оно голоморфно (мероморфно) как элемент $\mathcal{B}(Y(Q), X(D \cap S(R)))$ для любого R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [59]. Функция $u(z)$ со значениями в X голоморфна, если для каждого $f \in X^*$ (X^* – сопряженное к X) комплекснозначная функция $(u(z), f)$ (круглые скобки означают соотношение двойственности) дифференцируема (т.е. голоморфна).

Функция $u(z)$ голоморфна в K тогда и только тогда, когда для каждого $z \in K$ найдется окрестность, в которой $u(z)$ ограничена по норме и $(u(z), f)$ голоморфна для каждого f , принадлежащего плотному множеству в X^* .

Функция $\mathcal{P}(z)$ со значениями в $\mathcal{B}(X, Y)$ голоморфна, если $(\mathcal{P}(z)u, f)$ – комплекснозначная голоморфная функция для любых $u \in X$ и $f \in Y^*$.

Функция $\mathcal{P}(z)$ голоморфна, если для каждого $z \in K$ найдется окрестность, в которой $\mathcal{P}(z)$ ограничена по норме и комплекснозначная функция $(\mathcal{P}(z)u, f)$ голоморфна для каждого u из плотного в X множества и каждого f из плотного в Y^* множества.

Если $\mathcal{P}(z) \in \mathcal{B}(X, Y)$, голоморфна в K и $\mathcal{P}^{-1}(z_0)$ существует и принадлежит $\mathcal{B}(Y, X)$ для $z_0 \in K$, то для достаточно малых $|z - z_0|$ существует голоморфная функция $\mathcal{P}^{-1}(z) \in \mathcal{B}(Y, X)$.

Если $T(z)$ ($z \in K$) есть голоморфное семейство компактных операторов из $\mathcal{B}(X)$ и существует точка $z_0 \in K$ такая, что $(I - T(z_0))^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, то $(I - T(z))^{-1}$ – мероморфная в K функция из $\mathcal{B}(X)$.

Заметим, что в силу предложения 1.1 понятия голоморфности функций и операторов в сильном и слабом смыслах эквивалентны.

ЛЕММА 1.2. Потенциал двойного слоя допускает замыкание до голоморфной в $\mathbb{C}$ функции из $\mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_0), W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2, \text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in C^\infty(\Gamma_0)$, тогда в силу пункта (в) леммы 1.1 $u = \mathcal{L}(i)\varphi \in (C^1(\overline{\Omega^{\text{in}}}) \cap C^\infty(\Omega^{\text{in}})) \oplus (C_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega^{\text{ex}}}) \cap C^\infty(\Omega^{\text{ex}}))$ является решением задач

$$(\Delta - 1)u = 0, \quad x \in \Omega^{\text{in(ex)}}, \quad u = -\left(L(i) + (-)\frac{1}{2}I\right)\varphi, \quad x \in \Gamma_0,$$

и удовлетворяет (0.2).

Так как $L(k) \in \mathcal{B}(H_s(\Gamma_0))$ при любом s (см., например, [1]), то для единственного в $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$ решения этой задачи имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})} \leq C\|\varphi\|_{1/2, \Gamma_0},$$

и, следовательно, оператор $\mathcal{L}(i)$ замыкаем до элемента из пространства

$$\mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_0), W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_2^1(\Omega^{\text{ex}})).$$

С другой стороны, непосредственно проверяется, что оператор $(\mathcal{L}(k) - \mathcal{L}(i))$ является ограниченной голоморфной функцией из $\mathcal{B}(L_2(\Gamma_0), W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}}))$. Отсюда и из представления $\mathcal{L}(k) = \mathcal{L}(i) + (\mathcal{L}(k) - \mathcal{L}(i))$ вытекает справедливость утверждения леммы.

Всюду ниже под $\mathcal{L}(k)$ понимается полученное замыкание потенциала двойного слоя.

Для ПДО справедливы следующие утверждения (см., например, [1]–[3], [67]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если A есть ПДО порядка s на компактном многообразии без края (примером которого является Γ_0) и существует обратный оператор A^{-1} , то A^{-1} есть ПДО порядка $-s$.*

Если A и B суть ПДО порядков a и b на компактном многообразии без края, то AB есть ПДО не выше $(a + b)$ -го порядка.

Если A и B – эллиптические ПДО порядков a и b на компактном многообразии без края, то AB – эллиптический ПДО порядка $a + b$.

Если A – эллиптический ПДО первого порядка на компактном многообразии без края Γ , совпадающий с формально сопряженным оператором A^ , то A как оператор в $H_s(\Gamma)$ с областью определения $H_{s+1}(\Gamma)$ имеет дискретный спектр, не зависящий от s , и является самосопряженным оператором в $H_0(\Gamma)$ с областью определения $H_1(\Gamma)$.*

Если A – эллиптический ПДО на компактном многообразии без края Γ , $\varphi \in H_s(\Gamma)$ и $A\varphi \in C^\infty$ в окрестности некоторой точки, то $\varphi \in C^\infty$ в окрестности этой точки.

$L(k)$ есть ПДО не выше (-1) -го порядка.

$$[\tilde{A}_0(k)\varphi](x) = \int_{\Gamma_0} \varphi(y)E(k; |x - y|) ds_y, \quad x, y \in \Gamma_0,$$

– эллиптический ПДО порядка -1 .

Формальная сопряженность понимается в следующем смысле:

$$\int_{\Gamma} Au \bar{v} ds = \int_{\Gamma} u \overline{A^*v} ds$$

при $u, v \in C^\infty(\Gamma)$.

ЛЕММА 1.3. $(A_0(k) - A_0(i))$ – голоморфная функция в $\mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_0), H_0(\Gamma_0))$.
 $A_0(k)$ – эллиптический ПДО первого порядка, являющийся голоморфной функцией из $\mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_0), H_{-1/2}(\Gamma_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $(A_0(k) - A_0(i))$ – голоморфная функция из $\mathcal{B}(L_2(\Gamma_0))$, и, следовательно, справедливо первое утверждение леммы.

При $\text{Im } k > 0$ справедливо равенство (см. [41]):

$$(1.1) \quad A_0(k) = \frac{1}{4} \tilde{A}_0^{-1}(k) (I - 2L(k)) (I + 2L(k)).$$

Из предложения 1.2 и равенства (1.1) следует, что $A_0(i)$ – эллиптический ПДО первого порядка. Из представления

$$A_0(k) = A_0(i) + (A_0(k) - A_0(i))$$

и первого утверждения леммы вытекает справедливость и второго утверждения.

Пусть v^{in} и v^{ex} – решения предельных внутренней и внешней задач при $k = i$ и $f \in C^\infty(\Gamma_0)$, $v = v^{\text{in(ex)}}$ в $\Omega^{\text{in(ex)}}$. Так как в силу леммы 1.1 $v^{\text{in(ex)}} \in C^1(\overline{\Omega^{\text{in(ex)}}}) \cap C^\infty(\Omega^{\text{in(ex)}})$, то, интегрируя по частям равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} v(\Delta - 1) \bar{v} dx = 0$$

и учитывая предложение 1.2, последовательно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. $A_0(i)$ – самосопряженный, положительно определенный оператор в $H_0(\Gamma_0)$ с областью определения $H_1(\Gamma_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При любом s существует $A_0^{-1}(i) \in \mathcal{B}(H_{s-1}(\Gamma_0), H_s(\Gamma_0))$.

Обозначим

$$T_0(k) = A_0^{-1}(i) (A_0(k) - A_0(i)).$$

Из леммы 1.3 и ее следствия 2 вытекает

ЛЕММА 1.4. Для голоморфной функции

$$B_0(k) = A_0^{-1}(i) A_0(k)$$

из $\mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_0))$ справедливо представление

$$B_0(k) = I + T_0(k),$$

где I – единичный оператор, а $T_0(k) \in \mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_0), H_1(\Gamma_0))$.

СЛЕДСТВИЕ. Уравнение

$$(1.2) \quad (I + T_0(k))\varphi = F$$

является уравнением Фредгольма второго рода в $H_{1/2}(\Gamma_0)$.

Обозначим через Σ_0 множество нулей собственных значений оператора $B_0(k)$. Из утверждений лемм 1.1–1.4, их следствий и предложения 1.2 вытекает

ТЕОРЕМА 1.1. (а) Σ_0 – дискретное множество, не имеющее конечных точек сгущения;

(б) $\mathcal{L}(k)A_0^{-1}(k)$ является мероморфной функцией из

$$\mathcal{B}(H_{-1/2}(\Gamma_0), W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})),$$

множество полюсов которой совпадает с Σ_0 ;

(в) $u = \mathcal{L}(k)A_0^{-1}(k)f \in C^\infty(\Omega^{\text{in}}) \oplus C^\infty(\Omega^{\text{ex}})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + k^2)u = 0$ в $\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}$;

(г) если $\text{Im } k \geq 0$, то u удовлетворяет условию излучения (0.2);

(д) если функция $f = A_0(k)\varphi$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in \Gamma_0$, то справедливы утверждения пункта (г) леммы 1.1, причем нормальная производная потенциала двойного слоя совпадает с f .

Из теоремы 1.1, в частности, следует, что при $f \in C^\infty(\Gamma_0)$ функция

$$(1.3) \quad u = \mathcal{L}(k)A^{-1}(k)f$$

является классическим решением предельной внутренней задачи, а при $\text{Im } k \geq 0$ – и предельной внешней задачи. Таким образом, для предельной внутренней задачи определено обобщенное решение, а для предельной внешней задачи – как обобщенное решение, так и его аналитическое продолжение.

Из пункта (д) и единственности классических решений предельных задач при $\text{Im } k > 0$ также вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Множество Σ_0 лежит в полуплоскости $\text{Im } k \leq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Сведение уравнения $A_0(k) = f$, которое само допускает непосредственный анализ, к уравнению (1.2), где фактически $F = A_0^{-1}(i)f$, вызвано только методическими соображениями, которые будут ясны из содержания следующего параграфа.

Функцию

$$G^{\text{in(ex)}}(z, y, k) = E(k; |z - y|) - \left[\mathcal{L}(k)A_0^{-1}(k) \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(k; |x - y|) \right](z)$$

при $z, y \in \Omega^{\text{in(ex)}}$ будем называть функцией Грина предельной внутренней (внешней) задачи. В силу теоремы 1.1 $G^{\text{in}}(x, y, k)$ при любых $k \in \mathbb{C}$, а $G^{\text{ex}}(x, y, k)$ при $\text{Im } k \geq 0$ совпадают с обычными функциями Грина соответствующих предельных задач.

Согласно следствию теоремы 1.1 множество Σ_0 представимо в виде $\Sigma_0 = \Sigma^{\text{in}} \cup \Sigma^{\text{ex}}$, где Σ^{in} лежит на вещественной оси, а Σ^{ex} расположено ниже вещественной оси.

ЛЕММА 1.5. (а) При $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma^{\text{ex}}$, $f \in C^\infty(\Gamma_0)$ справедливо равенство

$$(1.4) \quad [\mathcal{L}(k)A_0^{-1}(k)f](x) = - \int_{\Gamma_0} G^{\text{ex}}(x, y, k) f(y) ds_y, \quad x \in \Omega^{\text{ex}};$$

(б) Множество $\Sigma^{\text{in(ex)}}$ совпадает со множеством полюсов функции $G^{\text{in(ex)}}(x, y, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathbb{C}^+ = \{k : \text{Im } k \geq 0\}$. При $\mathbb{C}^+ \setminus \Sigma_0$ равенство (1.4) имеет место, так как обе части этого равенства определяют единственное решение предельной внешней задачи. Следовательно, в силу теоремы 1.1 равенство (1.4) имеет место и для $\mathbb{C} \setminus \Sigma_0$. С другой стороны, предельная внешняя задача однозначно разрешима при $k \in \mathbb{C}^+$. Отсюда вытекает справедливость утверждения (а).

Точно так же можно показать, что

$$(1.5) \quad [\mathcal{L}(k)A_0^{-1}(k)f](x) = \int_{\Gamma_0} G^{\text{in}}(x, y, k)f(y) ds_y, \quad x \in \Omega^{\text{in}},$$

при $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma^{\text{in}}$.

Пусть $\Sigma_{\text{in(ex)}}$ – множество полюсов $G^{\text{in(ex)}}$. Из представлений (1.4), (1.5) и произвола в выборе f следует, что $\Sigma^{\text{in(ex)}} \subset \Sigma_{\text{in(ex)}}$. С другой стороны, из определения $G^{\text{in(ex)}}$ вытекает, что $\Sigma_{\text{in(ex)}} \subset \Sigma^{\text{in(ex)}}$.

В заключение настоящего параграфа установим связь между кратностью собственного значения предельной внутренней задачи и порядком нуля соответствующего собственного значения оператора $B_0(k)$. Обозначим через Σ_m^{in} множества квадратных корней m -кратных собственных значений предельной внутренней задачи. Известно, что если $k_0 \in \Sigma_m^{\text{in}}$, то при k , достаточно близких к k_0 , справедливо представление

$$G^{\text{in}}(x, y, k) = (k_0^2 - k^2)^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \psi^{(j)}(x)\psi^{(j)}(y) + \tilde{G}(x, y, k),$$

где $\tilde{G}(x, y, k)$ – голоморфная в некоторой окрестности точки k_0 функция, $\psi^{(j)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственные функции.

Собственное значение $\lambda_0(k)$ оператора $B_0(k)$ будем называть *полупростым*, если соответствующее собственное алгебраическое подпространство не содержит присоединенных функций.

ЛЕММА 1.6. *Если $k_0 \in \Sigma_m^{\text{in}}$, то нуль является m -кратным полупростым собственным значением оператора $B_0(k_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $B_0(k)$ следует, что функции $\varphi^{(j)}$, равные $\psi^{(j)}$ на Γ_0 , являются полным набором собственных функций, соответствующих нулевому собственному значению оператора $B_0(k_0)$. Из леммы 1.3 и ее следствий вытекает, что оператор, сопряженный оператору $B_0(k)$, рассматриваемому в $L_2(\Gamma_0)$, имеет вид $B_0^*(k) = A_0(-\bar{k})A_0^{-1}(i)$. Легко видеть, что $\{A_0(i)\varphi^{(j)}\}_{j=0}^{m-1}$ – полный набор собственных функций, соответствующих нулевому собственному значению оператора $B_0^*(k_0)$. Из явного представления корневого подпространства и следствий леммы 1.3 вытекает справедливость утверждения леммы.

ЛЕММА 1.7. *Пусть $\{\lambda_0^{(j)}(k)\}_{j=0}^m$ – полный набор собственных значений оператора $B_0(k)$, стремящихся к нулю при $k \rightarrow k_0 \in \Sigma_0$, с учетом их алгебраической кратности.*

Тогда их произведение $a_0(k)$ является голоморфной в окрестности k_0 функцией.

Если к тому же $k_0 \in \Sigma_m^{\text{in}}$, то

$$(1.6) \quad a_0(k) = (k_0^2 - k^2)^n \tilde{a}_0(k), \quad \tilde{a}_0(k_0) \neq 0,$$

где $n = m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость первого утверждения следует из голоморфности оператора $B_0(k)$ (см., например, [40, гл. VII]).

Покажем справедливость второго утверждения. Из аналитичности оператора $B_0(k)$ следует, что $n \geq m$ при $k_0 \neq 0$ и $2n \geq 1$ при $k_0 = 0$. Допустим, что $n > m$. Тогда легко видеть, что справедливо представление

$$(1.7) \quad B_0^{-1}(k) = (k^2 - k_0^2)^{-q} Q(k),$$

где $q > 1$, а $Q(k)$ – невырожденный голоморфный оператор из $\mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_0))$. Из теоремы 1.1, определения оператора $B_0(k)$ и представлений (1.3), (1.7) следует, что предельная внутренняя задача может иметь полюс по k^2 выше первого порядка. Последнее противоречие доказывает справедливость (б) для $k_0 \neq 0$. Но, так как, с другой стороны, существуют решения предельной внутренней задачи, имеющие полюс второго порядка в нуле (по переменной k), то, следовательно, утверждение (б) справедливо и для $k_0 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для аналитического продолжения функции Грина предельной внешней задачи легко показать, что представление ее в окрестности полюса k_0 в виде

$$(1.8) \quad G^{\text{ex}}(x, y, k) = \frac{\psi(x)\psi(y)}{k_0^2 - k^2} + \tilde{G}(x, y, k)$$

справедливо тогда и только тогда, когда нуль является простым собственным значением оператора $B_0(k_0)$, а в представлении (1.6) $n = 1$.

§ 1.2. Существование полюсов с малой мнимой частью

Обозначим через $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ и $\mathring{H}_s(\omega_\varepsilon)$ подпространства функций из $H_s(\Gamma_0)$ с носителями из $\overline{\Gamma_\varepsilon}$ и $\overline{\omega_\varepsilon}$, соответственно. Нетрудно показать, что эти подпространства замкнутые.

Из утверждений лемм 1.1 и 1.2, теоремы 1.1 и определения $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ вытекает справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2.1. Голоморфная функция $\mathcal{L}(k) \in \mathcal{B}(\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon))$ равномерно ограничена по ε .

Если $\varphi_\varepsilon \in \mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, то $u_\varepsilon = \mathcal{L}(k)\varphi_\varepsilon$ принадлежит $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, является решением уравнения $(\Delta + k^2)u_\varepsilon = 0$ в Ω_ε для любого $k \in \mathbb{C}$ и удовлетворяет условию излучения (0.2) при $\text{Im } k \geq 0$.

Если к тому же $A_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)$, то функция u_ε удовлетворяет и граничному условию в (0.1) при $p_\varepsilon f = A_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon$, а $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ является скачком u_ε на Γ_ε .

Из леммы 2.1 следует, что разрешимость краевой задачи (0.1), (0.2) и вопрос существования у ее решения аналитического продолжения сводятся к разрешимости уравнения (0.3) в $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ при $f_\varepsilon \in H_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$.

Ниже в этом параграфе будет показано, что почти при всех k , за исключением дискретного множества Σ_ε , оператор $A_\varepsilon(k)$ взаимно однозначно отображает $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ на $H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Для аккуратного доказательства этого факта понадобятся некоторые сведения из теории дробных степеней положительно определенных самосопряженных операторов с дискретным спектром [2], [3], [45].

Пусть $\mathcal{Q}$ – сепарабельное гильбертово пространство и L_0 – самосопряженный оператор с дискретным положительным спектром $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$ в $\mathcal{Q}$, $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $\mathcal{Q}$, составленный из собственных векторов оператора L_0 . Вещественные степени L_0^s оператора L_0 определяются следующим образом:

$$\text{если } f = \sum_{j=1}^\infty b_j b_j, \text{ то } L_0^s f = \sum_{j=1}^\infty b_j \nu_j^s b_j,$$

причем, если $s > 0$, то область определения $\mathcal{D}(L_0^s)$ состоит из тех f , для которых последний ряд сходится.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)_{s, \Gamma_0}$ стандартное скалярное произведение в $H_s(\Gamma_0)$ (индуцирующее норму $\|\cdot\|_{s, \Gamma_0}$). Известно (см., например, [1])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если A – самосопряженный эллиптический положительно определенный оператор первого порядка в $L_2(\Gamma_0)$, то для любого s оператор A , рассматриваемый как оператор в $H_s(\Gamma_0)$ с областью определения $H_{s+1}(\Gamma_0)$, является самосопряженным в $H_s(\Gamma_0)$ относительно скалярного произведения

$$(u, v)' = (A^s u, A^s v)_{0, \Gamma_0}.$$

Соответствующая норма $((u, u)')^{1/2}$ эквивалентна норме в $H_s(\Gamma_0)$.

Так как оператор $A_0(i)$ является эллиптическим положительно определенным самосопряженным оператором первого порядка (см. следствие 1 леммы 1.3), а $H_0(\Gamma_0)$ совпадает с $L_2(\Gamma_0)$, то в силу предложения 2.1 в $H_s(\Gamma_0)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$(2.1) \quad (u, v)'_s = \int_{\Gamma_0} A_0^s(i) u A_0^s(i) \bar{v} ds,$$

порождающее в $H_s(\Gamma_0)$ эквивалентную норму $\|u\|'_{s, \Gamma_0} = ((u, u)'_s)^{1/2}$.

Определим на функциях $u \in H_s(\Gamma_0)$ и $v \in H_{-s}(\Gamma_0)$ билинейную форму

$$(2.2) \quad \langle u, v \rangle_{s, 0} = \int_{\Gamma_0} A_0^s(i) u A_0^{-s}(i) \bar{v} ds.$$

ЛЕММА 2.2. *Любой ограниченный функционал над $H_s(\Gamma_0)$ задается билинейной формой (2.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве любой такой функционал $\Phi(u)$ задается элементом $w \in H_s(\Gamma_0)$ в виде скалярного произведения $(u, w)'_{s, \Gamma_0}$ и его норма

$$\|\Phi\| = \sup_{\|u\|'_{s, \Gamma_0}=1} |\Phi(u)|$$

равна $\|w\|'_{s, \Gamma_0}$.

Обозначив $v = A_0^{2s}(i)w$, имеем

$$\Phi(u) = (u, w)'_s = \langle u, v \rangle_{s, 0},$$

что и заканчивает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ. *Сопряженное пространство $(H_s(\Gamma_0))^*$ изоморфно $H_{-s}(\Gamma_0)$.*

Обозначим $\mathbb{R}_+^n = \{x : x_n > 0\}$ и определим пространство $\mathring{H}_s(\mathbb{R}_+^n)$ как подпространство в $H_s(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций с носителем в замкнутом полупространстве $\overline{\mathbb{R}_+^n}$. Известно (см. [67])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Функции класса $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ плотны в $\mathring{H}_s(\mathbb{R}_+^n)$.*

Из предложения 2.2 и определения $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ и $\mathring{H}_s(\omega_\varepsilon)$ очевидным образом следует

ЛЕММА 2.3. *$C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ и $C_0^\infty(\omega_\varepsilon)$ плотны в $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ и $\mathring{H}_s(\omega_\varepsilon)$, соответственно.*

ЛЕММА 2.4. *Если $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$, $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$, то $\langle u, l_\varepsilon v \rangle_{s, 0}$ не зависит от выбора продолжения $l_\varepsilon v$ в $H_{-s}(\Gamma_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l_\varepsilon v$ и $l'_\varepsilon v$ — два произвольных продолжения v в $H_{-s}(\Gamma_0)$. Тогда $V = l_\varepsilon v - l'_\varepsilon v$ принадлежит $\mathring{H}_s(\omega_\varepsilon)$. В силу леммы 2.3 и следствия леммы 2.2 $\langle u, V \rangle_{s, 0} = 0$ для любого $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$, что доказывает лемму.

На функциях $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$, $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ определим билинейную форму

$$(2.3) \quad \langle u, v \rangle_{s, \varepsilon} = \langle u, l_\varepsilon v \rangle_{s, 0}.$$

В силу леммы 2.4 эта форма не зависит от выбора продолжения v . Поэтому из (2.1)–(2.3) и леммы 1.3 имеем

$$(2.4) \quad |\langle u, v \rangle_{s, \varepsilon}| \leq C_s \|u\|_{s, \Gamma_0} \|v\|_{-s, \Gamma_\varepsilon},$$

где постоянная C_s не зависит от u, v и ε . Следовательно, любой элемент $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ задает непрерывный функционал над $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ по формуле (2.3), причем, в силу леммы 2.4 разным элементам в $H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ отвечают разные функционалы. Пусть теперь $\Phi(u)$ — произвольный непрерывный функционал над $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$. Так как $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon) \subset H_s(\Gamma_0)$ — гильбертово пространство, то по теореме Рисса существует элемент $w \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ такой, что $\Phi(u) = (u, w)'_s$. Обозначим $V = A_0^{2s}(i)w$, $v = p_\varepsilon V \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$. Тогда

$$\Phi(u) = (u, w)'_s = \langle u, V \rangle_{s, 0} = \langle u, v \rangle_{s, \varepsilon}.$$

Таким образом, доказана следующая

ЛЕММА 2.5. Пусть $(\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon))^*$ – сопряженное к $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ пространство. Тогда $(\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon))^*$ изоморфно $H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$, причем значение функционала $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ на элементе $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ задается формулой (2.3).

Аналогично доказывается, что $(H_{-s}(\Gamma_\varepsilon))^*$ изоморфно $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$, причем значение функционала $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ на $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ задается формулой $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{s,\varepsilon}$.

Из леммы 1.3 и определений $A_\varepsilon(k)$, $H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ и $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ вытекает

ЛЕММА 2.6. Голоморфная функция $A_\varepsilon(k) \in \mathcal{B}(\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon), H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon))$ равномерно ограничена по ε .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 [67]. Если последовательность $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к $f \in H_0(\mathbb{R}^n)$ по норме $H_{-1/2}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если последовательность функций $f_n \in C^\infty(\Gamma_0)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к $f \in L_2(\Gamma_0)$ по норме $H_{-1/2}(\Gamma_0)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} f_n \varphi ds = \int_{\Gamma_0} f \varphi ds$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(\Gamma_0)$.

Из лемм 2.1, 2.3, следствия предложения 2.3 и пункта (а) леммы 1.1 следует

ЛЕММА 2.7. Пусть $k \in \mathbb{C}$, $\varphi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon \in \mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, $A_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon = f_\varepsilon \in L_2(\Gamma_\varepsilon)$. Тогда при любом достаточно большом R для функций $u_\varepsilon = \mathcal{L}(k)\varphi_\varepsilon$, $U_\varepsilon = \mathcal{L}(k)\Phi_\varepsilon$ допустимо интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} (2.5) \quad & \int_{S(R)} (\Delta + k^2) u_\varepsilon \overline{U_\varepsilon} dx \\ &= - \sum_{j=1}^3 \left(\int_{S(R) \setminus \Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_\varepsilon}}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_\varepsilon}}{\partial x_j} dx \right) \\ &+ k^2 \int_{S(R)} u_\varepsilon \overline{U_\varepsilon} dx + \int_{\Gamma_0} f_\varepsilon \overline{\Phi_\varepsilon} ds + \int_{\partial S(R)} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} \overline{U_\varepsilon} ds = 0. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. При $\text{Im } k \geq 0$ решение краевой задачи (0.1), (0.2) единственно в классе функций, принадлежащих $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом возможности интегрирования по частям, обеспечиваемой леммой 2.7, доказательство данного утверждения повторяет стандартное (см., например, [41]) доказательство единственности решений краевых задач для уравнения Гельмгольца во внешности ограниченного тела с гладкой границей.

Ключевую роль, в дальнейшем, играет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. (а) Уравнение $A_\varepsilon(i)\varphi = f$ однозначно разрешимо в $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ при любом $f \in H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, а оператор $A_\varepsilon^{-1}(i)$ равномерно ограничен по ε в $\mathcal{B}(H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon), \mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon))$.

(б) Для любого $F \in H_{-1/2}(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость в $H_{1/2}(\Gamma_0)$:

$$A_\varepsilon^{-1}(i)p_\varepsilon F \rightarrow A_0^{-1}(i)F.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\varphi, g \in C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon)$, рассматриваемых как элементы $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, имеем

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon(i)\varphi)(g) &= \langle g, A_\varepsilon(i)\varphi \rangle_{1/2, \varepsilon} = \langle g, A_0(i)\varphi \rangle_{1/2, 0} \\ &= \langle \overline{\varphi}, \overline{A_0(i)g} \rangle_{1/2, 0} = \langle \overline{\varphi}, \overline{A_\varepsilon(i)g} \rangle_{1/2, \varepsilon} = \varphi(A_\varepsilon(i)g). \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 2.3 следует, что $A_\varepsilon(i)$ изометричен сопряженному оператору. В свою очередь, из (2.4) и эквивалентности норм $\|\cdot\|'_{s, \Gamma_0}$ и $\|\cdot\|_{s, \Gamma_0}$ имеем

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon(i)\varphi\|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|\varphi\|_{1/2, \Gamma_0} &\geq c |\langle \varphi, A_\varepsilon(i)\varphi \rangle_{1/2, \varepsilon}| = c |\langle \varphi, A_0(i)\varphi \rangle_{1/2, 0}| \\ &= c |(\varphi, \varphi)'_{1/2}| \geq C' \|\varphi\|_{1/2, \Gamma_0}^2, \end{aligned}$$

где постоянная $C' > 0$ не зависит от ε . Следовательно,

$$(2.6) \quad \|\varphi\|_{1/2, \Gamma_0} \leq C \|A_\varepsilon(i)\varphi\|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$$

и справедливость первого утверждения теоремы доказана.

Покажем справедливость второго утверждения. Обозначим $\varphi_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}(i)p_\varepsilon F$, $F_\varepsilon = A_0(i)\varphi_\varepsilon$. Из оценки (2.6), ограниченности оператора $A_0(i)$ и очевидного равенства $p_\varepsilon F_\varepsilon = p_\varepsilon F$ следует, что $F_\varepsilon \rightarrow F$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$, а следовательно, в силу ограниченности оператора $A_0^{-1}(i)$ и $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0 = A_0^{-1}(i)F$ слабо в $H_{1/2}(\Gamma_0)$.

В силу оценки (2.6) и плотности $C^\infty(\Gamma_0)$ в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$ можно считать, что функция F принадлежит $C^\infty(\Gamma_0)$ и вещественнозначна. Положим $u_\delta = \mathcal{L}(i)\varphi_\delta$, $\delta \geq 0$. Переходя в (2.5) к пределу при $R \rightarrow \infty$, $k = i$, $U_\varepsilon = u_\varepsilon$, имеем

$$(2.7) \quad \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})}^2 + \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})}^2 = \int_{\Gamma_0} F \overline{\varphi_\varepsilon} ds.$$

Интегрируя по частям тождество

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\Delta - 1)u_0 \overline{u_\delta} dx = 0,$$

получаем равенство

$$(2.8) \quad \sum_{j=1}^3 \left(\int_{\Omega^{\text{in}}} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_\delta}}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega^{\text{ex}}} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_\delta}}{\partial x_j} dx \right) + \int_{\mathbb{R}^3} u_0 \overline{u_\delta} dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} F \overline{\varphi_\delta} ds.$$

Из (2.7), (2.8) вытекает равенство

$$(2.9) \quad \|u_0 - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})}^2 + \|u_0 - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})}^2 = \int_{\Gamma_0} (\overline{\varphi_0 - \varphi_\varepsilon}) F ds.$$

Из (2.9) и слабой сходимости φ_ε к φ_0 в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ следует, что $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в $W_2^1(\Omega^{\text{ex}})$ и в $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как φ_δ – скачок u_δ на Γ_0 , а сужение из $\Omega^{\text{in(ex)}}$ на Γ_0 есть ограниченный оператор из $W_2^1(\Omega^{\text{in(ex)}})$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, то φ_ε сходится к φ_0 сильно в $H_{1/2}(\Gamma_0)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $F_\delta \in H_{-1/2}(\Gamma_0)$, $\delta \geq 0$, и $F_\varepsilon \rightarrow F_0$ в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $A_\varepsilon^{-1}(i)p_\varepsilon F_\varepsilon \rightarrow A_0^{-1}(i)F_0$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$.

Для краткости записи иногда будем обозначать $H_{1/2}(\Gamma_0)$ через $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_0)$.

ЛЕММА 2.8. (а) *Оператор*

$$B_\varepsilon(k) = A_\varepsilon^{-1}(i)A_\varepsilon(k)$$

является голоморфной функцией из $\mathcal{B}(\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon))$, равномерно ограниченной по ε .

(б) *Справедливо представление*

$$B_\varepsilon(k) = I + T_\varepsilon(k),$$

где $T_\varepsilon(k)$ – компактные операторы такие, что если $\varphi_\delta \in \mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\delta)$ и $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ слабо в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $T_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon \rightarrow T_0(k)\varphi_0$ сильно в $H_{1/2}(\Gamma_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость (а) вытекает из леммы 2.6 и теоремы 2.1. Утверждение пункта (б) следует из представления

$$B_\varepsilon(k) = A_\varepsilon^{-1}(i)(A_\varepsilon(i) + (A_\varepsilon(k) - A_\varepsilon(i))),$$

определения $A_\varepsilon(k)$, леммы 1.3, компактности вложения $H_s(\Gamma_0)$ в $H_t(\Gamma_0)$ при $s > t$ и следствия теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ. Индекс оператора $B_\varepsilon(k)$ равен нулю.

Обозначим через Σ_ε множество нулей собственных значений оператора $B_\varepsilon(k)$. Так как оператор $B_\varepsilon(i) = I$, очевидно, обратим, то из предложения 1.1 и леммы 2.8 следует

ЛЕММА 2.9. При любом фиксированном ε оператор $B_\varepsilon^{-1}(k)$ является мероморфной функцией из $\mathcal{B}(\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon))$, множество полюсов которой совпадает с Σ_ε .

СЛЕДСТВИЕ 1. Σ_ε – дискретное множество в $\mathbb{C}$, не имеющее конечных точек сгущения.

СЛЕДСТВИЕ 2. При любом фиксированном ε оператор $A_\varepsilon^{-1}(k)$ является мероморфной функцией $\mathcal{B}(H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon, \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)))$, множество полюсов которой совпадает с Σ_ε .

Последнее утверждение вытекает из леммы 2.9, теоремы 2.1 и равенства $A_\varepsilon^{-1}(k) = B_\varepsilon^{-1}(k)A_\varepsilon^{-1}(i)$.

В свою очередь, из следствия 2, леммы 2.1 и предложения 1.2 вытекает

ТЕОРЕМА 2.2. (а) При любом фиксированном ε оператор $\mathcal{L}(k)A_\varepsilon^{-1}(k)$ есть мероморфная функция из $\mathcal{B}(H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon))$, множество полюсов которой совпадает с Σ_ε .

(б) Если $f_\varepsilon \in H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и $k \notin \Sigma_\varepsilon$, то

$$(2.10) \quad u_\varepsilon = \mathcal{L}(k)A_\varepsilon^{-1}(k)f_\varepsilon$$

удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)u_\varepsilon = 0$ в Ω_ε , а при $\text{Im } k \geq 0$ – и условию излучения (0.2).

(в) Если к тому же $f_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)$, то функция u_ε удовлетворяет и граничному условию в (0.1) при $p_\varepsilon f = f_\varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ. Σ_ε лежит в полуплоскости $\text{Im } k < 0$.

Последнее утверждение вытекает из следствия леммы 2.7.

Таким образом, в силу теоремы 2.2, ее следствия, следствия леммы 2.7 и единственности аналитического продолжения получаем, что при любом $f_\varepsilon \in H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ формула (2.10) определяет единственное обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) при $\text{Im } k \geq 0$ и его аналитическое продолжение в нижнюю комплексную полуплоскость в классе искомых функций, которое при $f_\varepsilon \in H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \cap C^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ удовлетворяет и граничному условию в обычном смысле.

По аналогии с предельными задачами при $k \in \mathbb{C}$ функцию

$$G_\varepsilon(z, y, k) = E(k; |z - y|) + g_\varepsilon(z, y, k),$$

где

$$g_\varepsilon(z, y, k) = - \left[\mathcal{L}(k)A_\varepsilon^{-1}(k) \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(k; |x - y|) \right] (z),$$

будем называть функцией Грина задачи (0.1), (0.2).

ЛЕММА 2.10. При $k \notin \Sigma_\varepsilon$, $f_\varepsilon \in L_2(\Gamma_\varepsilon)$ справедливы равенства

$$[\mathcal{L}(k)A_\varepsilon^{-1}(k)f_\varepsilon](x) = \int_{\Gamma_0} \{G_\varepsilon(x, y, k)\} f_\varepsilon(y) ds_y, \quad x \in \Omega_\varepsilon,$$

$$G_\varepsilon(x, y, k) = G_\varepsilon(y, x, k),$$

где $\{\cdot\}$ обозначает скачок функции на Γ_0 :

$$\{v(y)\} = \lim_{t \rightarrow y} v(t) - \lim_{s \rightarrow y} v(s), \quad t \in \Omega^{\text{in}}, \quad s \in \Omega^{\text{ex}}.$$

Множество полюсов $G_\varepsilon(x, y, k)$ совпадает с Σ_ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\text{Im } k > 0$ требуемые равенства доказываются стандартным интегрированием по частям (см., например, [60]), которое обеспечивается леммой 2.7. Дальнейшее доказательство полностью аналогично доказательству леммы 1.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Прежде чем перейти к исследованию зависимости решений задачи (0.1), (0.2) и их аналитических продолжений от ε , отметим, что анализ семейства голоморфных операторнозначных функций $B_\delta(k)$, определенных на разных гильбертовых подпространствах, с учетом леммы 2.8 эквивалентен анализу семейства голоморфных операторнозначных функций $I + T(k, \delta)$, где $T(k, \varepsilon)$ – компактные операторы, определенные на фиксированном (не зависящем от δ) гильбертовом пространстве H и сходящиеся к $T(k, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$ такой, что $\Sigma_0 \cap K = \emptyset$. Тогда $\Sigma_\varepsilon \cap K = \emptyset$ для любого достаточно малого ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Предположим, что существует последовательность $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ такая, что при $\varepsilon = \varepsilon_j$ существуют $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon \cap K$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\tau_\varepsilon \rightarrow k_0 \in K$. Пусть φ_ε – соответствующие нормированные в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ собственные функции $B_\varepsilon(\tau_\varepsilon)$. Тогда

$$(2.11) \quad T_\varepsilon(\tau_\varepsilon)\varphi_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon.$$

Из слабой компактности ограниченного множества в $H_s(\Gamma_0)$, леммы 2.8 и равенства (2.11) получаем, что существует подпоследовательность последовательности $\{\varepsilon_j\}$ такая, что на ней $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ сильно в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, $\varphi_0 \neq 0$. Переходя на этой подпоследовательности к пределу в (2.11), получаем, что $B_0(k_0)\varphi_0 = 0$. Последнее противоречит условию теоремы, что и доказывает справедливость утверждения теоремы.

В дальнейшем понадобится несколько более сильное утверждение.

ЛЕММА 2.11. Пусть компакты $\mathcal{M}_j \subset \mathbb{C}$ таковы, что при $k \in \mathcal{M}_1$ компакт $\mathcal{M}_2$ не содержит собственных значений оператора $B_0(k)$ и $\mathcal{M}_2 \cap \{1\} = \emptyset$. Тогда

- (а) при достаточно малых $\delta \geq 0$ существует равномерно ограниченный по $\delta, k \in \mathcal{M}_1, \zeta \in \mathcal{M}_2$ оператор $(B_\delta(k) - \zeta)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\delta))$;
- (б) если $\varphi_\delta \in \mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\delta)$ и $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, то

$$(B_\varepsilon(k) - \zeta)^{-1}\varphi_\varepsilon \rightarrow (B_0(k) - \zeta)^{-1}\varphi_0$$

в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ равномерно по $k \in \mathcal{M}_1$ и $\zeta \in \mathcal{M}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждения (а) проводится рассуждениями от противного и полностью аналогично доказательству теоремы 2.3. В свою очередь, из равномерной ограниченности $f_\delta = (B(k) - \zeta)^{-1}\varphi_\delta$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, слабой компактности ограниченного множества в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, очевидного равенства

$$(B(k) - \zeta)f_\delta = \varphi_\delta,$$

леммы 2.8 и сходимости $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ вытекает, что из любой последовательности $\varepsilon_j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, можно выделить подпоследовательность, на которой $f_\varepsilon \rightarrow (B_0(k) - \zeta)^{-1} \varphi_0$ сильно в $H_{1/2}(\Gamma_0)$. Отсюда в силу произвола выбора последовательности $\{\varepsilon_j\}$ следует справедливость (б).

Из утверждений данной леммы 2.11 и теорем 2.1, 2.2 сразу следует

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$ такой, что $\Sigma_0 \cap K = \emptyset$. Тогда для любого достаточно малого ε аналитическое продолжение u_ε решения задачи (0.1), (0.2) является голоморфной функцией из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$ при $k \in \text{int } K$, равномерно ограничено по ε и при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к решению предельных задач в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$ равномерно по $k \in K$.*

Напомним, что под сходимостью в $W_{2,\text{loc}}^1(D)$ понимается сходимость в $W_2^1(D \cap S(R))$ для любого R .

ТЕОРЕМА 2.5. *Если $k_0 \in \Sigma_0$, то существует $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящийся к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S(R, b)$ круг в $\mathbb{C}$ радиуса R с центром в b . Пусть $k_0 \in \Sigma_0$ и $R > 0$ – любое достаточно малое число такое, что $\overline{S(R, k_0)} \cap \Sigma_0 = \{k_0\}$, а функция $f \in H_{-1/2}(\Gamma_0)$ такая, что какая-либо из предельных задач имеет полюс при $k = k_0$. Существование указанных R и f очевидно. В силу теоремы 2.3 для любых достаточно малых ε множества $\partial S(R, k_0)$ и Σ_ε не пересекаются. Далее, пусть $u_\varepsilon(x, k)$ – аналитическое продолжение решения задачи (0.1), (0.2). В силу сделанных предположений и утверждения теоремы 2.4 получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\partial S(R, k_0)} u_\varepsilon dk \neq 0.$$

Следовательно, $\overline{S(R, k_0)} \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$. Отсюда в силу произвола в выборе R вытекает справедливость утверждения теоремы.

§ 1.3. Представление и равномерные оценки аналитического продолжения в окрестности полюсов

Теорема 2.5 хотя и дает положительный ответ на вопрос о существовании полюсов с малой мнимой частью, но как для обоснований асимптотик полюсов, строящихся в следующей главе, так и для приложений мало пригодна. Целью настоящего параграфа как раз и является доказательство утверждений, которые позволят обосновывать формальные асимптотические разложения и эффективно применять их в задачах рассеяния.

Рассмотрим проектор

$$P_\delta(k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a, 0)} (B_\delta(k) - \zeta)^{-1} d\zeta.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть компакт $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$, $0 < a < 1/2$, окружность $\partial S(a, 0)$ не содержит собственных значений оператора $B_0(k)$ при $k \in \mathcal{M}$. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $0 \leq \delta \leq \delta_0$ для голоморфной оператор-функции $P_\delta(k) \in \mathcal{B}(\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\delta))$ справедливы утверждения:

- (а) $\|P_\delta(k)\| < \text{const}$;
- (б) если $f_\delta \in \mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\delta)$ и $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$P_\varepsilon(k)f_\varepsilon \rightarrow P_0(k)f_0$$

- в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ равномерно по $k \in \mathcal{M}$;
- (в) $\dim P_\delta(k) = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждений (а), (б) следует непосредственно из леммы 2.11.

Так как оператор $P_\varepsilon(k)$, очевидно, регулярен по $\varepsilon > 0$ при любом фиксированном k , а оператор $P_\delta(k)$ регулярен по k при любом фиксированном $\delta \geq 0$, то

$$\dim P_\varepsilon(k) = \text{const}, \quad \dim P_0(k) = \text{const}.$$

Поэтому достаточно показать справедливость последнего утверждения леммы для произвольного фиксированного k . Не ограничивая общности, будем считать, что при этом k собственное значение λ_0 оператора $B_0(k)$, принадлежащее $\overline{S(a, 0)}$, единственно, равно нулю и его алгебраическая кратность равна m .

Пусть $\{f_0^{(j)}\}_{j=1}^m$ — ортонормированный в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ базис в собственном алгебраическом подпространстве, соответствующем λ_0 . Так как функции $f_\varepsilon^{(j)} = A_\varepsilon^{-1}(i)p_\varepsilon A_0(i)f_0^{(j)}$ принадлежат $\mathring{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к $f_0^{(j)}$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ в силу теоремы 2.1 и ее следствия, то из пункта (б) следует, что

$$\dim P_\varepsilon(k) \geq m.$$

Таким образом, для доказательства (в) достаточно показать справедливость неравенства

$$(3.1) \quad \dim P_\varepsilon(k) \leq m.$$

Допустим противное. Предположим, что $\dim P_\varepsilon(k) \geq m + 1$. Из леммы 2.11 следует, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что все собственные значения $\{\lambda_\varepsilon^{(j)}\}$ оператора $B_\varepsilon(k)$, принадлежащие $\overline{S(A, 0)}$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$, сходятся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Легко видеть, что из любой последовательности $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^\infty$, сходящейся к нулю при $t \rightarrow \infty$, можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon'_t\}_{t=1}^\infty$ такую, что на ней

$$(3.2) \quad B_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon^{(j)} = \lambda_\varepsilon^{(j)}\varphi_\varepsilon^{(j)} + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_\varepsilon^{(j,i)}\varphi_\varepsilon^{(i)}, \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

где $\varphi_\varepsilon^{(j)}$ – элементы ортонормированного в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ базиса в $P_\varepsilon(k)\overset{\circ}{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Повторяя доказательство теоремы 2.3, получаем существование подпоследовательности $\{\varepsilon_t^{(1)}\}_{t=1}^\infty$ последовательности $\{\varepsilon_t'\}_{t=1}^\infty$ такой, что на ней $\varphi_\varepsilon^{(1)} \rightarrow \varphi_0^{(1)} \neq 0$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ и $\varphi_0^{(1)} \in P_0(k)H_{1/2}(\Gamma_0)$.

Для $\varphi_\varepsilon^{(2)}$ уравнение (3.2) имеет вид

$$(3.3) \quad B_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon^{(2)} = \lambda_\varepsilon^{(2)}\varphi_\varepsilon^{(2)} + \alpha_\varepsilon^{(2,1)}\varphi_\varepsilon^{(1)}.$$

Так как $B_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon^{(2)}$, $\lambda_\varepsilon^{(2)}\varphi_\varepsilon^{(2)}$ ограничены в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, а $\|\varphi_\varepsilon^{(1)}\|_{1/2,\Gamma_0} = 1$, то из (3.3) следует, что множитель $\alpha_\varepsilon^{(2,1)}$ ограничен. Далее, вновь повторяя доказательство теоремы 2.3 и учитывая нормированность $\varphi_\varepsilon^{(2)}$ и сходимости $\varphi_\varepsilon^{(1)}$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, а также ограниченность $\alpha_\varepsilon^{(2,1)}$, получаем существование подпоследовательности $\{\varepsilon_t^{(2)}\}_{t=1}^\infty$ последовательности $\{\varepsilon_t^{(1)}\}_{t=1}^\infty$ такой, что на ней $\varphi_\varepsilon^{(2)} \rightarrow \varphi_0^{(2)} \neq 0$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, $\varphi_0^{(2)} \in P_0(k)H_{1/2}(\Gamma_0)$ и $\varphi_0^{(i)}$ ортогональны в $H_{1/2}(\Gamma_0)$.

Повторяя проделанную выше процедуру, получаем существование последовательности $\{\varepsilon_t^{(m+1)}\}_{t=1}^\infty$ такой, что на ней $\varphi_\varepsilon^{(j)} \rightarrow \varphi_0^{(j)} \neq 0$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ при $1 \leq j \leq m+1$, $\varphi_0^{(j)} \in P_0(k)H_{1/2}(\Gamma_0)$ и функции $\varphi_0^{(j)}$ ортогональны в $H_{1/2}(\Gamma_0)$. Следовательно, $\{\varphi_0^{(j)}\}_{j=1}^{m+1}$ является частью ортонормированного базиса $P_0(k)H_{1/2}(\Gamma_0)$, что противоречит условию $\dim P_0(k) = m$ и устанавливает справедливость (3.1).

СЛЕДСТВИЕ 1. Семейство голоморфных операторнозначных функций

$$R_\delta(k, \zeta) = (B_\delta(k) - \zeta)^{-1}(I_\delta - P_\delta(k))$$

равномерно ограничено по $\zeta \in S(a, 0)$, $k \in \mathcal{M}$ и $\delta \leq \delta_0$.

Если $f_\delta \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ и $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, то

$$R_\varepsilon(k, \zeta)f_\varepsilon \rightarrow R_0(k, \zeta)f_0$$

в $H_{1/2}(\Gamma_0)$ равномерно по $k \in \mathcal{M}$ и $\zeta \in S(a, 0)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть

$$a_\delta(k) = \prod_{j=1}^m \lambda_\delta^{(j)}(k),$$

где $\{\lambda_\delta^{(j)}(k)\}_{j=1}^m$ – совокупность собственных значений оператора $B_\delta(k)$, принадлежащих $S(a, 0)$, с учетом их алгебраических кратностей. Тогда функции $a_\delta(k)$ голоморфны при любом фиксированном $\delta \geq 0$ и $a_\varepsilon(k) \rightarrow a_0(k)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $k \in K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Если $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, а $\varphi_\varepsilon \in \dot{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ – соответствующее нетривиальное решение уравнения $B_\varepsilon(\tau_\varepsilon)\varphi_\varepsilon = 0$, то функцию $\Psi_\varepsilon = \mathcal{L}(\tau_\varepsilon)\varphi_\varepsilon$ будем называть *обобщенной собственной функцией задачи* (0.1), (0.2).

По определению функция $\Psi_\varepsilon \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению $(\Delta + \tau_\varepsilon^2)\Psi_\varepsilon = 0$ в Ω_ε и однородному граничному условию Неймана на Γ_ε , ее скачок на Γ_0 равен φ_ε , но при фиксированном ε она экспоненциально растет на бесконечности.

Всюду в дальнейшем, дополнительно не оговаривая, будем считать все функции продолженными нулем вне замыкания их исходной области определения.

Следующие три теоремы являются основным содержанием настоящей главы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}}$, $k_0 \neq 0$, ψ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция предельной внутренней задачи. Тогда при k , близких к k_0 ,

(а) для функции Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$ справедливо представление

$$(3.4) \quad G_\varepsilon(x, y, k) = \frac{\Psi_\varepsilon(x)\Psi_\varepsilon(y)}{\tau_\varepsilon^2 - k^2} + \tilde{G}_\varepsilon(x, y, k),$$

где $\tilde{G}_\varepsilon(x, y, k)$ – голоморфная в окрестности k_0 функция, $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$ сходится к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, а обобщенная собственная функция Ψ_ε сходится к ψ в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$;

(б) для аналитического продолжения решения задачи (0.1), (0.2) справедливо представление (0.5), где при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция U_ε сходится к регулярной части решения предельной внутренней задачи в $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ и к аналитическому продолжению решения предельной внешней задачи в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$ равномерно по k ,

$$(3.5) \quad \|U_\varepsilon\|_{W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Omega})} + \|U_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_R \|p_\varepsilon f\|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$$

равномерно по k и ε , а скачок $\{\Psi_\varepsilon\} \rightarrow \psi$ в $H_{1/2}(\Gamma_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 1.6 и 3.1 при любых $k \in \mathbb{C}$, достаточно близких к k_0 , в окрестности нуля содержится единственное и простое собственное значение $\lambda_\delta(k)$ оператора $B_\delta(k)$ и $\lambda_0(k_0) = 0$. Поэтому для k , близких к k_0 , имеем

$$(3.6) \quad A_\delta^{-1}(k) = \lambda_\delta^{-1}(k)P_\delta(k)A_\delta^{-1}(i) + R_\delta(k, 0)A_\delta^{-1}(i).$$

В силу леммы 1.7 и следствия 2 леммы 3.1 при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lambda_\varepsilon(k) \rightarrow \lambda_0(k) = (k_0^2 - k^2)\tilde{\lambda}_0(k), \quad \tilde{\lambda}_0(k_0) \neq 0,$$

равномерно по k . Следовательно, согласно теореме Руше [65] существует единственный полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящийся к k_0 и

$$(3.7) \quad \lambda_\varepsilon(k) = (\tau_\varepsilon^2 - k^2)\tilde{\lambda}_\varepsilon(k), \quad \tilde{\lambda}_\varepsilon(k) \rightarrow \tilde{\lambda}_0(k).$$

Так как в силу лемм 1.6 и 3.1 $\lambda_\varepsilon(k)$ – простое собственное значение оператора $B_\varepsilon(k)$, то нуль является простым собственным значением $B_\varepsilon(\tau_\varepsilon)$, и, следовательно, полюсу

τ_ε соответствует единственная (с точностью до умножения на константу) обобщенная собственная функция ψ_ε задачи (0.1), (0.2), которую для определенности нормируем в $L_2(\Omega)$. Из (2.10), (3.6), (3.7), леммы 3.1, ее следствия 1 и теорем 2.1 и 1.1 следует представление

$$(3.8) \quad u_\varepsilon(x, k) = \frac{\psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon^2 - k^2} \alpha_\varepsilon(p_\varepsilon f) + U_\varepsilon(x, k),$$

где U_ε — голоморфная функция из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, для которой имеет место оценка (3.5), а α_ε — линейный, равномерно ограниченный по ε функционал на $H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Из (3.8) и леммы 2.10 вытекают последовательно представления (3.4) и (0.5) для любого фиксированного ε .

Заметим, что функция $\varphi_\varepsilon = \{\psi_\varepsilon\} \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ является нетривиальным решением уравнения $B_\varepsilon(\tau_\varepsilon)\varphi_\varepsilon = 0$, и в силу леммы 3.1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\{\psi_\varepsilon\} \rightarrow \varphi_0 = \{\psi\}$$

в $H_{1/2}(\Gamma_0)$, откуда согласно лемме 1.2 следует сходимость

$$\psi_\varepsilon \rightarrow \psi$$

в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$. Так как в силу теоремы 2.4 для достаточно малого $b > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\int_{\partial S(b, k)} u_\varepsilon(x, k) dk \rightarrow i\pi k_0^{-1} \psi(x) \int_{\Gamma_0} \psi f ds$$

в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$, то из (3.8) и представления решений предельных задач через функции Грина следует, что

$$(3.9) \quad \alpha_\varepsilon(p_\varepsilon f) \rightarrow \int_{\Gamma_0} \psi f ds$$

для любого фиксированного $f \in L_2(\Gamma_0)$. В свою очередь, из (3.9) и (3.4) следует сходимость Ψ_ε к ψ . Таким образом, справедливость всех утверждений (а) доказана.

Отметим, что обобщенные собственные функции ψ_ε и Ψ_ε , вообще говоря, не равны, но при $\varepsilon \rightarrow 0$ отличаются друг от друга лишь на скалярный множитель $1 + o(1)$.

Из представления (0.5), пункта (а) и теоремы 2.4 следует равномерная по $k \in \partial S(b, k_0)$ сходимость U_ε к решению предельной внешней задачи и регулярной части решения внутренней предельной задачи в указанных в (б) нормах. Отсюда в силу ранее доказанной голоморфности U_ε в окрестности k_0 и оценки (3.5) вытекает и равномерная по $k \in S(b, k_0)$ сходимость U_ε к аналитическому продолжению решения предельной внешней задачи и регулярной части решения предельной внутренней задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $k_0 \in \Sigma^{\text{ex}}$ и для аналитического продолжения функции Грина предельной внешней задачи в окрестности k_0 справедливо представление (1.8), то, следуя доказательству теоремы 3.1, легко показать справедливость ее утверждений с единственной заменой в формулировке утверждений указанной сходимости U_ε на сходимость этой функции, наоборот, к решению предельной внутренней задачи и регулярной части решения предельной внешней задачи.

Перейдем к рассмотрению квазистационарного случая $k_0 = 0$. Заметим, что в этом случае соответствующая собственная функция $\psi \equiv |\Omega^{\text{in}}|^{-1/2}$ при $x \in \Omega^{\text{in}}$ и тождественно равна нулю в Ω^{ex} .

ТЕОРЕМА 3.2. (а) *Существует не более двух полюсов $\tau_\varepsilon^{(j)}$ аналитического продолжения функции Грина краевой задачи (0.1), (0.2), стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, связанных равенством*

$$(3.10) \quad \tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon^{(0)} = -\overline{\tau_\varepsilon^{(1)}}$$

и имеющих первый порядок, если $\text{Re } \tau_\varepsilon \neq 0$.

(б) *Для любых $k \neq \tau_\varepsilon^{(j)}$, достаточно близких к нулю, для аналитического продолжения решения задачи (0.1), (0.2) справедлива равномерная по ε и k оценка*

$$(3.11) \quad \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Omega})} + \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(R)t_\varepsilon \|f\|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon},$$

где $t_\varepsilon = |(k - \tau_\varepsilon)(k + \overline{\tau_\varepsilon})|^{-1}$.

(в) *Если $\text{Im } \tau_\varepsilon = o(\text{Re } \tau_\varepsilon)$, то при достаточно малых k для аналитических продолжений функции Грина и решения задачи (0.1), (0.2) справедливы представления*

$$(3.12) \quad G_\varepsilon(x, y, k) = \beta_\varepsilon \left(\frac{\Psi_\varepsilon(x)\Psi_\varepsilon(y)}{\tau_\varepsilon - k} + \frac{\overline{\Psi_\varepsilon(x)\Psi_\varepsilon(y)}}{\overline{\tau_\varepsilon} + k} \right) + \tilde{G}_\varepsilon(x, y, k),$$

$$(3.13) \quad u_\varepsilon(x, k) = \beta_\varepsilon \left(\frac{\Psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon - k} \int_{\Gamma_0} \{\Psi_\varepsilon\} ds + \frac{\overline{\Psi_\varepsilon(x)}}{\overline{\tau_\varepsilon} + k} \int_{\Gamma_0} \{\overline{\Psi_\varepsilon}\} ds \right) + U_\varepsilon(x, k),$$

где $\beta_\varepsilon = (2 \text{Re } \tau_\varepsilon)^{-1}$, а для $\tilde{G}_\varepsilon$, Ψ_ε и U_ε справедливы утверждения теоремы 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как нуль является простым собственным значением внутренней предельной задачи, то в силу лемм 1.6 и 3.1 при любых достаточно малых k в окрестности нуля содержится единственное и простое собственное значение $\lambda_\delta(k)$ оператора $B_\delta(k)$, $\lambda_0(0) = 0$, а для аналитического продолжения решения задачи (0.1), (0.2) справедливо представление (3.6). Из леммы 1.7 и следствия 2 леммы 3.1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ вытекает сходимость

$$\lambda_\varepsilon(k) \rightarrow \lambda_0(k) = k^2 \tilde{\lambda}_0(k), \quad \tilde{\lambda}_0(0) \neq 0.$$

Поэтому в силу теоремы Руше

$$(3.14) \quad \lambda_\varepsilon(k) = (\tau_\varepsilon^{(0)} - k)(\tau_\varepsilon^{(1)} - k) \tilde{\lambda}_\varepsilon(k), \quad \tilde{\lambda}_\varepsilon(k) \rightarrow \tilde{\lambda}_0(k).$$

Из (3.14) и очевидного равенства

$$(3.15) \quad \overline{B_\delta(k)} = B_\delta(-\bar{k})$$

следует справедливость (а).

Оценка в (3.11) вытекает из представлений (3.6), (3.14) и утверждений лемм 1.2, 3.1 и теоремы 2.1.

Пусть выполнено условие пункта (в). Так как нуль является простым собственным значением оператора $B_\varepsilon(\tau_\varepsilon)$, то, следуя доказательству предыдущей теоремы и учитывая (3.15), получаем следующее представление:

$$(3.16) \quad u_\varepsilon(x, k) = \frac{\psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon - k} \alpha_{\varepsilon,0}(p_\varepsilon f) + \frac{\overline{\psi_\varepsilon(x)}}{\overline{\tau_\varepsilon} + k} \alpha_{\varepsilon,1}(p_\varepsilon f) + U_\varepsilon(x, k),$$

где U_ε голоморфная функция из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, для которой имеет место оценка (3.5), $\alpha_{\varepsilon,j}$ – линейные, ограниченные при любом фиксированном ε функционалы над $H_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, а ψ_ε – нормированная в $L_2(\Omega)$ обобщенная собственная функция, соответствующая τ_ε и сходящаяся к ψ в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$. Учитывая произвол в выборе f , симметричность функции Грина по переменным x и y и легко проверяемое равенство

$$\overline{G_\varepsilon(x, y, k)} = G_\varepsilon(x, y, -\bar{k}),$$

из (3.16) получаем представление (3.12), где обобщенная собственная функция $\Psi_\varepsilon \rightarrow \psi$ в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$, а β_ε – некоторый вещественный множитель. В свою очередь, из (3.12) следует (3.13).

В силу теоремы 2.4 для достаточно малого $b > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$(3.17) \quad \int_{\partial S(b,0)} k u_\varepsilon(x, k) dk \rightarrow 2\pi i \psi(x) \int_{\Gamma_0} \psi f ds, \quad \int_{\partial S(b,0)} u_\varepsilon(x, k) dk \rightarrow 0$$

в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$. Подставляя в (3.17) функцию $u_\varepsilon(x, k)$ в виде (3.16) и учитывая условие на мнимую часть τ_ε , получаем, что множитель β_ε в (3.12) и (3.13) можно считать равным $(2 \operatorname{Re} \tau_\varepsilon)^{-1}$, так как для Ψ_ε не указывается точная нормировка.

Доказательство равномерной сходимости U_ε к аналитическому продолжению решения предельной внешней задачи и к регулярной части решения предельной внутренней задачи аналогично доказательству, приведенному в предыдущей теореме.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Подчеркнем, что оценка (3.11) справедлива без каких-либо дополнительных условий на τ_ε . Условность же пункта (в) является временной, так как в следующей главе будет построена формальная асимптотика τ_ε , обоснование которой будет дано при помощи (3.11) и из которой будет следовать выполнение условия пункта (в).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $k_0 \in \Sigma_2^{\text{in}}$. Тогда

- (а) у $G_\varepsilon(x, y, k)$ существует не более двух полюсов $\tau_\varepsilon^{(j)}$, стремящихся к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, и если $\tau_\varepsilon^{(0)} \neq \tau_\varepsilon^{(1)}$, то их порядок равен единице;
- (б) для любых $k \neq \tau_\varepsilon^{(j)}$, достаточно близких к k_0 , для аналитического продолжения решения задачи (0.1), (0.2) справедлива равномерная оценка (3.11), где $t_\varepsilon = |(k - \tau_\varepsilon^{(1)})(k - \tau_\varepsilon^{(0)})|$;
- (в) если $\tau_\varepsilon^{(0)} \neq \tau_\varepsilon^{(1)}$, то существует единственное нетривиальное решение уравнения $B_\varepsilon(\tau_\varepsilon^{(j)})\varphi_\varepsilon^{(j)} = 0$, а для любого решения Φ_ε уравнения $A_\varepsilon(\tau_\varepsilon^{(j)})\Phi_\varepsilon = f_\varepsilon$ справедливо представление $\Phi_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \varphi_\varepsilon^{(j)} + g_\varepsilon$, где α_ε – скалярный множитель и

$$\|g_\varepsilon\|_{1/2, \Gamma_0} \leq C |\tau_\varepsilon^{(0)} - \tau_\varepsilon^{(1)}|^{-1} \|f_\varepsilon\|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon};$$

- (г) если $\tau_\varepsilon^{(0)} \neq \tau_\varepsilon^{(1)}$ и для соответствующих нормированных в $L_2(\Omega)$ обобщенных собственных функций $\psi_\varepsilon^{(j)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon^{(0)} \overline{\psi_\varepsilon^{(1)}} dx \rightarrow 0,$$

то при k , близких к k_0 , для аналитического продолжения решения краевой задачи (0.1), (0.2) справедливо представление

$$(3.18) \quad u_\varepsilon(x, k) = \frac{\Psi_\varepsilon^{(0)}(x)}{(\tau_\varepsilon^{(0)})^2 - k^2} \int_{\Gamma_0} \{\Psi_\varepsilon^{(0)}\} f ds + \frac{\Psi_\varepsilon^{(1)}(x)}{(\tau_\varepsilon^{(1)})^2 - k^2} \int_{\Gamma_0} \{\Psi_\varepsilon^{(1)}\} f ds + U_\varepsilon(x, k),$$

где при $\varepsilon \rightarrow 0$ обобщенные собственные функции $\Psi_\varepsilon^{(j)}$ сходятся к ортонормированным в $L_2(\Omega)$ собственным функциям предельной внутренней задачи $\psi^{(j)}$ в $W_2^1(\Omega^{\text{in}}) \oplus W_{2, \text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$, а для функции U_ε справедливы утверждения теоремы 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $k_0 \in \Sigma_2^{\text{in}}$, то в силу лемм 1.6, 1.7, 3.1 и следствия 2 последней алгебраическая кратность собственных значений $\lambda_\delta^{(j)}(k)$ оператора $B_\delta(k)$, близких к нулю при k , близких к k_0 , равна двум, а для их произведения $a_\delta(k)$ справедливы следующие соотношения:

$$a_\varepsilon(k) \rightarrow a_0(k) = (k^2 - k_0^2)^2 \tilde{a}_0(k), \quad \tilde{a}_0(k_0) \neq 0.$$

Поэтому в силу теоремы Руше

$$(3.19) \quad a_\varepsilon(k) = (\tau_\varepsilon^{(0)} - k)(\tau_\varepsilon^{(1)} - k) \tilde{a}_\varepsilon(k), \quad \tilde{a}_\varepsilon(k) \rightarrow \tilde{a}_0(k).$$

Из (3.19) следует справедливость пункта (а).

Справедливость утверждений остальных пунктов вытекает из теоремы 2.4, лемм 2.10, 3.1 и следствия 1 последней (ситуация аналогична обращению (2×2) -матриц с аналитическими коэффициентами).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Вновь подчеркнем, что утверждение пункта (б) не зависит от совпадения $\tau_\varepsilon^{(j)}$ или от их несовпадения и служит для обоснования формальных асимптотик полюсов, которые, как будет показано в следующей главе, удовлетворяют условию пункта (в). В свою очередь, внешне “инородное” утверждение (в) необходимо для обоснования формальных асимптотик обобщенных собственных функций, также строящихся в следующей главе и, как будет показано, удовлетворяющих условию пункта (г).

Иногда будет удобней утверждения теорем 3.1–3.3 переформулировать для решений следующей краевой задачи:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} (\Delta + k^2)u_\varepsilon &= F_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= O(r^{-1}), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - iku_\varepsilon = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

при $k \geq 0$ и для их аналитических продолжений в полуплоскость $\text{Im } k < 0$. Предполагается, что $F_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}^3)$ имеет финитный носитель, а решение рассматривается в классе функций из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$. Под решениями предельных задач по-прежнему понимаются решения задач Неймана в Ω^{in} и в Ω^{ex} и их аналитические продолжения.

Из представления решения задачи (3.20) и его аналитического продолжения в виде суммы объемного потенциала в $\mathbb{R}^3$ и потенциала двойного слоя на Γ_ε и утверждений теорем 3.1–3.3 очевидным образом следует справедливость следующих трех утверждений.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\text{supp } F_\varepsilon \subset S(T)$, $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}}$, $k_0 \neq 0$. Тогда при k , близких к k_0 , для аналитического продолжения краевой задачи (3.20) справедливо представление

$$u_\varepsilon(x, k) = -\frac{\Psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon^2 - k^2} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_\varepsilon F_\varepsilon ds + U_\varepsilon(x, k),$$

где для Ψ_ε справедливы утверждения теоремы 3.1.

(а) Для U_ε справедлива равномерная по ε и k оценка

$$\|U_\varepsilon\|_{W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Omega})} + \|U_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(R, T) \|F_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

(б) Если к тому же $F_\varepsilon \rightarrow F_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$ равномерно по k , то U_ε сходится к регулярной части решения предельной внутренней задачи в $W_2^1(\Omega^{\text{in}})$ и к аналитическому продолжению решения предельной внешней задачи в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ex}})$ равномерно по k .

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\text{supp } F_\varepsilon \subset S(T)$. (а) Тогда для любых k , достаточно близких к нулю, для аналитического продолжения решения задачи (3.20) справедлива равномерная по ε и k оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Omega})} + \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(R, T) t_\varepsilon \|F_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

где $t_\varepsilon = |(k - \tau_\varepsilon)(k + \overline{\tau_\varepsilon})|^{-1}$.

(б) Если к тому же $\text{Im } \tau_\varepsilon = o(\text{Re } \tau_\varepsilon)$, то при достаточно малых k для аналитического продолжения решения справедливо представление

$$u_\varepsilon(x, k) = -\frac{1}{2\text{Re } \tau_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon - k} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_\varepsilon F_\varepsilon dy + \frac{\overline{\Psi_\varepsilon(x)}}{\overline{\tau_\varepsilon} + k} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\Psi_\varepsilon} F_\varepsilon dy \right) + U_\varepsilon(x, k),$$

где для Ψ_ε справедливы утверждения теоремы 3.2, а для U_ε справедливы утверждения (а), (б) теоремы 3.4.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $\text{supp } F_\varepsilon \subset S(T)$ и выполнены все условия теоремы 3.3. Тогда при k , близких к k_0 , для аналитического продолжения решения краевой задачи (3.20) справедливо представление

$$u_\varepsilon(x, k) = -\frac{\Psi_\varepsilon^{(0)}(x)}{(\tau_\varepsilon^{(0)})^2 - k^2} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_\varepsilon^{(0)} F_\varepsilon dy - \frac{\Psi_\varepsilon^{(1)}(x)}{(\tau_\varepsilon^{(1)})^2 - k^2} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_\varepsilon^{(1)} F_\varepsilon dy + U_\varepsilon(x, k),$$

где $\Psi_\varepsilon^{(j)}$ удовлетворяют утверждениям теоремы 3.3, а для U_ε справедливы утверждения (а), (б) теоремы 3.4.

§ 1.4. Резонатор с граничными условиями Дирихле

Рассмотрим резонатор с граничными условиями Дирихле:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (\Delta + k^2)u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= O(r^{-1}), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - ik u_\varepsilon = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $f_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon) \cap H_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, $\text{Im } k \geq 0$. Решение (4.1) рассматривается в классе функций, принадлежащих $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Под предельными задачами понимаются задачи Дирихле в Ω^{in} и Ω^{ex} .

Решение краевой задачи (4.1), решения предельных задач и их аналитические продолжения ищутся в виде потенциала простого слоя на Γ_0 :

$$u_\delta(x, k) = [\mathcal{A}(k)\varphi_\delta](x) \equiv \int_{\Gamma_0} \varphi(y) E(k; |x - y|) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma_\delta},$$

с плотностью $\varphi \in \mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\delta)$, $\delta \geq 0$, определяемой из уравнения:

$$\tilde{A}_\delta(k)\varphi_\delta = f_\delta$$

на Γ_δ , где $\tilde{A}_\varepsilon(k) = p_\varepsilon \tilde{A}_0(k)$, $\tilde{A}_0(k)$ – прямое значение $\mathcal{A}(k)$ на Γ_0 , а f_0 – граничное условие для предельных задач.

Дальнейшая последовательность доказательств полностью аналогична схеме, приведенной в §§ 1.1 и 1.2. Для потенциала простого слоя справедливо следующее утверждение (см. доказательство леммы 1.2 и [41]).

ЛЕММА 4.1. Оператор $\mathcal{A}(k)$ является голоморфной функцией из

$$\mathcal{B}(\mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\delta), W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)),$$

равномерно ограниченной по $\delta \geq 0$.

Если $\varphi_\delta \in \mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\delta)$, то $u_\delta = \mathcal{A}(k)\varphi_\delta$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma_\delta})$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне $\overline{\Gamma_\delta}$ и граничному условию при $f_\delta = \tilde{A}_\delta(k)\varphi_\delta$ для любого $k \in \mathbb{C}$, а при $\text{Im } k \geq 0$ и условию излучения.

Если к тому же $f_\delta \in C^\infty(\Gamma_\delta)$, то $\varphi_\delta \in C^\infty(\Gamma_\delta)$ является скачком нормальной производной функции u_δ на Γ_δ .

Как уже ранее отмечалось (см. предложение 1.2), $\tilde{A}_0(k)$ является эллиптическим ПДО порядка -1 . Непосредственно проверяется, что $(\tilde{A}_0(k) - \tilde{A}_0(i))$ – голоморфная функция из $\mathcal{B}(H_{-1/2}(\Gamma_0), H_1(\Gamma_0))$. Из представления оператора $\tilde{A}_0(k)$ в виде

$$(4.2) \quad \tilde{A}_0(k) = \tilde{A}_0(i) + (\tilde{A}_0(k) - \tilde{A}_0(i))$$

и определения $\tilde{A}_\varepsilon(k)$ следует

ЛЕММА 4.2. $\tilde{A}_\delta(k)$ является равномерно ограниченной по δ голоморфной функцией из $\mathcal{B}(\mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\delta), H_{1/2}(\Gamma_\delta))$.

Из интегрирования по частям левой части тождеств

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{A}(i)g(\Delta - 1)\mathcal{A}(i)\varphi dx = 0$$

при $g, \varphi \in C^\infty(\Gamma_0)$ и плотности $C^\infty(\Gamma_0)$ в $H_s(\Gamma_0)$ вытекает

ЛЕММА 4.3. $\tilde{A}_0(i)$ является самосопряженным, положительно определенным оператором на $L_2(\Gamma_0)$.

Последнее утверждение позволяет определить на $u \in H_s(\Gamma_0)$ и $v \in H_{-s}(\Gamma_0)$ билинейную форму

$$(4.3) \quad \langle u, v \rangle_{s,0} = \int_{\Gamma_0} \tilde{A}_0^{-s}(i)u \tilde{A}_0^s(i)\bar{v} ds.$$

ЛЕММА 4.4. Любой ограниченный функционал над $H_s(\Gamma_0)$ задается билинейной формой (4.3) и элементом $v \in H_{-s}(\Gamma_0)$. Если $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$, $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$, то $\langle u, l_\varepsilon v \rangle_{s,0}$ не зависит от выбора продолжения $l_\varepsilon v$ в $H_{-s}(\Gamma_0)$.

Доказательство этого утверждения повторяет доказательства лемм 2.2 и 2.4.

На функциях $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$, $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ определяем билинейную форму

$$(4.4) \quad \langle u, v \rangle_{s,\varepsilon} = \langle u, l_\varepsilon v \rangle_{s,0}.$$

ЛЕММА 4.5. Пусть $(\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon))^*$ – сопряженное к $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ пространство. Тогда $(\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon))^*$ изоморфно $H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$, причем значение функционала $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ на $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ задается формулой (4.4). Пространство $(H_{-s}(\Gamma_\varepsilon))^*$ изоморфно $\mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$, причем значение функционала $u \in \mathring{H}_s(\Gamma_\varepsilon)$ на $v \in H_{-s}(\Gamma_\varepsilon)$ задается формулой $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

Доказательство леммы следует из леммы 4.4 и повторяет доказательство леммы 2.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 [42], [43], [52]. Пусть функция $u_\varepsilon \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$ является решением задачи (4.1) при $f_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Gamma_\varepsilon})$. Тогда скачок ее нормальной производной на Γ_ε принадлежит $L_1(\Gamma_\varepsilon)$.

Из лемм 4.1, 2.3 и предложения вытекает следующий аналог леммы 2.7.

ЛЕММА 4.6. Пусть $k \in \mathbb{C}$, $\varphi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon \in \mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, $\tilde{A}_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon, F_\varepsilon = \tilde{A}_\varepsilon(k)\Phi_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Gamma_\varepsilon})$. Тогда при любом достаточно большом R для функций $u_\varepsilon = \mathcal{A}(k)\varphi_\varepsilon$, $U_\varepsilon = \mathcal{A}(k)\Phi_\varepsilon$ допустимо следующее интегрирование по частям:

$$(4.5) \quad \int_{S(R)} (\Delta + k^2) u_\varepsilon U_\varepsilon dx = - \sum_{j=1}^3 \left(\int_{S(R) \setminus \Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_\varepsilon}}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_\varepsilon}}{\partial x_j} dx \right) \\ + k^2 \int_{S(R)} u_\varepsilon \overline{U_\varepsilon} dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \varphi_\varepsilon \overline{F_\varepsilon} ds + \int_{\partial S(R)} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} \overline{U_\varepsilon} ds = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. При $\text{Im } k \geq 0$ решение задачи (4.1) единственно в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$.

Справедливость последнего утверждения вытекает из возможности интегрирования по частям, обеспеченной леммой 4.6, и его доказательство повторяет известное (см., например, [41]) доказательство единственности решений краевых задач для уравнения Гельмгольца во внешности ограниченного тела с гладкой границей.

Аналогом теоремы 2.1 является следующее ключевое утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. (а) Уравнение $\tilde{A}_\varepsilon(i)\varphi = f$ однозначно разрешимо в $\mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ при любом $f \in H_{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, а оператор $\tilde{A}_\varepsilon^{-1}(i) \in \mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_\varepsilon), \mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon))$ равномерно ограничен по ε .

(б) Для любого $F \in H_{1/2}(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\tilde{A}_\varepsilon^{-1}(i)p_\varepsilon F \rightarrow \tilde{A}_0^{-1}(i)F$$

в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость (а) следует из утверждений лемм 4.4, 4.5 и следствия леммы 4.6, доказательство повторяет доказательство соответствующего пункта в теореме 2.1.

Аналогично, обозначив $\varphi_\varepsilon = \tilde{A}_\varepsilon^{-1}(i)p_\varepsilon F$, $\varphi_0 = \tilde{A}_0^{-1}(i)F$ и $u_\delta = \mathcal{A}(i)\varphi_\delta$, $\delta \geq 0$, и повторив доказательство пункта (б) теоремы 2.1 с учетом леммы 4.6, получаем, что $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ слабо в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$ и для $F \in C^\infty(\Gamma_0)$ справедливо равенство

$$(4.6) \quad \|u_0 - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^{\text{ex}})}^2 + \|u_0 - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^{\text{in}})}^2 = \int_{\Gamma_0} \overline{F}(\varphi_0 - \varphi_\delta) ds.$$

Из определения билинейной формы, предложения 4.1 и очевидной гладкости φ_0 следует, что

$$(4.7) \quad \int_{\Gamma_0} \overline{F}(\varphi_0 - \varphi_\delta) ds = \langle \varphi_0 - \varphi_\varepsilon, F \rangle_{-1/2,0}.$$

Из (4.6), (4.7) и слабой сходимости φ_ε к φ_0 в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$ следует, что $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из ограниченности оператора сужения из $W_2^1(\Omega^{ex(in)})$ на Γ_0 получаем, что F_ε сходится к F сильно в $H_{1/2}(\Gamma_0)$. Отсюда в силу ограниченности $\tilde{A}_0^{-1}(i)$ получаем справедливость (б).

ЛЕММА 4.7. (а) *Оператор*

$$B_\delta(k) = \tilde{A}_\delta^{-1}(i)\tilde{A}_\delta(k)$$

является голоморфной операторнозначной функцией из $\mathcal{B}(\mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\delta))$, равномерно ограниченной по δ .

(б) *Справедливо представление*

$$B_\delta(k) = I_\delta + T_\delta(k),$$

где $T_\delta(k)$ – компактные операторы такие, что если $\varphi_\delta \in \mathring{H}_{-1/2}(\Gamma_\delta)$ и $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ слабо в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $T_\varepsilon(k)\varphi_\varepsilon \rightarrow T_0(k)\varphi_0$ сильно в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения (а) вытекает из леммы 4.2 и теоремы 4.1. Утверждения пункта (б) следуют из представления (4.2), определения $\tilde{A}_\delta(k)$ и теоремы 4.1.

Обозначим через Σ_δ множество нулей собственных значений оператора $B_\delta(k)$. Дальнейший анализ оператора $B_\delta(k)$ с учетом утверждений лемм 4.1–4.7 не отличается от анализа, проведенного в §§ 1.1–1.3. Легко видеть, что смена области определения $H_{1/2}(\Gamma_0)$ на $H_{-1/2}(\Gamma_0)$ с точки зрения функционального анализа (но при учете утверждений теоремы 4.1 и леммы 4.7) не играет сколько-нибудь существенной роли. В результате получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4.2. При любом фиксированном $\delta \geq 0$ оператор $\mathcal{A}(k)\tilde{A}_\delta^{-1}(k)$ является мероморфной функцией из $\mathcal{B}(H_{1/2}(\Gamma_\delta), W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3))$, множество полюсов которой совпадает с Σ_δ .

Если $f_\delta \in H_{1/2}(\Gamma_\delta)$ и $k \notin \Sigma_\delta$, то

$$(4.8) \quad u_\delta = \mathcal{A}(k)\tilde{A}_\delta^{-1}(k)f_\delta$$

принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma_\delta})$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне $\overline{\Gamma_\delta}$, граничному условию $u_\delta = f_\delta$ на Γ_δ , а при $\text{Im } k \geq 0$ – и условию излучения (0.2).

При фиксированном δ множество Σ_δ дискретно и не имеет конечных точек сгущения.

$\Sigma_0 = \Sigma^{\text{in}} \cup \Sigma^{\text{ex}}$, где Σ^{in} – вещественное множество собственных частот предельной внутренней задачи, а Σ^{ex} и Σ_ε лежат в нижней комплексной полуплоскости.

Если K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$ такой, что $\Sigma_0 \cap K = \emptyset$, то $\Sigma_\varepsilon \cap K = \emptyset$ для любого достаточно малого ε .

Если $k_0 \in \Sigma_0$, то существует $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящийся к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Формула (4.8) определяет аналитические продолжения как задачи (4.1), так и ее предельных задач. По аналогии с предыдущими параграфами функцию

$$G^{\text{in(ex)}}(z, y, k) = E(k; |z - y|) - [\mathcal{A}(k)\tilde{A}_0^{-1}(k)E(k; |x - y|)](z)$$

при $z, y \in \Omega^{\text{in(ex)}}$ назовем функцией Грина предельной внутренней (внешней) задачи, а функцию

$$G_\varepsilon(z, y, k) = E(k; |z - y|) - [\mathcal{A}(k)\tilde{A}_\varepsilon^{-1}(k)E(k; |x - y|)](z)$$

– функцией Грина задачи (4.1).

Из теорем 4.1, 4.2 следует

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$ такой, что $\Sigma_0 \cap K = \emptyset$. Тогда для любого достаточно малого ε аналитическое продолжение u_ε решения задачи (4.1) есть голоморфная функция из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ при $k \in \text{int } K$, равномерно ограниченная по ε в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ и сходящаяся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решениям предельных задач (и их аналитическим продолжениям) в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ равномерно по $k \in K$.

Множества Σ^{ex} и Σ_ε совпадают, соответственно, с множествами полюсов G^{ex} и G_ε .

Пусть $\Phi_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}_{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ – нетривиальное решение уравнения $B_\varepsilon(\tau_\varepsilon)\Phi_\varepsilon = 0$ при $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$. Назовем функцию $\Psi_\varepsilon = \mathcal{A}(\tau_\varepsilon)\Phi_\varepsilon$ обобщенной собственной функцией задачи (4.1). Она является решением уравнения $(\Delta + \tau_\varepsilon^2)\Psi_\varepsilon = 0$ в Ω_ε , удовлетворяет граничному условию $\Psi_\varepsilon = 0$ на Γ_ε , но экспоненциально растет на бесконечности при фиксированном ε . Точно так же, как в § 1.3, можно получить следующее утверждение (полный аналог теоремы 3.1).

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть k_0^2 – простое собственное значение предельной внутренней задачи, ψ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция. Тогда при k , близких к k_0 , для функции Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$ справедливо представление

$$G_\varepsilon(x, y, k) = \frac{\Psi_\varepsilon(x) \Psi_\varepsilon(y)}{\tau_\varepsilon^2 - k^2} + \tilde{G}_\varepsilon(x, y, k),$$

где $\tilde{G}_\varepsilon(x, y, k)$ – голоморфная в окрестности точки k_0 функция, $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$ сходится к k_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, а обобщенная собственная функция $\Psi_\varepsilon \rightarrow \psi$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$.

Для аналитического продолжения решения задачи (4.1) справедливо представление

$$u_\varepsilon(x, k) = -\frac{\Psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon^2 - k^2} \int_{\Gamma_0} \left\{ \frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial \nu} \right\} f_\varepsilon ds + U_\varepsilon(x, k),$$

где

$$\|U_\varepsilon\|_{W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Omega})} + \|U_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(R) \|f_\varepsilon\|_{1/2, \Gamma_\varepsilon}$$

равномерно по k и ε , а скачок $\{\partial \Psi_\varepsilon / \partial \nu\} \rightarrow \partial \psi / \partial \nu$ в $H_{-1/2}(\Gamma_0)$.

Если $f_\varepsilon = p_\varepsilon f_0$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция U_ε сходится к регулярной части решения предельной внутренней задачи и к аналитическому продолжению решения предельной внешней задачи в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ равномерно по k , а

$$\int_{\Gamma_0} \left\{ \frac{\partial \Psi_\varepsilon}{\partial \nu} \right\} f_0 ds \rightarrow \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} f_0 ds.$$

§ 1.5. Обобщения для резонаторов в $\mathbb{R}^n$

Результаты предыдущих параграфов естественным образом переносятся и для резонаторов в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$. Пусть Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно дифференцируемой границей Γ_0 , $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_0 \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$, ω_ε – открытое подмножество на Γ_0 , имеющее границу класса C^∞ , диффеоморфное $(n-1)$ -мерному шару при любом фиксированном ε и лежащее в n -мерном шаре радиуса ε с центром в некоторой фиксированной точке $x^0 \in \Gamma_0$. Краевые задачи для n -мерных резонаторов, являющиеся обобщением (0.1), (0.2) и (4.1), имеют вид

$$(5.1) \quad (\Delta + k^2)u_\varepsilon = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Gamma_\varepsilon}, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = f_\varepsilon, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

$$(5.2) \quad (\Delta + k^2)u_\varepsilon = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Gamma_\varepsilon}, \quad u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $k \in \mathbb{R}$, если n – нечетно, и $k > 0$, если n – четно. На бесконечности предполагается выполненным условие излучения Зоммерфельда

$$(5.3) \quad u_\varepsilon = O(r^{(1-n)/2}), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - ik u_\varepsilon = o(r^{(1-n)/2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

гарантирующее однозначную разрешимость (5.1), (5.3) и (5.2), (5.3) в классе функций, принадлежащих, соответственно, $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Gamma_\varepsilon})$ и $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что при $n = 2$ краевая задача (5.1), (5.3) описывает рассеяние H -поляризованных, а (5.2), (5.3) – E -поляризованных электромагнитных полей на идеально проводящем цилиндре с узкой щелью, сечением которого является Γ_ε (см., например, [9], [66]).

Для произвольного $n \geq 2$ доказательства существования решений и их аналитических продолжений в искомым классах функций, а также сходимость решений возмущенных задач к решениям предельных задач фактически полностью повторяют доказательства, приведенные ранее для $n = 3$, при условии, что в определении поверхностных потенциалов, а также их прямых значений под $E(k; r)$ понимается фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$, соответствующее условию излучения (5.3). При нечетном n функция $E(k; r)$ аналитически продолжается с положительной вещественной полуоси на всю комплексную плоскость. Поэтому все утверждения (и их доказательства) предыдущих параграфов переносятся без изменений на случай нечетного n .

Для четного же n , как известно, фундаментальное решение имеет логарифмическую особенность в нуле и поэтому с вещественной положительной полуоси может быть аналитически продолжено только в комплексную плоскость с разрезом вдоль неположительной вещественной полуоси $\tilde{\mathbb{C}}$ (либо на бесконечнолистную риманову поверхность, порождаемую $\ln k$). Естественно, что и решения предельных внешних и возмущенных задач могут быть продолжены “только” в $\tilde{\mathbb{C}}$, что, как легко видеть, не мешает доказать справедливость всех утверждений предыдущих параграфов (за исключением утверждений теорем 3.2 и 3.5), понимая для определенности под Σ^{in} множество положительных собственных частот предельной внутренней задачи и рассматривая аналитические продолжения в $\tilde{\mathbb{C}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Проблемы, возникающие при исследовании возмущения нулевого собственного значения предельной внутренней задачи в четномерном случае, т.е. доказательство аналога теоремы 3.2, объясняются именно наличием в нуле существенной особенности или, грубо говоря, невозможностью использовать теорему о вычетах в полюсе и теорему Руше.

ГЛАВА II

АСИМПТОТИКИ ПОЛЮСОВ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В предыдущей главе было доказано существование полюсов с малой мнимой частью для резонатора Гельмгольца. В настоящей главе методом согласования асимптотических разложений строятся асимптотики этих полюсов по малому параметру ε и исследуется их зависимость от некоторых характеристик предельных задач и геометрии отверстия.

Всюду в этой главе предполагается, что $\Omega = \Omega^{\text{in}}$ совпадает в некоторой окрестности начала координат с полупространством $x_3 > 0$, а отверстие имеет вид $\omega_\varepsilon = \{x : x\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, где ω – ограниченная односвязная область на плоскости $x_3 = 0$ с бесконечно дифференцируемой границей.

§ 2.1. Асимптотика полюса в невырожденном случае

В этом разделе рассматривается задача (0.1), (0.2) в окрестности ненулевой, невырожденной собственной частоты k_0 предельной внутренней задачи. То есть предполагается, что $k_0^2 \neq 0$ является простым собственным значением задачи Неймана для $-\Delta$ в Ω^{in} и $\psi_0 = \psi(0) \neq 0$, где ψ – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственная функция. Главные члены асимптотик $\tau_\varepsilon - k_0$, $\text{Im } \tau_\varepsilon$ и обобщенной собственной функции Ψ_ε зависят от некоторых вполне определенных констант и функций, определяемых ниже.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, “диск” ω лежит на плоскости $\xi_3 = 0$, $\Gamma = \{\xi : \xi = (\xi_1, \xi_2, 0), \xi \notin \bar{\omega}\}$, $\mathbb{R}_\Gamma^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Gamma}$. Далее, пусть $\tilde{X} \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ – гармоническая вне $\bar{\omega}$ функция, удовлетворяющая граничному условию $\tilde{X} = 1$ на ω и убывающая на бесконечности. Существование такой функции хорошо известно (см., например, [67]). Она имеет асимптотику

$$\tilde{X}(\xi) = c_\omega \rho^{-1} + O(\rho^{-2})$$

при $\rho = |\xi| \rightarrow \infty$. Постоянная $c_\omega > 0$ есть емкость диска ω (см. [46], [56]). Заметим, что если ω – единичный круг, то $c_\omega = 2\pi^{-1}$ (см. [46]).

Положим

$$X_0(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\tilde{X}(\xi), \quad \xi_3 \geq 0, \quad X_0(\xi) = \frac{1}{2}\tilde{X}(\xi), \quad \xi_3 \leq 0.$$

Отметим, что поверхность Γ понимается как двусторонняя. По определению функция X_0 принадлежит $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_\Gamma^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}_\Gamma^3)$, является гармонической в $\mathbb{R}_\Gamma^3$ и удовлетворяет граничному условию $\partial X_0 / \partial \xi_3 = 0$ на Γ .

Основной и конечной целью параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1.1. *Асимптотики полюса $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, сходящегося к k_0 , и соответствующей обобщенной собственной функции Ψ_ε имеют вид (0.7), (0.10) и*

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi(x), & x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi_0 X_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim e 2\pi\psi_0 c_\omega G^{\text{ex}}(x, 0, k_0), & x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$.

Доказательство этой теоремы будет дано ниже.

Заметим, что объединение областей, в которых приведены асимптотики для Ψ_ε , совпадает с Ω_ε . Последнее означает равномерность приведенных асимптотик.

Прежде чем перейти к построению асимптотик полюса и соответствующей обобщенной собственной функции, остановимся на следствиях теоремы для приложений. Так как, вообще говоря, реальные процессы в физике описываются решениями краевой задачи (0.1), (0.2) при вещественных k , то представляет определенный интерес исследовать пики решений этой задачи именно при вещественных k , близких к k_0 . Из

утверждений теорем I.3.1, I.3.4 следует, что для вещественных k максимумы этих пиков наблюдаются в ситуации, когда

$$k = k(\varepsilon) = \operatorname{Re} \tau_\varepsilon + O(\operatorname{Im} \tau_\varepsilon),$$

называемой в дальнейшем *пиковым режимом*. В силу (0.7), (0.10) для рассматриваемого в этом разделе случая пиковый режим имеет вид

$$k = k(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 (t + o(1)),$$

где t – любое действительное число.

Для граничных значений f таких, что предельная внутренняя задача неразрешима, т.е. в случае, когда

$$a_f = \int_{\Gamma_0} \psi f \, ds \neq 0,$$

краевую задачу (0.1), (0.2) будем называть *задачей излучения*. Непосредственно из утверждений теорем I.3.1 и 1.1 следует, что в пиковом режиме решение задачи излучения имеет асимптотики

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-2} (2k_0(\tau_2 - t))^{-1} a_f \psi(x), & x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-2} (2k_0(\tau_2 - t))^{-1} a_f \psi_0 X_0(x/\varepsilon), & x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} (2k_0(\tau_2 - t))^{-1} a_f \pi c_\omega \psi_0 G^{\text{ex}}(x, 0, k), & x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь задачу рассеяния. Пусть $u^{\text{out}}(x, k)$ – некоторое внешнее поле (например, плоская волна), $u_\delta(x, k)$ – поле, рассеянное идеально жесткой поверхностью Γ_δ , и $u = u^{\text{out}} + u_0$. Тогда $u_\varepsilon(x, k)$ является решением задачи (0.1), (0.2), где $f = -\partial u^{\text{out}} / \partial \nu$. Очевидно, что в этом случае $a_f = 0$. Однако, представляя $u^\varepsilon = u^{\text{out}} + u_\varepsilon$ в виде

$$u^\varepsilon(x, k) = (1 - \chi(tr)) u^{\text{out}}(x, k) + u_{\varepsilon, \chi}(x, k),$$

где t – любое достаточно малое число такое, что $\overline{\Omega^{\text{in}}} \subset S(t^{-1})$, сводя краевую задачу (0.1), (0.2) для u_ε к краевой задаче (I.3.20) для $u_{\varepsilon, \chi}$ и используя утверждения теорем I.3.4 и 1.1, легко получить, что рассеянное поле в пиковом режиме имеет асимптотики

$$\begin{aligned} (1.1) \quad u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} (2k_0(\tau_2 - t))^{-1} \pi \psi_0 c_\omega u(0, k_0) \psi(x), & x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} (2k_0(\tau_2 - t))^{-1} \pi \psi_0^2 c_\omega u(0, k_0) X_0(x/\varepsilon), & x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim (2k_0(\tau_2 - t))^{-1} \\ &\quad \times (\pi \psi_0 c_\omega)^2 u(0, k_0) G^{\text{ex}}(x, 0, k) + u_0(x, k), & x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$.

Обозначим

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (k_0^2 - k^2) R_j(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k), \\ \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (k^2 - k_0^2) R_j(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k),\end{aligned}$$

где

$$R_j(D_y) = \sum_{i=1}^j P_i^{(j)}(D_y), \quad P_j^{(q)}(D_y) = \sum_{i=0}^j a_{j,i}^{(q)} \frac{\partial^j}{\partial y_1^i \partial y_2^{j-i}},$$

$j \geq 1$, $R_0(D_y)$ и $a_{j,i}^{(t)}$ — произвольные постоянные. Как уже отмечалось выше, коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k)$ аналитичны в некоторой окрестности точки k_0 , удовлетворяют однородному условию Неймана на $\Gamma_0 \setminus \{0\}$, являются решениями уравнения Гельмгольца в $\Omega^{\text{in(ex)}}$, а при $\text{Im } k \geq 0$ коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, k)$ удовлетворяют и (0.2). Поэтому полную асимптотику обобщенной собственной функции ψ_ε вне некоторой окрестности отверстия естественно искать в виде $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$ в $\Omega^{\text{in(ex)}}$ (более точно, в $\Omega^{\text{in(ex)}} \setminus S(\varepsilon^{1/2})$).

Заметим, что обобщенная собственная функция Ψ_ε из теорем I.3.1, I.3.4 и 1.1 и упомянутая выше (и фигурирующая ниже) обобщенная собственная функция ψ_ε , вообще говоря, совпадают при $\varepsilon \rightarrow 0$ только с точностью до скалярного множителя $\alpha_\varepsilon \rightarrow 1$.

Следующая лемма уточняет структуру асимптотик в нуле коэффициентов рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}$.

ЛЕММА 1.1. *Для $G^{\text{in(ex)}}(x, y, k)$ и ее производных при k , близких к k_0 , справедливы представления:*

$$\begin{aligned}P_j(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, 0, k) &= \alpha_{\text{in(ex)}} \frac{\psi(x) P_j(D_x) \psi(0)}{k_0^2 - k^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi} (-1)^j P_j(D_x) \left(\frac{\cos(kr)}{r} \right) + g_j^{\text{in(ex)}}(x, k),\end{aligned}$$

где $\alpha_{\text{in}} = 1$, $\alpha_{\text{ex}} = 0$, g_j^{in} и g_j^{ex} являются голоморфными функциями из $C^m(\overline{\Omega^{\text{in}}})$ и $C_{\text{loc}}^m(\overline{\Omega^{\text{ex}}})$ для любого m и для малых x удовлетворяют граничному условию $\partial g_j^{\text{in(ex)}} / \partial x_3 = 0$ при $x_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость леммы для внутренней задачи. Не ограничивая общности, будем считать, что Ω^{in} лежит в полупространстве $x_3 > 0$. Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. Обозначим $y_* = (y_1, y_2, -y_3)$ и для любого достаточно малого $y \in \Omega^{\text{in}}$ представим функцию Грина в виде

$$G^{\text{in}}(x, y, k) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\cos(k|x-y|)}{|x-y|} \chi(|y-x|T) + \frac{\cos(k|x-y_*|)}{|x-y_*|} \chi(|y_*-x|T) \right) + g(x, y, k^2),$$

где T – достаточно большое число такое, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x}(G^{\text{in}}(x, y, k) - g(x, y, k^2)) = 0, \quad x \in \Gamma_0 \setminus \{0\},$$

а $g \in C^\infty(\overline{\Omega^{\text{in}}} \times S(t) \cap \Omega^{\text{in}})$ при достаточно малом $t > 0$. Очевидно, что такие T и t существуют. Из определения функции $g(x, y, \lambda)$ следует, что $G_y = P_j(D_y)g(x, 0, \lambda)$ является решением краевой задачи

$$(\Delta + \lambda)G_y = F_y, \quad x \in \Omega^{\text{in}}, \quad \frac{\partial G_y}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_0,$$

где $F_y(x, \lambda)$ – семейство голоморфных в окрестности точки $l_0 = k_0^2$ функций из $C^m(\overline{\Omega^{\text{in}}})$ для любого m , равномерно ограниченных по y и сходящихся к голоморфной функции $F_0 \in C^m(\overline{\Omega^{\text{in}}})$ при $y \rightarrow 0$. Следовательно,

$$G_0 = \lim_{y \rightarrow 0} G_y$$

– мероморфная функция из $C^m(\overline{\Omega^{\text{in}}})$.

С другой стороны, для функции Грина (как для ядра резольвенты) справедливо представление (0.6), где $\tilde{G}(x, y, \lambda)$ – голоморфная функция из $L_2(\Omega^{\text{in}}) \times L_2(\Omega^{\text{in}})$. Отсюда следует справедливость утверждения леммы для внутренней задачи.

Доказательство леммы для внешней задачи очевидным образом сводится к случаю ограниченной области.

Так как в нуле коэффициенты рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}$ имеют нарастающие особенности, то в окрестности отверстия (при $x \in S(2\varepsilon^{1/2})$) полная асимптотика ψ_ε строится в виде (0.8), а получаемые стандартным путем краевые задачи для коэффициентов ряда (0.8) имеют вид (0.9).

Обозначим через $T_j(\xi)$ однородные функции степени j , являющиеся либо однородными полиномами степени j , либо однородными полиномами степени $j + 2q + 1$, умноженными на ρ^{-2q-1} для какого-нибудь целого $q \geq 1$ и удовлетворяющие “граничному” условию $\partial T_j / \partial \xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$, $\xi \neq 0$. Обозначим посредством $\widetilde{\mathcal{H}}_j$ множество рядов вида

$$T(\xi) = \sum_{q=-\infty}^j T_q(\xi).$$

Будем называть два ряда сопряженными, если их сумма равна полиному.

На рядах $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$, где τ_ε – любая функция, имеющая асимптотику (0.7), определим оператор переразложения K_q в следующей, стандартной для метода согласования, форме. Заменим в $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$ коэффициенты на их асимптотики при $r \rightarrow 0$, функцию τ_ε – на ее асимптотику и перейдем к переменной $\xi = x\varepsilon^{-1}$. В полученном двойном ряду оставим только члены вида $\varepsilon^j \Phi(\xi)$, где $j \leq q$. Эту сумму и обозначим как $K_q(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon))$. Из леммы 1.1 вытекает

ЛЕММА 1.2. Для любой функции τ_ε , имеющей асимптотику (0.7), любых рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k)$ и любого целого $N \geq 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i V_i^{\text{in(ex)}}(\xi).$$

Ряды $V_i^{\text{in}}, V_i^{\text{ex}}$ принадлежат $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ и сопряжены при любом фиксированном i .

При $\rho \rightarrow \infty$ они являются формальными асимптотическими решениями (0.9), где функции v_i заменены на $V_i^{\text{in(ex)}}$.

Справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \widetilde{V}_0^{\text{in(ex)}}(\xi) - (+)\pi^{-1}k_0\tau_1(R_0\rho^{-1} + \Pi_0), \\ V_j^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \widetilde{V}_j^{\text{in(ex)}}(\xi) - (+)\pi^{-1}k_0(\tau_{j+1}(R_0\rho^{-1} + \Pi_0) + \tau_1\Pi_j), \\ \Pi_n &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i P_i^{(i+n)}(D_\xi)\rho^{-1}, \quad j \geq 1, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

где ряды $\widetilde{V}_j^{\text{in(ex)}}$ не зависят от τ_{q+1} , $P_i^{(i+q)}(D_y)$ при $q \geq j$,

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_0^{\text{in}}(\xi) &\equiv R_0\psi_0^2, \quad \widetilde{V}_0^{\text{ex}}(\xi) \equiv 0, \\ \widetilde{V}_1^{\text{in}}(\xi) &= \psi_0(R_1(D_x)\psi(0) + R_0(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)) \\ &\quad - 2\tau_1k_0R_0 \lim_{r \rightarrow 0} \left(G^{\text{in}}(x, 0, k_0) - \frac{1}{2\pi r} \right), \quad \alpha_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big|_{x=0}, \\ \widetilde{V}_1^{\text{ex}}(\xi) &= 2\tau_1k_0R_0 \lim_{r \rightarrow 0} \left(G^{\text{ex}}(x, 0, k_0) - \frac{1}{2\pi r} \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если τ_1 , R_0 и R_1 – вещественны, то

$$\text{Im } \widetilde{V}_1^{\text{in}}(\xi) \equiv 0, \quad \text{Im } \widetilde{V}_1^{\text{ex}}(\xi) \equiv 2\tau_1k_0R_0 \text{Im } G^{\text{ex}}(0, 0, k_0).$$

Справедливость последнего утверждения вытекает из очевидной вещественности $G^{\text{in}}(x, 0, k)$ при вещественных k .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из леммы 1.2 следует, что задача согласования рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon)$ с рядом $V_\varepsilon(\xi)$ сводится к вопросу существования решений v_i краевых задач (0.9) таких, что их асимптотики на бесконечности совпадали бы с рядами V_i^{in} и V_i^{ex} при $\xi_3 \geq 0$ и $\xi_3 \leq 0$, соответственно.

Пусть $\mathcal{H}_q$ – множество функций v из $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_\Gamma^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}_\Gamma^3)$ таких, что сумма $v(\xi) + v(\xi_*)$ есть многочлен q -го порядка, $\partial v(\xi)/\partial \xi_3 = 0$ при $\xi \in \Gamma$, а их дифференцируемые на бесконечности асимптотики принадлежат $\widetilde{\mathcal{H}}_q$. Из определения $\mathcal{H}_q$ следует, что асимптотики функции $v \in \mathcal{H}_q$ на бесконечности при $\xi_3 \geq 0$ и $\xi_3 \leq 0$ – сопряжены. Заметим также, что $X_0 \in \mathcal{H}_0$.

Обозначим через Z_j однородные гармонические полиномы степени j , удовлетворяющие условию $\partial Z_j/\partial \xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$.

ЛЕММА 1.3. Пусть $F \in \mathcal{H}_q$ и сопряженные ряды $\tilde{V}^{\text{in}}, \tilde{V}^{\text{ex}} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{q+2}$ являются формальными асимптотическими решениями при $\rho \rightarrow \infty$ уравнения $\Delta V = F$ при $\xi_3 > 0$ и $\xi_3 < 0$, соответственно. Тогда существует единственное решение краевой задачи

$$(1.2) \quad \Delta v = F, \quad \xi \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma,$$

которое принадлежит $\mathcal{H}_{q+2}$ и (одновременно) имеет на бесконечности дифференцируемые асимптотики

$$(1.3) \quad v(\xi) = \tilde{V}^{\text{in(ex)}}(\xi) + (-) \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

Если $F, \tilde{V}^{\text{in}}, \tilde{V}^{\text{ex}}$ – вещественные, то Z_j – также вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbb{R}_\pm^3$ полупространства $\pm \xi_3 > 0$, через $F^\pm$ – сужения F на $\mathbb{R}_\pm^3$, а через $v^\pm$ – решения краевых задач

$$\Delta v^\pm = F, \quad \xi \in \mathbb{R}_\pm^3, \quad \frac{\partial v^\pm}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi_3 = 0,$$

принадлежащие $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}_\pm^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}_\pm^3)$ и имеющие на бесконечности дифференцируемые асимптотики вида

$$V^{+(-)}(\xi) = \tilde{V}^{\text{in(ex)}}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} Z_j^{+(-)}(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

Существование таких решений доказывается обычным способом “вычитания” растущих на бесконечности членов с последующим применением явных формул для решения задачи Неймана в полупространстве (см., например, [39]). Так как $F \in \mathcal{H}_q$, то функция $V(\xi) = v^+(\xi) + v^-(\xi_*)$ является решением краевой задачи

$$\Delta V = R_q, \quad \xi \in \mathbb{R}_+^3, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi_3 = 0,$$

где R_q – некоторый многочлен q -го порядка. Поэтому V – многочлен $(q+2)$ -го порядка, и, следовательно, ряды V^+ и V^- – сопряженные.

Пусть Y – гармоническая вне $\bar{\omega}$ функция, равная $v^+ - v^-$ на ω , убывающая на бесконечности и принадлежащая $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$. Существование такой функции легко показать, представив ее в виде потенциала простого слоя на ω с плотностью, принадлежащей $\dot{H}_{-1/2}(\omega)$ (см. [67]). Тогда по построению функция

$$v(\xi) = v^\pm(\xi) \mp \frac{1}{2} Y(\xi), \quad \pm \xi_3 \geq 0,$$

принадлежит $\mathcal{H}_{q+2}$, является решением (1.2) и имеет асимптотики (1.3).

Пусть $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathcal{H}_{q+2}$ – два решения (1.2), имеющие асимптотики вида (1.3). Проинтегрировав по частям равенство

$$\int_{S(R)} (v^{(1)} - v^{(2)}) \Delta(v^{(1)} - v^{(2)}) d\xi = 0$$

при $R \rightarrow \infty$, получаем, что $v^{(1)} = v^{(2)}$.

Справедливость последнего утверждения леммы – очевидна.

Перейдем к согласованию асимптотических разложений. Обозначим через $v_{\varepsilon, N}(\xi)$ частичные суммы ряда $V_{\varepsilon}(\xi)$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого $N \geq 0$ существуют функция τ_{ε} , имеющая асимптотику (0.7), и ряды V_{ε} , $\psi_{\varepsilon}^{\text{in}}$, $\psi_{\varepsilon}^{\text{ex}}$ такие, что*

$$(1.4) \quad R_0 = \psi_0^{-1}, \quad v_0 = R_0 X_0, \quad \tau_1 = \frac{1}{2k_0} \pi \psi_0^2 c_{\omega},$$

$$(1.5) \quad \text{Im } \tau_2 = -\pi \tau_1 \text{Im } G^{\text{ex}}(0, 0, k_0) c_{\omega},$$

v_q принадлежат $\mathcal{H}_q$, являются решениями (0.9) и при $\rho \rightarrow \infty$ выполняется дифференцируемое равенство

$$(1.6) \quad v_{\varepsilon, N}(\xi) = K_N(\psi_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}}(x, \tau_{\varepsilon})), \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы I.3.1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ обобщенная собственная функция $\Psi_{\varepsilon} \rightarrow \psi$ в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ и $\Psi_{\varepsilon} \rightarrow 0$ в $L_{2, \text{loc}}(\Omega^{\text{ex}})$. С другой стороны, $\psi_{\varepsilon}^{\text{in}}(x, k) \rightarrow R_0 \psi_0 \psi(x)$, $\psi_{\varepsilon}^{\text{ex}}(x, k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow k_0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ на формальном уровне (при почленном переходе к пределу в указанных рядах). Поэтому естественно выбрать R_0 в виде (1.4).

Краевая задача (0.9) для v_0 имеет вид:

$$(1.7) \quad \Delta v_0 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_{\Gamma}^3, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

В силу определения X_0 на бесконечности имеет асимптотики

$$X_0(\xi) = 1 - \frac{1}{2} c_{\omega} \rho^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi) \rho^{-2i-1}, \quad \xi_3 \geq 0,$$

$$X_0(\xi) = \frac{1}{2} c_{\omega} \rho^{-1} - \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi) \rho^{-2i-1}, \quad \xi_3 \leq 0.$$

Пусть v_0 имеет вид (1.4) и τ_{ε} – произвольная функция, имеющая асимптотику (0.7). Тогда $v_0 \in \mathcal{H}_0$ является решением (1.7), и в силу леммы 1.2 при $\rho \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$(1.8) \quad v_0(\xi) - K_0(\psi_{\varepsilon}^{\text{in(ex)}}(x, \tau_{\varepsilon})) \\ = +(-) \left(R_0 \left(\pi^{-1} k_0 \tau_1 - \frac{1}{2} \psi_0^2 c_{\omega} \right) \rho^{-1} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \left(Z_i(\xi) \rho^{-2i-1} + (-1)^i \pi^{-1} k_0 \tau_1 P_i^{(i)}(D_{\xi}) \rho^{-1} \right) \right), \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

Полагая в (1.8) коэффициенты при ρ^{-1} равными нулю, получаем значение (1.4) для τ_1 . Далее, приравнявая к нулю в (1.8) коэффициенты при остальных степенях ρ , определяем $P_i^{(i)}(D_y)$. При этой процедуре используется (и далее будет использоваться) следующее очевидное утверждение.

ЛЕММА 1.4. *Для любого $Z_i(\xi)$ существует полином $P_i(D_\xi)$ такой, что*

$$Z_i(\xi)\rho^{-2i-1} = P_i(D_\xi)\rho^{-1}.$$

Если $\text{Im } Z_i = 0$, то $\text{Im } P_i = 0$.

Таким образом, построены постоянные R_0 , τ_1 , решение $v_0 \in \mathcal{H}_0$ краевой задачи (0.9) в виде (1.4) и полиномы $P_i^{(i)}(D_y)$ (старшие в $R_i(D_y)$) такие, что при $N = 0$ выполнено (1.6).

Заметим, что $P_1^{(1)} = R_1$ удовлетворяет условию следствия леммы 1.2.

Дальнейшее доказательство проводится с использованием метода математической индукции. Пусть при $j \leq q$ существуют решения $v_j \in \mathcal{H}_j$ краевых задач (0.9), постоянные τ_{j+1} и полиномы $P_i^{(i+j)}(D_y)$ такие, что (1.6) выполнено для $N = q$. Тогда в силу лемм 1.2, 1.3 существует решение $v_{q+1} \in \mathcal{H}_{q+1}$ задачи (0.9) такое, что

$$(1.9) \quad v_{q+1}(\xi) - V_{q+1}^{\text{in(ex)}}(\xi) = +(-) \left(\sum_{i=0}^{\infty} Z_i(\xi)\rho^{-2i-1} \right. \\ \left. + \pi^{-1}k_0\tau_{q+2} \left(R_0\rho^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i P_i^{(i)}(D_\xi)\rho^{-1} \right) \right. \\ \left. + \pi^{-1}k_0\tau_1 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i P_i^{(i+q+1)}(D_\xi)\rho^{-1} \right)$$

при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_3 \geq 0$ ($\xi_3 \leq 0$). Приравнявая правую часть (1.9) к нулю, определяем последовательно τ_{q+2} , $P_i^{(i+q+1)}(D_y)$ и получаем, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$(1.10) \quad v_{q+1}(\xi) - V_{q+1}^{\text{in(ex)}}(\xi) = 0, \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

Из (1.10) и справедливости (1.6) при $N = q$ вытекает справедливость (1.6) и при $N = q + 1$.

Осталось показать (1.5). Взяв мнимую часть от (0.9), видим, что краевая задача для $\text{Im } v_1$ имеет вид

$$(1.11) \quad \Delta(\text{Im } v_1) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial(\text{Im } v_1)}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

С другой стороны, в силу следствия леммы 1.2

$$(1.12) \quad \text{Im } \tilde{V}^{\text{ex}} = 2k_0\tau_1 R_0 \text{Im } G^{\text{ex}}(0, 0, k_0), \quad \text{Im } \tilde{V}^{\text{in}} = 0.$$

Из (1.11), (1.12) и леммы 1.3 следует, что

$$(1.13) \quad \text{Im } v_1(\xi) = 2k_0\tau_1 R_0 \text{Im } G^{\text{ex}}(0, 0, k_0) X_0(\xi_*).$$

В свою очередь, из (1.13) и леммы 1.2 получаем, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$(1.14) \quad \begin{aligned} & \operatorname{Im}(v_1(\xi) - V_1^{\text{in(ex)}}(\xi)) \\ &= +(-)k_0 R_0 (\tau_1 \operatorname{Im} G^{\text{ex}}(0, 0, k_0) c_\omega + \pi^{-1} \operatorname{Im} \tau_2) \rho^{-1} + O(\rho^{-2}), \quad \xi_3 \geq 0 \ (\xi_3 \leq 0). \end{aligned}$$

Приравнявая в (1.14) коэффициент при ρ^{-1} , получаем (1.5).

Заметим, что, интегрируя по частям правую часть тождества

$$0 \equiv \operatorname{Im} \int_{\Omega(R)} \overline{G^{\text{ex}}(x, 0, k_0)} (\Delta + k_0^2) G^{\text{ex}}(x, 0, k_0) ds,$$

где $\Omega(R) = S(R) \setminus (S(R^{-1}) \cup \Omega)$, и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем равенство

$$(1.15) \quad \operatorname{Im} G^{\text{ex}}(0, 0, k_0) = k_0 \sigma_\Omega.$$

Пусть $\psi_{\varepsilon, N}^{\text{in(ex)}}(x, k)$ – частичная сумма ряда $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k)$, продолженная нулем в $\Omega^{\text{ex(in)}}$. Обозначим

$$\psi_{\varepsilon, N}(x, k) = (1 - \chi(r\varepsilon^{-1/2}))(\psi_{\varepsilon, N}^{\text{in}}(x, k) + \psi_{\varepsilon, N}^{\text{ex}}(x, k)) + \chi(r\varepsilon^{-1/2})v_{\varepsilon, N}(x/\varepsilon),$$

где, напомним, $\chi(t)$ – бесконечно гладкая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t > 2$ и единице при $t < 1$.

ЛЕММА 1.5. Пусть τ_ε , $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$, $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$, V_ε удовлетворяют утверждениям теоремы 1.2. Тогда

(а) $\psi_{\varepsilon, N}(x, k) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ есть голоморфная функция из $W_{2, \text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, при $\operatorname{Im} k \geq 0$ удовлетворяющая (0.2);

(б) $\psi_{\varepsilon, N}(x, \tau_\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к функции ψ (продолженной нулем в Ω^{ex}) в $L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^3)$;

(в) $\psi_{\varepsilon, N}(x, k)$ является решением краевой задачи

$$(1.16) \quad (\Delta + k^2)u_\varepsilon = F, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где $\operatorname{supp} F \subset S(2\varepsilon^{1/2})$;

(г) $F(x, k) = F_{\varepsilon, N}(x, k)$ – голоморфная функция из $L_2(\mathbb{R}^3)$;

(д) $\|F_{\varepsilon, N}(\cdot, \tau_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leq C_N \varepsilon^{N/2-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждений (а)–(в) вытекает из определения $\psi_{\varepsilon, N}$ и леммы 1.1 и не связана с согласованием (теоремой 1.2).

Для $F_{\varepsilon, N}$ справедливо представление $F_{\varepsilon, N} = F_{\varepsilon, N}^1 + F_{\varepsilon, N}^2$, где

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon, N}^1(x, k) &= \chi(r\varepsilon^{-1/2})(\Delta + k^2)v_{\varepsilon, N}(x/\varepsilon), \\ F_{\varepsilon, N}^2(x, k) &= -(\psi_{\varepsilon, N}^{\text{in}}(x, k) + \psi_{\varepsilon, N}^{\text{ex}}(x, k) - v_{\varepsilon, N}(x/\varepsilon))\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2}) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_{\varepsilon, N}^{\text{in}}(x, k) + \psi_{\varepsilon, N}^{\text{ex}}(x, k) - v_{\varepsilon, N}(x/\varepsilon)) \frac{\partial}{\partial x_i} \chi(r\varepsilon^{-1/2}). \end{aligned}$$

По построению $F_{\varepsilon,N}^2$ и $\chi(r\varepsilon^{-1/2})v_{\varepsilon,N}$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^3)$ и аналитичны по k в некоторой окрестности точки k_0 . В силу (0.9) $\chi(r\varepsilon^{-1/2})\Delta v_{\varepsilon,N} \in L_2(\mathbb{R}^3)$ тоже. Следовательно, верно (г).

Более того, из (0.9) следует, что

$$(1.17) \quad (\Delta + \tau_\varepsilon^2)v_{\varepsilon,N} = \sum_{j=0}^N \beta_j(\varepsilon)v_j(x/\varepsilon), \quad |\beta_j(\varepsilon)| \leq C_N \varepsilon^{N-1}.$$

Учитывая, что $v_j \in \mathcal{H}_j$, из (1.17) легко получить оценку

$$(1.18) \quad \|F_{\varepsilon,N}^1(\cdot, \tau_\varepsilon)\|_{L_2(S(\varepsilon^{1/2}))} \leq C_N \varepsilon^{N/2-1}.$$

С другой стороны, из (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon) - v_{\varepsilon,N}(x/\varepsilon) &= O(r^{N+1} + \varepsilon^{2N+2}r^{-N-1} + \rho^{-N-2} + \varepsilon^N \rho^{-2}), \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon) - v_{\varepsilon,N}(x/\varepsilon)) &= O(r^N + \varepsilon^{2N+2}r^{-N-2} + \varepsilon^{-1}\rho^{-N-3} + \varepsilon^{N-1}\rho^{-3}) \end{aligned}$$

при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$). Следовательно,

$$(1.19) \quad \|F_{\varepsilon,N}^2(\cdot, \tau_\varepsilon)\|_{L_2(S(2\varepsilon^{1/2}) \setminus S(\varepsilon^{1/2}))} \leq C_N \varepsilon^{N/2-1}.$$

Из оценок (1.18) и (1.19) следует (д).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть τ_ε и ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}, \psi_\varepsilon^{\text{ex}}, V_\varepsilon$ удовлетворяют утверждениям теоремы 1.2. Тогда из утверждений леммы 1.5, теоремы I.3.4 и произвола в выборе N следует, что асимптотика полюса, сходящегося к k_0 , совпадает с асимптотикой построенной функции τ_ε , а

$$\psi_{\varepsilon,N}(x, \tau_\varepsilon) = \alpha_{\varepsilon,N}\Psi_\varepsilon(x) + g_{\varepsilon,N}(x),$$

где скаляр $\alpha_{\varepsilon,N} = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и

$$(1.20) \quad \|g_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(S(R) \setminus \Omega)} + \|g_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(R, N)\varepsilon^{N/2-1}.$$

В свою очередь, из (1.20), (1.4), (1.5), (1.15) и регулярности (по k) функции $G^{\text{ex}}(x, 0, k)$ вытекает справедливость утверждений теоремы 1.1 для $\text{Im } \tau_\varepsilon$ и Ψ_ε . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Используемая выше процедура построения асимптотик без каких-либо модификаций может быть применена и для получения асимптотик для размерностей пространств $n \geq 4$ (без обсуждения физического смысла таких задач). Используя вышеприведенный алгоритм построения асимптотик и принимая во внимание, что в этом случае

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\xi) &= c_\omega \rho^{2-n} + O(\rho^{-n+1}), \quad \rho \rightarrow \infty, \\ G^{\text{in}}(x, 0, k) &= (k_0^2 - k^2)^{-1} \psi(x) \psi(0) + 2|\partial S(1)|^{-1} r^{-n+2} + o(r^{-n+3}), \\ G^{\text{ex}}(x, 0, k) &= 2|\partial S(1)|^{-1} r^{-n+2} + o(r^{-n+3}), \quad r \rightarrow 0,\end{aligned}$$

легко получить формальные асимптотики

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \frac{1}{8k_0} \varepsilon^{n-2} |\partial S(1)| \psi_0^2 c_\omega + O(\varepsilon^{n-1}), \\ \text{Im } \tau_\varepsilon &= -\frac{1}{32} \varepsilon^{2n-4} (|\partial S(1)| \psi_0 c_\omega)^2 \sigma_\Omega + O(\varepsilon^{2n-3}),\end{aligned}$$

обоснование которых также не вызывает проблем (см. I.1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Построение формальной асимптотики полюса τ_ε , сходящегося к $k_0 \in \Sigma^{\text{ex}}$, в случае, когда функция Грина предельной внешней задачи имеет вид (1.8), полностью повторяет приведенную выше процедуру (без ненужного в этом случае вычисления $\text{Im } \tau_2$) и, естественно, приводит в формулам (0.7), (0.10) (для $n = 3$). Обоснование этих асимптотик также не вызывает каких-либо существенных сложностей (см. замечание I.3.1).

§ 2.2. Квазистационарный случай

Как уже отмечалось в первой главе, случай $k_0=0$ отличается от остальных случаев. Его особенность заключается в том, что хотя нуль является простым собственным значением предельной внутренней задачи, тем не менее, к нему сходятся (как это будет окончательно доказано в настоящем параграфе) два полюса функции Грина возмущенной задачи. Напомним, что в рассматриваемом случае собственная функция предельной задачи $\psi = |\Omega^{\text{in}}|^{-1/2}$ в Ω^{in} и $\psi=0$ в Ω^{ex} .

Основным содержанием параграфа является

ТЕОРЕМА 2.1. *Существуют ровно два полюса первого порядка $\tau_\varepsilon^{(j)} \in \Sigma_\varepsilon$, $j = 0, 1$, сходящиеся к нулю, симметричные относительно мнимой оси и имеющие следующие асимптотики (выписанные для $\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon^{(0)}$):*

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= \varepsilon^{1/2} (\pi c_\omega)^{1/2} |\Omega^{\text{in}}|^{-1/2} + \varepsilon^{3/2} \tau_3 + O(\varepsilon^2), \\ \text{Im } \tau_\varepsilon &= -\varepsilon^2 \frac{1}{2} (\pi c_\omega)^2 \sigma_\Omega |\Omega^{\text{in}}|^{-1} (1 + O(\varepsilon^{1/2})).\end{aligned}$$

Соответствующая обобщенная собственная функция имеет асимптотики

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon(x) &\sim |\Omega^{\text{in}}|^{-1/2}, \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim |\Omega^{\text{in}}|^{-1/2} X_0(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \varepsilon \pi c_\omega |\Omega^{\text{in}}|^{-1/2} G^{\text{ex}}(x, 0, 0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),\end{aligned}$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$.

Из теоремы 2.1 следует, что пиковому режиму соответствуют вещественные k , представимые в виде

$$k = k(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \tau_1 + \varepsilon^{3/2} \tau_3 + \varepsilon^2 (t + o(1)),$$

где t – любое действительное число. Пусть u_0 – поле, возникающее при рассеянии внешнего поля u^{out} на Ω^{in} , $u = u^{\text{out}} + u_0$. Из утверждений теорем 2.1 и 1.3.5 следует (см. § 1.3), что в пиковых режимах поле u_ε , возникающее при рассеянии внешнего поля u^{out} на Γ_ε , имеет асимптотики

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-3/2} b, & x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-3/2} b X_0(x/\varepsilon), & x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1/2} b \pi c_\omega G^{\text{ex}}(x, 0, k), & x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

где

$$b = \frac{1}{2} \psi(\pi c_\omega)^{1/2} (\tau_4 - t)^{-1} u(0, 0).$$

Отметим, что, в отличие от остальных ситуаций, в квазистационарном случае рассеянное поле в пиковом режиме неограниченно растет и вне резонатора.

Перейдем к построению разложений. Так как из асимптотики полюса τ_ε видно, что его разложение содержит полунечные степени, то в дальнейшем будет удобней перейти к малому параметру $\mu = \varepsilon^{1/2}$, а полную асимптотику полюса строить в виде

$$(2.1) \quad \tau_\varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \tau_j.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_\mu^{\text{in}}(x, k) &= -k^2 \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j R_{[j/2]}^{(j)}(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k), \\ \psi_\mu^{\text{ex}}(x, k) &= k^2 \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j R_{[j/2]}^{(j)}(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k), \end{aligned}$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа,

$$R_j^{(t)}(D_y) = \sum_{i=1}^j P_i^{(t)}(D_y), \quad P_i^{(t)}(D_y) = \sum_{q=0}^i a_{q,i}^{(t)} \frac{\partial^i}{\partial y_1^q \partial y_2^{i-q}}.$$

Как и раньше, полную асимптотику “ненормированной” обобщенной собственной функции ψ_ε будем строить в виде $\psi_\mu^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$ в $\Omega^{\text{in(ex)}}$. В окрестности отверстия будем использовать также стандартное разложение

$$V_\mu(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j v_j(\zeta),$$

где $\zeta = x\mu^{-2}$ (напомним, что $x\varepsilon^{-1} = x\mu^{-2}$). Через $v_{\mu,N}(\zeta)$ будем обозначать частичные суммы этого ряда. Краевые задачи для v_j получаются обычным образом и имеют вид

$$(2.2) \quad \Delta v_j = \sum_{i=2}^{j-4} \lambda_i v_{j-i-4}, \quad \zeta \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial v_j}{\partial \zeta_3} = 0, \quad \zeta \in \Gamma,$$

где λ_i – коэффициенты ряда $\lambda_\mu = \tau_\varepsilon^2$ по степеням μ .

Под оператором $\tilde{K}_N$ понимается оператор, полностью аналогичный K_N , в котором переход от “внешней” переменной x осуществляется к “внутренней” переменной $\zeta = x\mu^{-2}$ с последующим удержанием членов вида $\mu^j \Phi(\zeta)$ для $j \leq N$.

Учитывая, что в рассматриваемом случае ($\psi = \text{const}$) производные функции Грина предельной внутренней задачи не имеют в нуле (по k) полюсов, получаем следующий аналог леммы 1.2.

ЛЕММА 2.1. *Пусть τ_ε – произвольная функция, имеющая асимптотику (2.1). Тогда для любого $N \geq 0$ справедливы равенства*

$$\tilde{K}_N(\psi_\mu^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{i=0}^N \mu^i V_i^{\text{in(ex)}}(\zeta).$$

Сопряженные ряды $V_i^{\text{in}}, V_i^{\text{ex}} \in \widetilde{\mathcal{H}}_i$ являются формальными асимптотическими решениями краевых задач (2.2) при $\rho \rightarrow \infty$, где функции v_i заменены на V_i^{in} и V_i^{ex} , соответственно.

Если к тому же $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 = 0$, а в определении рядов $\psi_\mu^{\text{in}}, \psi_\mu^{\text{ex}}$ полиномы $P_j^{(2j+1)} = 0$, то справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} V_0^{\text{in(ex)}}(\zeta) &= \tilde{V}_0^{\text{in(ex)}} - (+)(2\pi)^{-1} \tau_1^2 (R_0^{(0)} \rho^{-1} + \Pi_0), \\ V_j^{\text{in(ex)}}(\zeta) &= \tilde{V}_j^{\text{in(ex)}}(\zeta) - (+)\pi^{-1} \tau_1 \left(\tau_{j+1} (R_0^{(0)} \rho^{-1} + \Pi_0) + \frac{1}{2} \tau_1 \Pi_j \right), \quad j \geq 2, \\ \Pi_q &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i P_i^{(2i+q)}(D_\zeta) \rho^{-1}, \\ \tilde{V}_0^{\text{in}}(\zeta) &= R_0^{(0)} |\Omega^{\text{in}}|^{-1}, \quad \tilde{V}_0^{\text{ex}}(\zeta) = \tilde{V}_1^{\text{in}}(\zeta) = \tilde{V}_1^{\text{ex}}(\zeta) \equiv 0, \end{aligned}$$

где ряды $\tilde{V}_j^{\text{in,ex}}$ не зависят от τ_{q+1} , $P_i^{(2i+q)}$ при $q \geq j$.

Если к тому же $\text{Im } \tau_1 = \text{Im } R_0^{(0)} = 0$, то

$$(2.3) \quad \text{Im } \tilde{V}_2^{\text{in(ex)}} = \text{Im } \tilde{V}_3^{\text{in}}(\zeta) \equiv 0, \quad \text{Im } \tilde{V}_3^{\text{ex}}(\zeta) = \tau_1^3 R_0^{(0)} \sigma_\Omega.$$

Основное утверждение согласования рядов имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 2.2. *Существуют функция τ_ε , имеющая асимптотику (2.1), и ряды V_μ , ψ_μ^{in} , ψ_μ^{ex} такие, что*

$$(2.4) \quad \begin{aligned} R_0^{(0)} &= |\Omega^{\text{in}}|^{1/2}, & v_0 &= R_0^{(0)} X_0, & \tau_1 &= (\pi c_\omega)^{1/2} |\Omega^{\text{in}}|^{-1/2}, \\ \tau_2 &= \text{Im } \tau_3 = 0, & \text{Im } \tau_4 &= -\frac{1}{2} \pi \tau_1^2 \sigma_\Omega c_\omega, \end{aligned}$$

функции $v_j \in \mathcal{H}_j$ являются решениями (2.2), и для любого $N \geq 0$ при $\rho \rightarrow 0$ справедливо дифференцируемое равенство

$$(2.5) \quad v_{\mu,N}(\zeta) = \tilde{K}_N(\psi_\mu^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)), \quad \zeta_3 \geq 0 \quad (\zeta_3 \leq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбор $R_0^{(0)}$ в соответствии с (2.4) вновь производится из соображений формальной сходимости $\psi_\mu^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon)$ к обобщенной собственной функции предельной внутренней задачи. Далее, определив v_0 и τ_1 согласно (2.4), в силу леммы 2.1 получаем асимптотическое равенство

$$(2.6) \quad v_0(\zeta) - V_0^{\text{in(ex)}}(\zeta) = +(-) \left(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\zeta) \rho^{-2i-1} + (2\pi)^{-1} \tau_1^2 \Pi_0 \right).$$

Приравнявая в (2.6) правую часть к нулю, определяем полиномы $P_i^{(2i)}$ и получаем справедливость (2.5) для $N = 0$. Положив v_1 , τ_2 , $P_i^{(2i+1)}$ равными нулю, согласно лемме 2.1 получаем равенство (2.5) для $N = 1$. Очевидно, что такие v_0 и v_1 являются решениями (2.2). Дальнейшее доказательство проводится по индукции.

Так как по построению

$$\text{Im } \tau_2 = \text{Im } R_0^{(0)} = \text{Im } \Pi_0 = 0,$$

то, учитывая (2.3) и полученное равенство, в силу леммы 2.1 последовательно получаем

$$\text{Im } v_2 = 0 \implies \text{Im } V_2^{\text{in(ex)}} = 0 \implies \text{Im } \tau_3 = 0.$$

Аналогично,

$$\text{Im } v_3^{\text{ex}}(\zeta) = \tau_1^3 R_0^{(0)} \sigma_\Omega X_0(\zeta_*) \implies -\frac{1}{2} \tau_1^3 R_0^{(0)} \sigma_\Omega c_\omega = \pi^{-1} \tau_1 R_0^{(0)} \text{Im } \tau_4.$$

Из последнего равенства следует справедливость (2.4) для $\text{Im } \tau_4$.

Обозначим

$$\psi_{\varepsilon,N}(x, k) = (1 - \chi(r\varepsilon^{-1/2}))(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x, k) + \psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x, k)) + \chi(r\varepsilon^{-1/2})v_{\mu,N}(x/\varepsilon^2),$$

где

$$\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, k) = +(-) k^2 \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} R_{[j/2]}^{(j)}(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, 0, k).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть τ_ε , ψ_μ^{in} , ψ_μ^{ex} , V_μ удовлетворяют утверждениям теоремы 2.2. Тогда для функции $\psi_{\varepsilon,N}(x,k)$ справедливы все утверждения леммы 1.5.

Доказательство этого утверждения повторяет доказательство леммы 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. В силу произвола в выборе N и утверждений леммы 2.2 и пункта (а) теоремы I.3.5 следует, что построенная в теореме 2.2 функция τ_ε имеет совпадающую (степенную) асимптотику с одним из полюсов функции Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$. Так как по построению $\text{Im } \tau_\varepsilon = o(\text{Re } \tau_\varepsilon)$, то выполнено и условие пункта (б) теоремы I.3.5. В свою очередь, из представления функции $\psi_{\varepsilon,N}(x, k)$ в виде, указанном в этом пункте теоремы, утверждения леммы 2.2 и равенства

$$\overline{\tau_\varepsilon} + \tau_\varepsilon = \varepsilon^{1/2}(2\tau_1 + o(1))$$

следует, что

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \psi_{\varepsilon,N}(x, \tau_\varepsilon) &= \psi_\varepsilon + \tilde{\psi}_{\varepsilon,N}, \\ \|\tilde{\psi}_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\tilde{\psi}_{\varepsilon,N}\|_{W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Omega})} &\geq C(N, R)\varepsilon^{(N-3)/2}, \end{aligned}$$

где ψ_ε – обобщенная собственная функция (ненормированная), соответствующая τ_ε . Выбирая в (2.7) число N достаточно большим и учитывая (2.4), получаем справедливость утверждения теоремы для асимптотик обобщенной собственной функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Можно показать, что условие уплощения резонатора в окрестности отверстия не влияет на значения τ_1 , $\text{Im } \tau_{2(3,4)}$, $R_0^{(0)}$. В случае, когда Ω^{in} – шар, а проекция отверстия ω_ε на касательную плоскость – круг, полученное значение τ_1 совпадает со значением этой величины, полученным нестрогими методами еще Рэле-ем [78].

§ 2.3. Расщепление кратного собственного значения

Ниже рассматривается случай, когда k_0^2 – двукратное собственное значение задачи Неймана для $-\Delta$ в Ω , т.е. $k_0 \in \Sigma_2^{\text{in}}$. Пусть $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(1)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции предельной внутренней задачи. В случае достаточно общего положения они одновременно не обращаются в нуль в начале координат (центре сжатия отверстия):

$$(3.1) \quad |\psi^{(0)}(0)| + |\psi^{(1)}(0)| \neq 0.$$

Очевидно, при выполнении условия (3.1) собственные функции $\psi^{(j)}$ можно ортонормировать так, что при $r \rightarrow 0$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \psi^{(0)}(x) &= \psi_{0,0} + \psi_{0,1}x_1 + \psi_{0,2}x_2 + O(r^2), & \psi_{00} &\neq 0, \\ \psi^{(1)}(x) &= \psi_{1,1}x_1 + \psi_{1,2}x_2 + O(r^2). \end{aligned}$$

Всюду ниже будем считать условие (3.1) выполненным, собственные функции выбранными в виде (3.2) и

$$(3.3) \quad \psi_{1,2} = 0, \quad \psi_{1,1} \neq 0.$$

Заметим, что предположение $\psi_{1,2} = 0$ не является ограничивающим, так как его выполнения легко добиться поворотом системы координат вокруг оси Ox_3 .

Пусть $m = 1, 2$, $\tilde{X}_m(\xi)$ – гармонические вне ϖ функции, равные ξ_m на ω , принадлежащие $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ и убывающие при $\rho \rightarrow \infty$. Такие функции существуют [67] и на бесконечности имеют асимптотики

$$\tilde{X}_j(\xi) = c_{j,0}\rho^{-1} + \sum_{i=1}^2 c_{j,i}\xi_i\rho^{-3} \sum_{q=2}^{\infty} Z_q^{(j)}(\xi)\rho^{-2q-1}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где $Z_q^{(j)}$ – однородные гармонические полиномы степени q , удовлетворяющие граничному условию $\partial Z_q^{(j)}/\partial \xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$, а $\tilde{X}_0$ – гармоническая функция из § 2.1. Напомним, что $c_\omega = c_{0,0} > 0$ называется *емкостью* диска ω , и заметим, что постоянные $c_{j,i}$ при $j, i = 1, 2$ называются коэффициентами дипольной формы, ассоциированной с поляризацией [56]. Положим

$$\begin{aligned} X_j(\xi) &= \xi_j - \frac{1}{2}\tilde{X}_j(\xi), \quad \xi_3 \geq 0, \\ X_j(\xi) &= \frac{1}{2}\tilde{X}_j(\xi), \quad \xi_3 \leq 0, \end{aligned} \quad j = 1, 2,$$

и обозначим

$$C_\omega = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_\omega = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,2} \\ c_{1,0} & c_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть

$$\langle \zeta, \sigma^\Omega \zeta \rangle = \sum_{j=0}^2 \sum_{q=0}^2 \sigma_{j,q} \zeta_j \zeta_q$$

– квадратичная форма с компонентами

$$\begin{aligned} \sigma_{q,j} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{\partial S(R)} G_q(x) \overline{G_j(x)} ds, \quad q, j = 0, 1, 2, \\ G_0(x) &= G^{\text{ex}}(x, 0, k_0), \quad G_m(x) = \left. \frac{\partial}{\partial y_m} G^{\text{ex}}(x, y, k_0) \right|_{y=0}, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Заметим, что $\sigma_{0,0} = \sigma_\Omega$.

Основной целью параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть k_0^2 – двукратное собственное значение предельной внутренней задачи. Тогда $G_\varepsilon(x, y, k)$ в окрестности k_0 имеет два полюса первого порядка $\tau_\varepsilon^{(m)}$, $m = 0, 1$. Асимптотики полюсов и соответствующих

обобщенных собственных функций имеют вид

$$(3.4) \quad \tau_\varepsilon^{(m)} = k_0 + \sum_{i=1+2}^{\infty} \varepsilon^i \tau_i^{(m)},$$

$$(3.5) \quad \tau_1^{(0)} = \frac{1}{2k_0} \pi \psi_{0,0}^2 c_\omega,$$

$$\tau_3^{(1)} = \frac{1}{2k_0} \pi \psi_{1,1}^2 c_\omega^{-1} \det C_\omega,$$

$$\operatorname{Im} \tau_\varepsilon^{(m)} = \varepsilon^{2(1+2m)} (\operatorname{Im} \tau_{2(1+2m)}^{(m)} + O(\varepsilon)),$$

$$\operatorname{Im} \tau_2^{(0)} = -\frac{1}{2} (\pi \psi_{0,0} c_\omega)^2 \sigma_\Omega,$$

$$(3.6) \quad \operatorname{Im} \tau_6^{(1)} = -\frac{1}{2} (\pi \psi_{1,1} c_\omega^{-1} \det C_\omega) \langle \vec{\Psi}, \sigma^\Omega \vec{\Psi} \rangle,$$

$$(3.7) \quad \vec{\Psi} = \left(-\psi_{0,0}^{-1} \left(\psi_{0,1} + \frac{\det \tilde{C}_\omega}{\det C_\omega} \psi_{0,2} \right), 1, \frac{\det \tilde{C}_\omega}{\det C_\omega} \right),$$

$$\Psi_\varepsilon^{(m)}(x) \sim \psi^{(m)}(x), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\Psi_\varepsilon^{(m)}(x) \sim \varepsilon^{1+2m} 2k_0 \tau_{1+2m}^{(m)} R_m^{(m)}(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\Psi_\varepsilon^{(m)}(x) \sim \varepsilon^m v_m^{(m)}(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}),$$

$$R_0^{(0)}(D_y) = \psi_{0,0}^{-1}, \quad v_0^{(0)} = \psi_{0,0} X_0,$$

$$(3.8) \quad R_1^{(1)}(D_y) = \psi_{1,1}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\det \tilde{C}_\omega}{\det C_\omega} \frac{\partial}{\partial y_2} - \psi_{0,0}^{-1} \left(\psi_{0,1} + \psi_{0,2} \frac{\det \tilde{C}_\omega}{\det C_\omega} \right) \right),$$

$$(3.9) \quad v_1^{(1)} = \psi_{1,1} (X_1 - c_\omega^{-1} c_{1,0} X_0)$$

в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$.

Очевидно, что указанные в теореме главные члены асимптотик, соответствующие полюсу $\tau_\varepsilon^{(0)}$, а также правые части формул (3.8) и (3.9) – конструктивны (т.е. отличны от нуля). Для того чтобы убедиться в конструктивности и ключевых для случая $m = 1$ коэффициентов (3.5) и (3.6), достаточно показать, что

$$(3.10) \quad \det C_\omega \neq 0, \quad \langle \zeta, \sigma^\Omega \zeta \rangle > 0, \quad \zeta \neq 0.$$

Интегрируя по частям левые части тождеств

$$\int_{S(R) \cap \mathbb{R}_+^3} \tilde{X}_j \Delta \tilde{X}_i d\xi = 0, \quad \int_{S(R) \cap \mathbb{R}_+^3} \tilde{X}_i d\xi = 0, \quad \int_{S(R) \cap \mathbb{R}_+^3} \tilde{\xi}_j \Delta \tilde{X}_i d\xi = 0$$

и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем равенства

$$(3.11) \quad 2\pi c_{i,j} = \int_{\mathbb{R}_+^3} \nabla \tilde{X}_j \nabla \tilde{X}_i d\xi = 0.$$

Так как в силу (3.11) матрица C_ω – симметричная, то существует ортогональная матрица $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^2$ такая, что $\tilde{C} = T' C_\omega T$ – диагональная матрица с компонентами $\tilde{c}_{i,i}$ (штрих означает транспонирование). Положив

$$Y_i = t_{1,i} \tilde{X}_0 + t_{2,i} \tilde{X}_1$$

и проинтегрировав по частям левую часть равенства

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} Y_i \Delta Y_i d\xi = 0,$$

в силу (3.11) получаем, что $2\pi \tilde{c}_{i,i} = \|\nabla Y_i\|_{\mathbb{R}_+^3}^2$. Очевидно, что $Y_i \neq \text{const}$ и $\det T \neq 0$; следовательно, справедливо первое соотношение в (3.10).

Из леммы 1.1 следует, что при $r \rightarrow 0$

$$\text{Im } G_i(x) = b_{i,0} + b_{i,1}x_1 + b_{i,2}x_2 + O(r^2).$$

Интегрируя по частям тождества

$$\text{Im} \int_{\Omega(R)} G_i(\Delta + k^2) G_j dx = 0$$

(где, напомним, $\Omega(R) = S(R) \setminus (S(R^{-1} \cup \Omega))$) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем, что матрица $B_\Omega = (b_{i,j})_{i,j=0}^2$ – симметричная. Пусть $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^3$ – ортогональная матрица такая, что $\tilde{B}_\Omega = T' B_\Omega T$ – диагональная матрица, и

$$G^{(i)} = t_{1,i} G_0 + t_{2,i} G_1 + t_{3,i} G_3.$$

Проинтегрировав по частям тождество

$$\text{Im} \int_{\Omega(R)} G^{(i)} (\Delta + k_0^2) \overline{G^{(i)}} dx = 0$$

при $R \rightarrow \infty$, получаем, что

$$(3.12) \quad \tilde{b}_{i,i} = k_0 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial S(R)} |G^{(i)}|^2 ds,$$

где $b_{i,i}$ – элементы матрицы $\tilde{B}_\Omega$. Так как $G^{(i)}$ – нетривиальное решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию излучения (0.2), то правая часть в (3.12) строго больше нуля [41]. Следовательно, все собственные значения матрицы B_Ω положительны. Наконец, интегрируя по частям тождества

$$\text{Im} \int_{\Omega(R)} G_i(\Delta + k_0^2) \overline{G_j} dx = 0$$

при $R \rightarrow \infty$ и учитывая симметричность матрицы B_Ω , получаем, что

$$(3.13) \quad k_0 \sigma^\Omega = B_\Omega.$$

Из (3.13) вытекает второе соотношение в (3.10).

В свою очередь, доказанная конструктивность формул из теоремы 3.1 позволяет анализировать поведение задачи рассеяния при частотах, близких к k_0 . Из асимптотик $\tau_\varepsilon^{(m)}$ следует, что в рассматриваемом случае существуют два пиковых режима:

$$\begin{aligned} k &= k^{(0)}(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon \tau_1^{(0)} + \varepsilon^2(t + o(1)), \\ k &= k^{(1)}(\varepsilon) = k_0 + \sum_{i=3}^5 \varepsilon^i \tau_i^{(1)} + \varepsilon^6(t + o(1)), \end{aligned}$$

где t – произвольное вещественное число.

Пусть, снова, u_0 – поле, возникающее при рассеянии внешнего поля u^{out} на Ω , $u = u^{\text{out}} + u_0$. Из утверждений теорем 3.1 и I.3.6 следует (см. § 2.1), что в пиковых режимах поле u_ε , возникающее при рассеянии внешнего поля u^{out} на Γ_ε , имеет асимптотики

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1-2m} t_m^{-1} A^{(m)} \psi^{(m)}(x), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1-m} t_m^{-1} A^{(m)} v_m^{(m)}(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim t_m^{-1} 2k_0 \tau_{1+2m}^{(m)} A^{(m)} R_m^{(m)}(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k) + u_0(x, k), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

где

$$t_m = k_0(\tau_{4m+2}^{(m)} - t), \quad A^{(m)} = 2k_0 \tau_{1+2m}^{(m)} R_m^{(m)}(D_x) u(0, k_0).$$

Из приведенных формул следует, что внутри резонатора поле u_ε в пиковых режимах имеет разные порядки роста.

Перейдем к построению асимптотик. Легко видеть, что в рассматриваемом случае функция G^{ex} , по-прежнему, удовлетворяет утверждениям леммы 1.1, а для G^{in} и ее производных при k , близких к k_0 , справедливо представление

$$\begin{aligned} (3.14) \quad P_j(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k) &= \sum_{m=0}^1 \frac{\psi^{(m)}(x) P_j(D_x) \psi^{(m)}(0)}{k_0^2 - k^2} \\ &\quad + \frac{(-1)^j}{2\pi} P_j(D_x) \left(\frac{\cos(kr)}{r} \right) + g_j^{\text{in(ex)}}(x, k), \end{aligned}$$

где g_j^{in} удовлетворяют утверждениям леммы 1.1. Так как $\psi^{(1)}(0) = 0$, а $\psi^{(0)}(0) \neq 0$ согласно предположениям (3.2) и (3.3), то легко видеть, что все утверждения леммы 1.2 сохраняют силу (с заменой ψ_0 на $\psi_{0,0}$). Но тогда, повторяя дословно изложение § 1.1, получаем справедливость следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 3.2. *Утверждения теоремы 1.2 сохраняют силу и в рассматриваемом случае (с заменой в ее формулировке ψ_0 на $\psi_{0,0}$).*

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливы утверждения леммы 1.5.*

Таким образом, асимптотики (пока формальные) полюса $\tau_\varepsilon^{(0)}$ и соответствующей обобщенной собственной функции построены, а их главные члены имеют вид, приведенный в теореме 3.1 (они просто перенесены из теоремы 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Приведенное выше угадывание предельного значения первой обобщенной собственной функции (являющегося ключевым для последующего построения полных разложений как обобщенной собственной функции, так и полюса), вполне возможно, выглядит несколько “механистическим”, а не естественно вытекающим (вместе с предельным значением второй обобщенной собственной функции) из алгебраических соотношений, аналогичных возникающим в теории возмущений (2×2) -матриц. Конечно, такие соотношения можно было бы привести и в рассматриваемой ситуации. Но вывод их, во-первых, заметно удлинил бы содержание этого параграфа, а во-вторых, привел бы к (и так приходящему в голову первым) варианту предельного значения второй обобщенной собственной функции, равному собственной функции, ортогональной пределу первой обобщенной собственной функции, т.е. к $\psi^{(1)}$. По этим причинам мы предпочли “угадать” и второй предел (с последующим построением полных асимптотик и их строгим обоснованием), нежели заниматься дополнительно его “алгебраическим” выводом.

Обозначим

$$\widehat{R}_1(D_y) = \frac{\partial}{\partial y_1} - \psi_{0,0}^{-1} \psi_{0,1}, \quad \widetilde{R}_1(D_y) = \frac{\partial}{\partial y_2} - \psi_{0,0}^{-1} \psi_{0,2}.$$

Из равенств (3.14), (3.2), (3.3) следует, что при $k \rightarrow k_0$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (k_0^2 - k^2) \widehat{R}_1(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k) &= \psi_{1,1} \psi^{(1)}(x) \\ &+ \frac{k^2 - k_0^2}{2\pi} \left(x_1 r^{-3} - \frac{\psi_{0,1}}{\psi_{0,0}} r^{-1} \right) + O(k - k_0), \\ (k_0^2 - k^2) \widetilde{R}_1(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k) &= \frac{k^2 - k_0^2}{2\pi} \left(x_2 r^{-3} - \frac{\psi_{0,2}}{\psi_{0,0}} r^{-1} \right) + O(k - k_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.15) следует, что если

$$R_1(D_y) = \psi_{1,1}^{-1} (\widehat{R}_1(D_y) + t_1 \widetilde{R}_1(D_y)), \quad (3.16)$$

то для любого t_1

$$\begin{aligned} (3.17) \quad (k_0^2 - k^2) R_1(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k) \\ = \psi^{(1)}(x) + \frac{k^2 - k_0^2}{2\pi \psi_{1,1}} \left((x_1 + t_1 x_2) r^{-3} - \frac{\psi_{0,1} + t_1 \psi_{0,2}}{\psi_{0,0}} r^{-1} \right) + O(k - k_0), \quad k \rightarrow k_0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$R_j(D_y) = \sum_{i=0}^j P_i^{(j)}(D_y),$$

$$\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k) = -(+)(k^2 - k_0^2) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i R_{1+i}(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, 0, k).$$

Полное асимптотическое разложение обобщенной собственной функции в $\Omega^{\text{in(ex)}} \setminus S(\varepsilon^{1/2})$ снова будем строить в виде $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$, где τ_ε имеет асимптотику (3.4) для $m = 1$. Так как предполагается, что $\Psi^{(1)} \rightarrow \psi^{(1)}$, то, учитывая (3.17), многочлен R_1 естественно выбрать в виде (3.16).

Всюду далее, для упрощения обозначений индекс $m = 1$ соответствия второму полюсу, по-возможности, опускается.

В окрестности отверстия асимптотика обобщенной собственной функции строится в виде

$$(3.18) \quad V_\varepsilon(x/\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}).$$

Краевые задачи для коэффициентов ряда (3.18) получаются так же, как и (0.9), и в переменных $\xi = x\varepsilon^{-1}$ имеют вид

$$(3.19) \quad \Delta v_j = -k_0^2 v_{j-2} - \sum_{i=3}^{j-3} \lambda_i v_{j-i-2}, \quad x \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial v_j}{\partial \xi_3} = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где λ_i – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2 - k_0^2$.

Из (3.14), (3.15), (3.17) и леммы 1.1 вытекает следующий аналог леммы 1.2.

ЛЕММА 3.1. Пусть произвольная функция τ_ε имеет вид (3.4) (для $m = 1$ и с опущенными верхними индексами). Тогда для любого целого $N \geq 1$ справедливы равенства

$$K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V_i^{\text{in(ex)}}(\xi).$$

Ряды $V_q^{\text{in}}, V_q^{\text{ex}} \in \widetilde{\mathcal{H}}_q$ сопряжены при любых фиксированных q и являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (3.19) при $\rho \rightarrow \infty$, где функции v_q заменены на $V_q^{\text{in(ex)}}$.

Если R_1 имеет вид (3.16), а в представлении остальных многочленов

$$(3.20) \quad P_1^{(j)}(D_y) + P_0^{(j)}(D_y) = \psi_{1,1}^{-1} t_j \widetilde{R}_1(D_y) + \psi_{0,0}^{-2} a_j, \quad j \geq 2,$$

то

$$(3.21) \quad V_1^{\text{in(ex)}}(\xi) = \widetilde{V}_1^{\text{in(ex)}}(\xi) - (+)\pi^{-1} k_0 \tau_3 (\psi_{1,1}^{-1} (\xi_1 + t_1 \xi_2) \rho^{-3} + \Pi_0),$$

$$(3.22) \quad V_j^{\text{in}}(\xi) = \widetilde{V}_j^{\text{in}}(\xi) + a_{j+1} - \pi^{-1} k_0 (\tau_{j+2} \Pi_0 + \tau_3 (t_j \xi_2 \rho^{-3} + \Pi_{j-1})),$$

$$V_j^{\text{ex}}(\xi) = \widetilde{V}_j^{\text{ex}}(\xi) + \pi^{-1} k_0 (\tau_{j+2} \Pi_0 + \tau_3 (t_j \xi_2 \rho^{-3} + \Pi_{j-1})),$$

$$\widetilde{V}_1^{\text{in}}(\xi) = \psi_{1,1} \xi_1 + a_2, \quad \widetilde{V}_1^{\text{ex}}(\xi) = 0,$$

где ряды $\tilde{V}_j^{\text{in(ex)}}$ не зависят от a_{q+1} , t_q , τ_{q+2} , $P_i^{(i+q-1)}$ при $q \geq j$.

Обозначим через $v_{\varepsilon, N}(x/\varepsilon)$ частичные суммы рядов (3.18) и перейдем к согласованию рядов.

ТЕОРЕМА 3.3. *Существуют функция, имеющая асимптотику (3.4) (для $m = 1$), и ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$, $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ и (3.18) такие, что функции $v_q \in \mathcal{H}_q$ являются решениями краевых задач (3.19), для любого $N \geq 1$ при $\rho \rightarrow \infty$ справедливо равенство*

$$(3.23) \quad v_{\varepsilon, N}(\xi) = K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)), \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0),$$

а для коэффициентов этих рядов имеют место формулы (3.5)–(3.9) (с добавлением верхнего индекса $m = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Краевая задача (3.19) для v_1 имеет вид

$$(3.24) \quad \Delta v_1 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

Определим оператор R_1 равенством (3.16) и положим

$$(3.25) \quad v_1 = \psi_{1,1}X_1 + a_2X_0,$$

где постоянные t_1 и a_2 пока не определены. Тогда функция $v_1 \in \mathcal{H}_1$ является решением (3.24), и в силу равенства (3.21) и определения функций X_j при $\rho \rightarrow \infty$ имеем

$$(3.26) \quad \begin{aligned} v_1(\xi) - V_1^{\text{in(ex)}}(\xi) = & - (+) \frac{1}{2} (\psi_{1,1}c_{1,0} + a_2c_{0,0}) \rho^{-1} \\ & + (-) \left(\left(-\frac{1}{2}\psi_{1,1}c_{1,1} - \frac{1}{2}a_2c_{0,1} + \pi^{-1}k_0\tau_3\psi_{1,1}^{-1} \right) \xi_1\rho^{-3} \right. \\ & \left. + \left(-\frac{1}{2}\psi_{1,1}c_{1,2} - \frac{1}{2}a_2c_{0,2} + t_1\pi^{-1}k_0\tau_3\psi_{1,1}^{-1} \right) \xi_2\rho^{-3} \right) \\ & + (-) \sum_{i=2}^{\infty} (Z_i(\xi)\rho^{-2i-1} + \pi^{-1}k_0\tau_3(-1)^i P_i^{(i)}(D_\xi)\rho^{-1}). \end{aligned}$$

Приравнявая в правой части (3.26) к нулю коэффициенты при ρ^{-1} , $\xi_1\rho^{-3}$, $\xi_2\rho^{-3}$, находим

$$(3.27) \quad a_2 = -c_\omega^{-1}c_{1,0}\psi_{1,1},$$

$$(3.28) \quad \tau_3 = \frac{1}{2k_0}\pi\psi_{1,1}(\psi_{1,1}c_{1,1} + a_2c_{0,1}),$$

$$(3.29) \quad t_1 = \frac{1}{2k_0\tau_3}\pi\psi_{1,1}(\psi_{1,1}c_{1,2} + a_2c_{0,2}).$$

Подставляя (3.27) в (3.25), (3.28), (3.29), получаем формулы (3.9), (3.5) и равенство

$$(3.30) \quad t_1 = \frac{\det \tilde{C}_\omega}{\det C_\omega}.$$

Подставляя (3.30) и (3.5) в (3.16), получаем, что

$$(3.31) \quad R_1(D_y) = \psi_{1,1}^{-1} \left(\widehat{R}_1(D_y) + \frac{\det \widetilde{C}_\omega}{\det C_\omega} \widetilde{R}_1(D_y) \right).$$

Из равенства (3.31) и определения операторов $\widehat{R}_1$ и $\widetilde{R}_1$ следует (3.8). Приравнивая к нулю остальные коэффициенты в правой части (3.26), определяем дифференциальные полиномы $P_i^{(i)}$ при $i \geq 2$ и получаем справедливость равенства (3.23) при $N = 1$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции на основе равенства (3.22) и утверждения леммы 1.3 (см. доказательство теоремы 1.2). Легко показать, что на N -м шаге выбором постоянных a_{N+2} , τ_{N+3} , t_{N+1} и полиномов $P_i^{(i+N)}(D_y)$ можно добиться асимптотического равенства при $\rho \rightarrow \infty$:

$$v_{N+1}(\xi) = V_{N+1}^{\text{in(ex)}}(\xi), \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0),$$

откуда и следует равенство (3.23).

Таким образом, для окончательного доказательства теоремы осталось показать справедливость равенства (3.6). Обозначим

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \vec{b}_j &= (b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}), \\ \vec{\Psi} &= (-\psi_{0,0}^{-1}(\psi_{0,1} + t_1 \psi_{0,2}), 1, t_1). \end{aligned}$$

Заметим, что при подстановке (3.29) в (3.32) последнее равенство переходит в (3.7). Повторяя указанную выше схему для мнимых частей, получаем равенства

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \text{Im } v_2 &= \text{Im } \tau_4 = \text{Im } a_3 = \text{Im } t_2 = \text{Im } P_i^{(i+1)}(D_y) = 0, \quad i \geq 2, \\ \text{Im } \widetilde{V}_3^{\text{in}} &= \text{Im } a_4, \quad \text{Im } \widetilde{V}_3^{\text{ex}} = 2k_0 \tau_3 \text{Im } R_1(D_y) G^{\text{ex}}(0, 0, k_0). \end{aligned}$$

Так как $\text{Im } v_2 = 0$, то краевые задачи (3.19) для $\text{Im } v_3$ и $\text{Im } v_4$ имеют вид

$$(3.34) \quad \Delta(\text{Im } v_j) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial(\text{Im } v_j)}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma,$$

и, следовательно, в силу (3.16), (3.32), (3.33) и леммы 1.1

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \text{Im } v_3 &= \text{Im } a_4 = 2k_0 \tau_3 \psi_{1,1}^{-1} \langle \vec{\Psi}, \vec{b}_0 \rangle, \\ \text{Im } \tau_5 &= \text{Im } t_3 = \text{Im } P_i^{(i+2)}(D_y) = 0, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Но на следующем шаге, учитывая равенство (3.35) для $\text{Im } a_4$, имеем

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \text{Im } \widetilde{V}_4^{\text{ex}}(\xi) &= 2k_0 \tau_3 \psi_{1,1}^{-1} (\langle \vec{\Psi}, \vec{b}_1 \rangle \xi_1 + \langle \vec{\Psi}, \vec{b}_2 \rangle \xi_2) + a^{\text{ex}}, \\ \text{Im } \widetilde{V}_4^{\text{in}}(\xi) &= 2k_0 \tau_3 \psi_{1,1}^{-1} \langle \vec{\Psi}, \vec{b}_0 \rangle \psi_{0,0}^{-1} (\psi_{0,1} \xi_1 + \psi_{0,2} \xi_2) + a^{\text{in}}, \end{aligned}$$

где a^{in} и a^{ex} – вполне определенные постоянные. Функция

$$\begin{aligned} \text{Im } v_4(\xi) &= 2k_0\tau_3\psi_{1,1}^{-1} \sum_{i=1}^2 (\langle \vec{\Psi}, \vec{b}_0 \rangle \psi_{0,0}^{-1} \psi_{0,i} X_i(\xi) - \langle \vec{\Psi}, \vec{b}_i \rangle X_i(\xi_*)) + \tilde{a}_5 X_0(\xi) + a^{\text{ex}}, \\ \tilde{a}_5 &= \text{Im } a_5 - a^{\text{ex}} + a^{\text{in}}, \end{aligned}$$

является решением (3.34). В силу (3.36), (3.22) и определения функций X_j справедливы равенства

$$\begin{aligned} (3.37) \quad \text{Im}(v_4(\xi) - V_4^{\text{in(ex)}}(\xi)) &= +(-) \left(\frac{1}{2} (A_1 c_{1,0} + A_2 c_{2,0} - \tilde{a}_5 c_{0,0}) \rho^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} (A_1 c_{1,1} + A_2 c_{2,1} - \tilde{a}_5 c_{0,1}) + \pi^{-1} k_0 \text{Im } \tau_6 \psi_{1,1}^{-1} \right) \xi_1 \rho^{-3} + \alpha \xi_2 \rho^{-3} \right) + O(\rho^{-3}), \end{aligned}$$

$$(3.38) \quad A_i = 2k_0\tau_3\psi_{1,1}^{-1} (\langle \vec{\Psi}, \vec{b}_i \rangle - \langle \vec{\Psi}, \vec{b}_0 \rangle \psi_{0,0}^{-1} \psi_{0,i}).$$

Последовательно приравнявая к нулю коэффициенты при ρ^{-1} и $\xi_1 \rho^{-3}$ в (3.37), находим $\tilde{a}_5$ и

$$(3.39) \quad \text{Im } \tau_6 = -\pi \psi_{1,1} (2k_0 c_\omega)^{-1} \det C_\omega (A_1 + A_2 t_1).$$

Подставляя (3.38), (3.30) и (3.5) в (3.39) и учитывая равенство (3.13), получаем формулу (3.6). Теорема доказана.

Снова определим $\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(x, k)$ как частичные суммы рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k)$, а через $\psi_{\varepsilon,N}(x, k)$ обозначим скомбинированную из них функцию (см. лемму 1.5).

ЛЕММА 3.2. Пусть τ_ε , $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$, $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$, V_ε удовлетворяют утверждениям теоремы 3.3. Тогда справедливы утверждения леммы 1.5.

Доказательство этой леммы вытекает из теоремы 3.3 и повторяет доказательство леммы 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Обозначим через $\psi_{\varepsilon,N}^{(m)}$, $m = 0, 1$, функции $\psi_{\varepsilon,N}$, построенные рядами, удовлетворяющими утверждениям теорем 3.2 и 3.3, а через $F_{\varepsilon,N}^{(m)}$ – им соответствующие функции $F_{\varepsilon,N}$ из формулировки леммы 1.5. Представим $\psi_{\varepsilon,N}^{(m)}(x, k)$ в виде

$$\psi_{\varepsilon,N}^{(m)}(x, k) = \psi_{\varepsilon,N,1}^{(m)}(x, k) + \psi_{\varepsilon,N,2}^{(m)}(x, k),$$

где $\psi_{\varepsilon,N,1}^{(m)}$ – объемный потенциал в $\mathbb{R}^3$ с плотностью $F_{\varepsilon,N}^{(m)}(x, k)$, а $\psi_{\varepsilon,N,2}^{(m)}$ – потенциал двойного слоя с плотностью $\Phi_{\varepsilon,N}^{(m)} = \{\psi_{\varepsilon,N,2}^{(m)}\}$, являющейся решением уравнения

$$A_\varepsilon(k) \Phi_{\varepsilon,N}^{(m)} = f_{\varepsilon,N}^{(m)} \equiv -\frac{\partial \psi_{\varepsilon,N,1}^{(m)}}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon.$$

В силу следствия теоремы 3.2 и леммы 3.2

$$(3.40) \quad \|\psi_{\varepsilon,N,1}^{(m)}(\cdot, \tau_{\varepsilon}^{(m)})\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\psi_{\varepsilon,N,1}^{(m)}(\cdot, \tau_{\varepsilon}^{(m)})\|_{W_2^2(S(R)\setminus\Omega)} = O(\varepsilon^{N/2-1}).$$

Следовательно,

$$(3.41) \quad \|f_{\varepsilon,N}^{(m)}(\cdot, \tau_{\varepsilon}^{(m)})\|_{-1/2, \Gamma_{\varepsilon}} = O(\varepsilon^{N/2-1}).$$

Так как в силу следствия теоремы 3.2, леммы 3.2 и соотношения (3.40)

$$(3.42) \quad \psi_{\varepsilon,N,2}^{(m)}(\cdot, \tau_{\varepsilon}^{(m)}) \rightarrow \psi^{(m)}$$

в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то из (3.40) и (3.41) в силу произвола в выборе N и утверждения пункта (б) теоремы I.3.3 получаем, что существуют два полюса, принадлежащие Σ_{ε} , сходящиеся к k_0 и имеющие асимптотики, совпадающие с построенными в теоремах 3.2 и 3.3 асимптотиками $\tau_{\varepsilon}^{(m)}$. Следовательно, выполнено условие пункта (в) теоремы I.3.3 и справедливо представление

$$\Phi_{\varepsilon,N}^{(m)} = \alpha_{\varepsilon,N}^{(m)} \varphi_{\varepsilon}^{(m)} + g_{\varepsilon,N}^{(m)},$$

где $\varphi_{\varepsilon}^{(m)} \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Gamma_{\varepsilon})$ – нетривиальное решение уравнения

$$B_{\varepsilon}(\tau_{\varepsilon}^{(m)})\varphi_{\varepsilon}^{(m)} = 0.$$

Из асимптотик $\tau_{\varepsilon}^{(m)}$, (3.41) и пункта (в) теоремы I.3.3 вытекает оценка

$$\|g_{\varepsilon,N}^{(m)}\|_{1/2, \Gamma_0} = O(\varepsilon^{N/2-2}),$$

которая вместе с (3.40) и (3.42) обосновывает и построенные асимптотические разложения обобщенных собственных функций $\psi_{\varepsilon}^{(m)}$. Теорема 3.1 доказана полностью.

Подчеркнем, что из вида главных членов асимптотик $\psi_{\varepsilon}^{(m)}$ вытекает выполнение условия пункта (г) теоремы I.3.3. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3.4. *Если имеют место соотношения (3.1)–(3.3), то все условия теоремы I.3.3 выполняются.*

§ 2.4. Вырожденный случай

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда $k_0^2 \neq 0$ является простым собственным значением предельной внутренней задачи, но соответствующая собственная функция обращается в нуль в центре сжатия отверстия ($\psi_0 = \psi(0) = 0$). Легко показать существование области Ω , для которой подобная ситуация реализуется. Интерес к такому вырожденному случаю вызван следующим. Из формулы (0.10) следует, что если $\psi_0 = 0$, то мнимая часть τ_ε имеет больший порядок малости, чем в невырожденном случае $\psi_0 \neq 0$. В свою очередь, это влечет, что в пиковом режиме решение будет иметь больший порядок роста.

При сделанном выше предположении $\psi_0 = 0$ для функции ψ поворотом плоскости $x_3 = 0$ вокруг оси Ox_3 можно добиться того, чтобы в окрестности начала координат была справедлива асимптотика

$$\psi(x) = \psi_1 x_1 + O(r^2).$$

Всюду ниже будем предполагать, что указанный выше поворот системы координат произведен и $\psi_1 \neq 0$. Легко непосредственно убедиться, что попытка искать асимптотики полюса и соответствующей обобщенной собственной функции в форме, предложенной в § 2.1, не удастся именно из-за равенства $\psi_0 = 0$. Как будет видно из приведенных ниже построений, порядки малости $\tau_\varepsilon - k_0$ и $\text{Im } \tau_\varepsilon$ существенно зависят и от значений коэффициентов $c_{i,j}$ в асимптотиках функций X_j на бесконечности. А именно, от выполнения неравенства

$$(4.1) \quad c_{1,0} \neq 0.$$

Если ω – круг с центром в начале координат, то из соображений симметрии легко видеть, что $c_{1,0} = 0$. Однако, также легко видеть, что в случае достаточно общего положения (4.1) выполняется. Например, если ω – единичный круг на плоскости $\xi_3 = 0$ с центром в $(1, 0, 0)$, то легко показать, что $c_{1,0} = c_{0,1} = 2\pi^{-1}$. Поэтому основное внимание в настоящем параграфе уделено случаю, когда неравенство (4.1) имеет место.

Основное утверждение раздела имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 4.1. *При выполнении условия (4.1) для полюса τ_ε , сходящегося при $\varepsilon \rightarrow 0$ к k_0 , и соответствующей обобщенной собственной функции справедливы асимптотики*

$$(4.2) \quad \tau_\varepsilon = k_0 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon^i \tau_i,$$

$$(4.3) \quad \psi_\varepsilon(x) = (k_0^2 - k^2) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} R_i(D_y) G^{\text{in}}(x, 0, k), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$(4.4) \quad \psi_\varepsilon(x) = (k^2 - k_0^2) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} R_i(D_y) G^{\text{ex}}(x, 0, k), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$(4.5) \quad \psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}),$$

где $k = \tau_\varepsilon$,

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \tau_3 &= \frac{1}{2} \pi \psi_1^2 c_{1,1}, & \operatorname{Im} \tau_4 &= -\frac{1}{2} (\pi \psi_1 c_{0,1})^2 \sigma_{0,0}, \\ R_0(D_y) &= \psi_1^{-1} c_{0,1} c_{1,1}^{-1}, & v_1 &= \psi_1 X_1. \end{aligned}$$

Разложения (4.3)–(4.5) равномерны в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$.

Напомним, что обобщенная собственная функция ψ_ε из приведенной выше теоремы и обобщенная собственная функция Ψ_ε из формулировок теорем I.3.1 и I.3.4, вообще говоря, отличаются на скалярный множитель $1 + o(1)$.

Из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Главные члены асимптотики Ψ_ε имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi(x), & x &\in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \pi \psi_1 c_{0,1} G^{\text{ex}}(x, 0, k_0), & x &\in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi_1 X_1(x/\varepsilon), & x &\in S(2\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Из теоремы 4.1 также следует, что пиковому режиму соответствуют вещественные k , представимые в виде

$$k = k(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon^3 \tau_3 + \varepsilon^4 (t + o(1)),$$

где t – любое вещественное число. В свою очередь, следствие теоремы 4.1 и теорема I.3.4 показывают, что в пиковых режимах поле u_ε , возникающее при рассеянии внешнего поля u^{out} на Γ_ε , имеет асимптотики

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-2} T^{-1} \pi \psi_1 c_{0,1} u(0, k_0) \psi(x), & x &\in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} T^{-1} \pi \psi_1^2 c_{0,1} u(0, k_0) X_1(x/\varepsilon), & x &\in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ u_\varepsilon(x, k) &\sim T^{-1} (\pi \psi_1 c_{0,1}^2)^2 u(0, k_0) G^{\text{ex}}(x, 0, k) + u_0(x, k), & x &\in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \end{aligned}$$

где $T = 2k_0(\tau_4 - t)$, u_0 – поле, возникающее при рассеянии внешнего поля u^{out} на Ω , а $u = u^{\text{out}} + u_0$.

Из приведенных формул и (1.1) следует, что в пиковых режимах, соответствующих вырожденному и невырожденному случаям, внутри резонатора поле u_ε имеет разные порядки роста.

Перейдем к построению асимптотик. Краевые задачи для коэффициентов ряда (4.5) получаются так же, как и (0.9), и имеют вид (3.19).

В силу сделанных предположений на ψ для функций Грина при $r \rightarrow 0$, $k \rightarrow k_0$ имеем

$$(4.7) \quad \begin{aligned} G^{\text{in(ex)}}(x, 0, k) &= \frac{1}{2\pi r} + O(1), \\ G_{y_1}^{\text{in}}(x, 0, k) &= \frac{1}{2\pi} x_1 r^{-3} + (k_0^2 - k^2)^{-1} \psi_1^2 x_1 + O\left(1 + \frac{r^2}{|k_0^2 - k^2|}\right), \\ G_{y_2}^{\text{in}}(x, 0, k) &= \frac{1}{2\pi} x_2 r^{-3} + O(1). \end{aligned}$$

Вновь обозначим через $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, k)$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, k)$ ряды (4.3), (4.4), соответственно, где k не заменены на τ_ε .

Из (4.7) и леммы 1.1 вытекает следующий аналог леммы 1.2.

ЛЕММА 4.1. Для любой функции τ_ε , имеющей асимптотику (4.2), рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$, $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ таких, что

$$(4.8) \quad \begin{aligned} R_0 &= \psi_1^{-1} b_0, & R_1(D_y) &= \psi_1^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + t_0 \frac{\partial}{\partial y_2} + b_1 \right), \\ R_j(D_y) &= \sum_{i=2}^j P_i^{(j)}(D_y) + \psi_1^{-1} \left(t_{j-1} \frac{\partial}{\partial y_2} + b_j \right), & j &\geq 2, \end{aligned}$$

и любого целого $N \geq 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V_i^{\text{in(ex)}}(\xi), \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

Ряды V_i^{in} , V_i^{ex} принадлежат $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ и сопряжены при любом фиксированном i .

Они являются формальными асимптотическими решениями задачи (3.19) при $\rho \rightarrow \infty$, где функции v_i заменены на V_i^{in} и V_i^{ex} , соответственно.

Справедливы представления

$$\begin{aligned} V_1^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \widetilde{V}_1^{\text{in(ex)}}(\xi) - (+)\pi^{-1} k_0 \tau_3 (\psi_1^{-1} \xi_1 \rho^{-3} + \Pi_0), \\ V_j^{\text{in(ex)}}(\xi) &= \widetilde{V}_j^{\text{in(ex)}}(\xi) - (+)\pi^{-1} k_0 (\tau_{j+2} (\psi_1^{-1} \xi_1 \rho^{-3} + \Pi_0) + \tau_3 \Pi_{j-1}), \quad j \geq 2, \\ \Pi_n &= \psi_1^{-1} (b_n \rho^{-1} + t_n \xi_2 \rho^{-3}) + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i P_i^{(i+n)}(D_\xi) \rho^{-1}, \\ \widetilde{V}_1^{\text{in}}(\xi) &= \psi_1 \xi_1, \quad \widetilde{V}_1^{\text{ex}}(\xi) = 0, \end{aligned}$$

где ряды $\widetilde{V}_j^{\text{in}}$, $\widetilde{V}_j^{\text{ex}}$ не зависят от τ_{q+2} , $P_i^{(i+q-1)}(D_y)$, b_{q-1} , t_{q-1} при $q \geq j$.

Задача согласования рядов (4.3)–(4.5) вновь свелась к нахождению решений v_j краевых задач (3.19), имеющих при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотики, совпадающие при $\xi_3 \geq 0$ ($\xi_3 \leq 0$) с рядами $V_j^{\text{in(ex)}}$. Достигается указанное совпадение выбором постоянных b_{j-1} , t_{j-1} , τ_{j+2} и дифференциальных полиномов $P_i^{(i+j-1)}(D_y)$.

Обозначим через $V_\varepsilon(\xi)$ ряд (4.5) (где x заменено на $\xi\varepsilon$), а через $v_{\varepsilon, N}$ – его частичные суммы.

ТЕОРЕМА 4.2. Существует функция, имеющая асимптотику (4.2), и ряды V_ε , $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$, $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ такие, что имеют место представления (4.6), v_q принадлежат $\mathcal{H}_q$ и являются решениями задачи (3.19) и для любого $N \geq 1$ при $\rho \rightarrow \infty$ выполняется дифференцируемое равенство

$$(4.9) \quad v_{\varepsilon, N}(\xi) = K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)), \quad \xi_3 \geq 0 \quad (\xi_3 \leq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_1(D_y)$ имеет вид (4.8), где t_0 и b_1 – произвольные постоянные. Тогда в силу (4.7) получаем, что на формальном уровне

$$\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, \tau_\varepsilon) \rightarrow \psi(x), \quad \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \tau_\varepsilon) \rightarrow 0$$

при $\tau_\varepsilon \rightarrow k_0$. Далее, пусть R_0 имеет вид (4.8). Определив функцию v_1 в соответствии с (4.6), получаем, что она удовлетворяет (3.19), и в силу леммы 4.1 при $\rho \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$(4.10) \quad \begin{aligned} v_1(\xi) - V_1^{\text{in(ex)}}(\xi) \\ = +(-)\psi_1 \left(\frac{1}{2}(-c_{1,0}\rho^{-1} - c_{1,1}\xi_1\rho^{-3} - c_{1,2}\xi_2\rho^{-3}) + \sum_{i=2}^{\infty} Z_i^{(1)}(\xi)\rho^{-2i-1} \right) \\ + (-)\pi^{-1}k_0\tau_3 \left(\psi_1^{-1}(b_0\rho^{-1} + \xi_1\rho^{-3} + t_0\xi_2\rho^{-3}) + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i P_i^{(i)}(D_\xi)\rho^{-1} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая в правой части (4.10) к нулю коэффициенты при ρ^{-1} , $\xi_1\rho^{-3}$, $\xi_2\rho^{-3}$, получаем формулу (4.6) для τ_3 и определяем

$$(4.11) \quad b_0 = \frac{1}{2k_0\tau_3}\pi\psi_1^2 c_{1,0}, \quad t_0 = \frac{1}{2k_0\tau_3}\pi\psi_1^2 c_{1,1}.$$

В свою очередь, из (4.11) и (4.8) и значения τ_3 получаем представление (4.6) для R_0 . Приравнявая в правой части (4.10) коэффициенты при остальных степенях, определяем дифференциальные полиномы $P_i^{(i)}(D_y)$ и добиваемся справедливости (4.9) для $N = 1$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции. На q -м шаге определяется решение краевой задачи (3.19), имеющее при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_3 \geq 0$ ($\xi_3 \leq 0$) асимптотики

$$v_q(\xi) = \tilde{V}_q^{\text{in(ex)}}(\xi) + (-)\sum_{i=0}^{\infty} Z_i(\xi)\rho^{-2i-1}.$$

Далее, приравнявая асимптотики на бесконечности функции $v_q(\xi)$ к рядам $V_q^{\text{in(ex)}}$, определяем постоянные τ_{q+2} , b_{q-1} , t_{q-1} , полиномы $P_i^{(i+q-1)}(D_y)$ и, тем самым, добиваемся равенства (4.9) при $N = q$.

Покажем справедливость (4.6) для $\text{Im } \tau_4$. Согласно (3.19) функция $\text{Im } v_2$ является решением краевой задачи

$$\Delta(\text{Im } v_2) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_\Gamma^3, \quad \frac{\partial(\text{Im } v_2)}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

Из построения, проведенного на первом шаге согласования, следует, что

$$\text{Im } \tilde{V}_2^{\text{in}} = 0, \quad \text{Im } \tilde{V}_2^{\text{ex}} = 2k_0\tau_3 R_0 \text{Im } G^{\text{ex}}(0, 0, k_0).$$

Следовательно,

$$\text{Im } v_2(\xi) = 2k_0^2\tau_3 R_0 \sigma_{0,0} X_0(\xi_*).$$

Приравнявая коэффициент при $\xi_1\rho^{-3}$ в асимптотике $\text{Im } v_2$ при $\rho \rightarrow 0$ к соответствующему коэффициенту мнимой части ряда V_2^{in} (или V_2^{ex}) и учитывая найденные значения τ_3 и R_0 , получаем (4.6) и для $\text{Im } \tau_4$.

Доказательство теоремы 4.1 вытекает из теоремы 4.2 и повторяет доказательство теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В случае, когда ω – круг единичного радиуса с центром в начале координат (т.е. $c_{0,1} = 0$), построение асимптотик несколько видоизменяется и представляет собой вариант (упрощенный) вычисления асимптотик $\tau_\varepsilon^{(1)}$ и $\psi_\varepsilon^{(1)}$ из предыдущего параграфа. В результате несложных, но достаточно громоздких вычислений получается, что в этом случае

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \varepsilon^3 \frac{1}{2k_0} (\pi \psi_1^2 c_{1,1} + O(\varepsilon)), \\ \operatorname{Im} \tau_\varepsilon &= -\varepsilon^6 \left(\frac{1}{4} (\pi \psi_1 c_{1,1})^2 \langle \Phi, \tilde{\sigma}^\Omega \Phi \rangle + O(\varepsilon) \right), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi(x), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \psi_1 X_1(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \varepsilon^3 \pi \psi_1^2 c_{1,1} \psi_1^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{c_{0,3} \psi_2}{c_{1,1} \psi_1} \right) G^{\text{ex}}(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),\end{aligned}$$

где

$$\langle \zeta, \tilde{\sigma}^\Omega \zeta \rangle = \sum_{j=0}^1 \sigma_{i,j} \zeta_i \zeta_j, \quad \Phi = (c_{0,3} \psi_2 (c_{1,1} \psi_1)^{-1}, 1),$$

постоянная $c_{0,3}$ – из представления

$$Z_2^{(0)}(\xi) = c_{0,3} \left(\xi_3^2 - \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right)$$

в асимптотике $\tilde{X}_0(\xi)$ на бесконечности, а ψ_2 – коэффициент в ниже приводимом, более полном разложении в нуле собственной функции:

$$\psi(x) = \psi_1 x_1 + \psi_2 \left(x_3^2 - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right) + \psi_{2,1} x_1 x_2 + \psi_{2,2} (x_1^2 - x_2^2) + O(r^3).$$

Из асимптотики Ψ_ε в Ω^{ex} видно, что в рассматриваемом случае (также, как и для $\Psi_\varepsilon^{(1)}$ в предыдущем параграфе) существенную роль играют и производные функции G^{ex} . Естественно, что увеличение порядка малости мнимой части τ_ε приводит к еще большему возрастанию u_ε внутри резонатора в пиковом режиме.

§ 2.5. Асимптотики полюсов для задачи Дирихле и для краевых задач на плоскости

Ниже приводятся (без доказательств) главные члены асимптотик полюсов, сходящихся к простому собственному значению предельной внутренней задачи, и соответствующих обобщенных собственных функций для упомянутых в заглавии параграфа краевых задач. Так как из первой главы следует, что внутри резонатора обобщенная собственная функция сходится к собственной функции предельной задачи, то для экономии места главный член асимптотики Ψ_ε в $\Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2})$ приводиться не будет.

Задача Дирихле в $\mathbb{R}^3$. Обозначим

$$\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \Big|_{x=0}, \quad \sigma_D = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial S(R)} |G_{y_3}^{\text{ex}}(x, 0, k_0)|^2 ds.$$

Предполагается, что $\varphi \neq 0$. Аналогом функции $\tilde{X}$ для рассматриваемой задачи является гармоническая вне $\overline{\omega}$ функция $\tilde{Y}$, принадлежащая $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega})$, убывающая на бесконечности и удовлетворяющая граничному условию $\partial \tilde{Y} / \partial \xi_3 = 1$ на ω . Существование такой функции также известно [67]. При $\rho \rightarrow \infty$ она имеет асимптотику

$$\tilde{Y}(\xi) = -3b_\omega \xi_3 \rho^{-3} + O(\rho^{-3}),$$

где константа $b_\omega > 0$ является аналогом средней виртуальной массы для дисков, имеющих конечную толщину [56]. Положим

$$\begin{aligned} Y(\xi) &= \xi_3 - \frac{1}{2} \tilde{Y}(\xi), \quad \xi_3 \geq 0, \\ Y(\xi) &= \frac{1}{2} \tilde{Y}(\xi), \quad \xi_3 \leq 0. \end{aligned}$$

В этих обозначениях асимптотики полюса и соответствующей обобщенной собственной функции имеют вид (см. [16]):

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon &= k_0 + \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon^j \tau_j, \quad \text{Im } \tau_\varepsilon = \varepsilon^6 \text{Im } \tau_6 + O(\varepsilon^7), \\ \tau_3 &= -\frac{3}{2k_0} \pi \varphi^2 b_\omega, \quad \text{Im } \tau_6 = -\frac{9}{2} (\pi \varphi b_\omega)^2 \sigma_D, \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \varphi Y\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -3\pi \varphi b_\omega \frac{\partial}{\partial y_3} G^{\text{ex}}(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Задачи на плоскости. Далее предполагается, что Ω^{in} – двумерная ограниченная область, совпадающая в окрестности начала координат с полуплоскостью $x_2 > 0$, а отверстием является интервал $(\varepsilon\omega_-, \varepsilon\omega_+)$ на прямой $x_2 = 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} X_0(\xi) &= \tilde{X}_0(\xi/\omega - (\varkappa_\omega, 0)), \\ X_1(\xi) &= \omega \tilde{X}_1(\xi/\omega - (\varkappa_\omega, 0)) + \varkappa_\omega/2, \\ Y_1(\xi) &= \frac{1}{2} \text{Im}(\zeta + ((\zeta - \omega_-)(\zeta - \omega_+))^{1/2}), \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} \text{Im}(\zeta^2 + \zeta((\zeta - \omega_-)(\zeta - \omega_+))^{1/2}) + 2\varkappa_\omega Y_1(\xi), \end{aligned}$$

где $\omega = (\omega_+ - \omega_-)/2$, $\varkappa_\omega = (\omega_+ + \omega_-)/2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$,

$$\tilde{X}_0(\xi) = \text{Re} \ln(\zeta + (\zeta^2 - 1)^{1/2}), \quad \tilde{X}_1(\xi) = \frac{1}{2} \text{Re}(\zeta + (\zeta^2 - 1)^{1/2}).$$

Далее, пусть $G_N(x, y, k)$ ($G_D(x, y, k)$) – функция Грина краевой задачи Неймана (Дирихле) в Ω^{in} . Обозначим

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \psi(0), \quad \psi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(0), \\ \varphi_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \psi(0), \quad \varphi_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \psi(0), \quad \varphi_3 = \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \psi(0), \quad \varphi_4 = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} \psi(0), \\ \sigma_{i,i}^N &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r=R} |g_i^N(x, k_0)|^2 ds, \quad \sigma_{q,j}^D = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{r=R} g_q^D(x, k_0) \overline{g_j^D(x, k_0)} ds, \\ \langle z, \Sigma_D z \rangle &= \sum_{j,i=1}^2 \sigma_{ij}^D z_i \bar{z}_j, \quad a_\omega = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2, \quad b_\omega = \frac{\varkappa_\omega}{2}.\end{aligned}$$

Заметим, что приведенная выше квадратичная форма является положительно определенной.

Для задачи Неймана в невырожденном случае ($\psi_0 \neq 0$) асимптотики имеют вид (см. [32])

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \ln^{-1} \varepsilon \tau_1 + \ln^{-2} \varepsilon \tau_2 + O(\ln^{-3} \varepsilon), \\ \tau_1 &= -\frac{\pi \psi_0^2}{4k_0}, \quad \operatorname{Im} \tau_2 = -\frac{1}{8} (\pi \psi_0)^2 \sigma_{0,0}^N, \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \frac{1}{2} \psi_0 \left(1 - \ln^{-1} \varepsilon X_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -\frac{1}{2} \ln^{-1} \varepsilon \pi \psi_0 G_N(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

В вырожденном случае ($\psi_0 = 0$) при несимметричном отверстии ($\omega_- \neq -\omega_+$) асимптотики имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \varepsilon^2 \tau_{2,0} + \varepsilon^2 \ln^{-1} \varepsilon \tau_{2,1} + \varepsilon^2 \ln^{-2} \varepsilon \tau_{2,2} + O(\varepsilon^2 \ln^{-3} \varepsilon), \\ \tau_{2,0} &= \frac{1}{2k_0} \pi \psi_1^2 a_\omega, \quad \tau_{2,1} = -\frac{1}{k_0} \pi (\psi_1 b_\omega)^2, \quad \operatorname{Im} \tau_{2,2} = -\frac{1}{2} (\pi \psi_1 b_\omega)^2 \sigma_{0,0}^N, \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \varepsilon \psi_1 (X_1(x/\varepsilon) - \ln^{-1} \varepsilon b_\omega X_0(x/\varepsilon)), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -\varepsilon \ln^{-1} \varepsilon \pi \psi_1 b_\omega G_N(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

Для симметричного же отверстия в вырожденном случае задачи Неймана имеют место следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \varepsilon^2 \tau_{2,0} + \varepsilon^4 \ln \varepsilon \tau_{4,1} + \varepsilon^4 \tau_{4,0} + O(\varepsilon^4 \ln^{-1} \varepsilon), \\ \tau_{2,0} &= \frac{1}{2k_0} \pi \psi_1^2 a_\omega, \quad \tau_{4,1} = \frac{1}{2} \pi k_0 \psi_1^2 a_\omega^2, \quad \operatorname{Im} \tau_{4,0} = -\frac{1}{2} (\pi \psi_1 a_\omega)^2 \sigma_{1,1}^N, \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \varepsilon \psi_1 X_1(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \varepsilon^2 \pi \psi_1 a_\omega G_N(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

Далее, в том же порядке приведем асимптотики полюсов и обобщенных собственных функций при граничных условиях Дирихле.

Невырожденный случай [26]:

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \varepsilon^2 \tau_{2,0} + \varepsilon^3 \tau_{3,0} + \varepsilon^4 \ln \varepsilon \tau_{4,1} + \varepsilon^4 \tau_{4,0} + O(\varepsilon^5 \ln \varepsilon), \\ \tau_{2,0} &= -\frac{1}{2k_0} \pi \varphi_1^2 a_\omega, \quad \tau_{3,0} = -\frac{2}{k_0} \pi \varphi_1 \varphi_2 a_\omega b_\omega, \\ \tau_{4,1} &= \frac{1}{2} \pi k_0 \psi_1^2 a_\omega^2, \quad \operatorname{Im} \tau_{4,0} = -\frac{1}{2} (\pi \varphi_1 a_\omega)^2 \sigma_{1,1}^D, \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \varepsilon \varphi_1 Y_1(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -\varepsilon^2 \pi \varphi_1 a_\omega \frac{\partial}{\partial y_2} G_D(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

Вырожденный случай ($\varphi_1 = 0$) с несимметричным отверстием ($\omega_- \neq -\omega_+$):

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \varepsilon^4 \tau_{4,0} + \varepsilon^5 \tau_{5,0} + \varepsilon^6 (\ln \varepsilon \tau_{6,1} + \tau_{6,0}) + O(\varepsilon^7 \ln \varepsilon), \\ \tau_{4,0} &= -\frac{1}{4k_0} \pi \varphi_2^2 a_\omega (a_\omega + 8b_\omega^2), \quad \tau_{5,0} = \frac{2}{3k_0} \pi \varphi_2 \varphi_3 b_\omega a_\omega (a_\omega + 6b_\omega^2), \\ \tau_{6,1} &= 2\pi k_0 (\varphi_2 a_\omega b_\omega)^2, \quad \operatorname{Im} \tau_{6,0} = -2(\pi a_\omega b_\omega \varphi_2)^2 \sigma_{1,1}^D, \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \frac{1}{2} \varepsilon^2 \varphi_2 Y_2(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -\varepsilon^3 2\pi \varphi_2 a_\omega b_\omega \frac{\partial}{\partial y_2} G_1^D(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

Вырожденный случай с симметричным отверстием:

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon &= k_0 + \varepsilon^4 \tau_{4,0} + \varepsilon^6 \tau_{6,0} + \varepsilon^8 (\ln \varepsilon \tau_{8,1} + \tau_{8,0}) + O(\varepsilon^{10} \ln \varepsilon), \\ \tau_{4,0} &= -\frac{1}{4k_0} \pi (\varphi_2 a_\omega)^2, \quad \tau_{6,0} = -\frac{1}{24k_0} \pi a_\omega^3 \varphi_2 (3k_0^2 \varphi_2 + 4\varphi_4), \\ \tau_{8,1} &= \pi \frac{1}{32} k_0^3 a_\omega^4 \varphi_2^2, \quad \operatorname{Im} \tau_{8,0} = -\frac{1}{8} (\pi a_\omega^2)^2 \langle z, \Sigma_D z \rangle, \quad z = (-\varphi_3, \varphi_2), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim \frac{1}{2} \varepsilon^2 \varphi_2 Y_2(x/\varepsilon), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\ \Psi_\varepsilon(x) &\sim -\frac{1}{2} \varepsilon^4 \pi a_\omega^2 \left(\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} G_D(x, 0, k_0) - \varphi_3 \frac{\partial}{\partial y_2} G_D(x, 0, k_0) \right), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Для двумерных задач, аналогично тому, как это сделано в § 2.3, можно показать, что двукратное собственное значение предельной внутренней задачи расщепляется на два полюса. Для случая граничного условия Дирихле и симметричного отверстия эти асимптотики приведены в [22]. Более того, для двумерных задач можно показать, что любое (ненулевое) предельное m -кратное собственное значение обязательно расщепляется на m полюсов первого порядка, без каких-либо ограничений на асимптотики в нуле соответствующих собственных функций (в отличие от размерностей пространств $n \geq 3$). Это явление связано с тем, что для двумерных задач собственные функции предельной задачи можно ортонормировать так, что все они будут иметь разный порядок малости в нуле (в центре сжатия отверстия), и аналогично расщеплению собственных значений для сингулярно возмущенных задач в ограниченной области, описанному в [11], [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Как уже отмечалось выше в замечании I.5.1, доказательство существования полюса, сходящегося к нулю, в двумерной задаче Неймана наталкивается на значительные проблемы, связанные с наличием у функции Грина предельной внешней задачи в нуле логарифмической особенности по спектральному параметру. Эта особенность существенно влияет и на построение формальных асимптотических разложений, которые имеют более нетривиальную структуру, чем в остальных случаях, и не совпадают с асимптотиками, встречающимися в физической литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Агранович М. С. Спектральные свойства задач дифракции // Дополнение к кн. [9]. С. 289–416.
- [2] Агранович М. С. О суммируемости рядов по корневым векторам несамосопряженных эллиптических операторов // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 3. С. 1–12.
- [3] Агранович М. С. О рядах по корневым векторам операторов, очень близких к самосопряженным // Функцион. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. № 4. С. 65–67.
- [4] Арсеньев А. А. Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1971. Т. 12. С. 112–138.
- [5] Арсеньев А. А. О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1976. Т. 16. С. 718–724.
- [6] Бабич В. М. Об аналитическом продолжении резольвенты внешних задач для оператора Лапласа на второй лист // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Вып. 3. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1966. С. 151–157.
- [7] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах // Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984.
- [8] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [9] Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.
- [10] Гадыльшин Р. Р. Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. С. 640–652.
- [11] Гадыльшин Р. Р. Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 42–55.
- [12] Гадыльшин Р. Р. Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны, закрепленной на малом участке границы // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 33. № 3. С. 43–61.
- [13] Гадыльшин Р. Р. Асимптотика второй собственной частоты для системы двух тел, соединенных тонкой перемычкой // ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 68–77.
- [14] Гадыльшин Р. Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
- [15] Гадыльшин Р. Р. Метод сращивания асимптотических разложений в задаче об акустическом резонаторе Гельмгольца // Прикл. матем. и мех. 1992. Т. 56. С. 412–418.
- [16] Гадыльшин Р. Р. О влиянии выбора места отверстия и его формы на свойства акустического резонатора Гельмгольца // ТМФ. 1992. Т. 93. № 1. С. 107–118.
- [17] Гадыльшин Р. Р. О квазистационарном режиме резонатора Гельмгольца // Прикл. матем. и мех. 1993. Т. 57. № 5. С. 54–61.
- [18] Гадыльшин Р. Р. Расщепление полюсов резонатора Гельмгольца // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 44–74.

- [19] Гадыйльшин Р. Р. Сингулярно возмущенная задача для оператора Гельмгольца // Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984. С. 18–35.
- [20] Гадыйльшин Р. Р. Об амплитуде колебаний для резонатора Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. С. 1094–1097.
- [21] Гадыйльшин Р. Р. О квазисобственных частотах резонатора Гельмгольца // Асимптотические решения задач математической физики. Уфа: Изд-во БНЦ УрО АН СССР, 1990. С. 33–49.
- [22] Гадыйльшин Р. Р. О расщеплении полюсов функции Грина для электромагнитного аналога резонатора Гельмгольца // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. С. 2045–2047.
- [23] Гадыйльшин Р. Р. Поверхностные потенциалы и метод сращивания асимптотических разложений в задаче о резонаторе Гельмгольца // УМН. 1991. Т. 46, №6. С. 175–176.
- [24] Гадыйльшин Р. Р. Об аналитическом продолжении функции Грина резонатора Гельмгольца // Асимптотические методы решения дифференциальных уравнений. Уфа: Изд-во БНЦ УрО АН СССР, 1992. С. 18–26.
- [25] Гадыйльшин Р. Р. Рассеяние E -поляризованного поля на идеально проводящей цилиндрической поверхности с узкой щелью // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, №4. С. 10–13.
- [26] Гадыйльшин Р. Р. Поверхностные потенциалы и метод согласования асимптотических разложений в задаче о резонаторе Гельмгольца // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, №2. С. 88–115.
- [27] Гадыйльшин Р. Р. О слипающихся полюсах акустического резонатора // Докл. АН. 1992. Т. 234. С. 773–776.
- [28] Гадыйльшин Р. Р. Резонатор Гельмгольца с малым отверстием // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1992. Т. 32. С. 1446–1457.
- [29] Гадыйльшин Р. Р. О системе вложенных резонаторов // Докл. АН. 1992. Т. 326. С. 939–942.
- [30] Гадыйльшин Р. Р. О полюсах акустического резонатора // Функцион. анализ и его прилож. 1993. Т. 27, №5. С. 3–16.
- [31] Гадыйльшин Р. Р. Двумерный аналог резонатора Гельмгольца с идеально жесткими стенками // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. С. 221–229.
- [32] Гадыйльшин Р. Р. О системе акустических резонаторов в квазистационарном режиме // Прикл. матем. и мех. 1994. Т. 58, №3. С. 104–112.
- [33] Готлиб В. Ю. Рассеяние на круглом резонаторе с узкой щелью как задача теории возмущений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. С. 1109–1113.
- [34] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G -сходимость дифференциальных операторов // УМН. 1979. Т. 34, №5. С. 65–133.
- [35] Зайончковский В., Солонников В. А. О задаче Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в области с ребрами на границе // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 127. С. 7–48.
- [36] Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99. С. 514–537.
- [37] Ильин А. М. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1981. №6. С. 57–82.
- [38] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [39] Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием // Матем. сб. 1977. Т. 103. С. 265–284.
- [40] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [41] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
- [42] Кондратьев В. А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в кусочно-гладкой области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. С. 1831–1843.

- [43] Кондратьев В. А. Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. С. 2026–2032.
- [44] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. № 2. С. 3–76.
- [45] Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств // УМН. 1966. Т. 21. № 2. С. 89–168.
- [46] Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
- [47] Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
- [48] Мазья В. Г., Назаров С. А. Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. С. 347–371.
- [49] Мазья В. Г., Назаров С. А. Пламеневский Б. А. Асимптотика решения задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой // Матем. сб. 1981. Т. 116. С. 187–217.
- [50] Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
- [51] Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1986.
- [52] Назаров С. А. Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочногладкой границей. М.: Наука, 1991.
- [53] Олейник О. А., Чечкин Г. А. О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстроменяющимся типом граничных условий // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 163–164.
- [54] Петрас С. В. О расщеплении серий резонансов на “нефизическом” листе // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9. № 2. С. 89–90.
- [55] Петрас С. В. О расщеплении серий резонансов на “нефизическом листе” // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 155–169.
- [56] Полия Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
- [57] Рэлей Дж. Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955.
- [58] Самарский А. А. О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63. С. 631–634.
- [59] Санчес-Паленсиа Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
- [60] Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.
- [61] Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 167–186.
- [62] Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Труды семинара С. Л. Соболева. № 1. Новосибирск, 1980. С. 113–131.
- [63] Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи рассеяния на цилиндре с большим возмущением // Труды ММО. 1985. Т. 48. С. 150–162.
- [64] Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
- [65] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985.
- [66] Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории диффракции. Киев: Наукова думка 1983.
- [67] Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [68] Beale J. T. Scattering frequencies of resonators // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. P. 549–564.
- [69] Brown R. M., Hislop P. D., Martinez A. Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions // Research report 92-06. University of Kentucky, 1992.
- [70] Fernandez C. Resonances in scattering by a resonator // Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34. P. 115–125.

- [71] Fang Q. Asymptotic behavior and domain-dependency of solutions to a class of reaction-diffusion systems with large diffusion coefficients // Hiroshima Math. J. 1990. V. 20. P. 549–571.
- [72] Gadyl'shin R. R. On acoustic Helmholtz resonator and on its electromagnetic analogue // J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 3464–3481.
- [73] Hislop P. D., Martinez A. Scattering resonances of Helmholtz resonator // Indiana Univ. Math. J. 1991. V. 40. P. 767–788.
- [74] Jimbo S. The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition // J. Differential Equations. 1989. V. 77. P. 322–350.
- [75] Majda A. Outgoing solutions for perturbation of $-\Delta$ with applications to spectral and scattering theory // J. Differential Equations. 1974. V. 16. P. 515–547.
- [76] Miles J. W. Scattering by a spherical cap // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 50. № 2. P. 892–903.
- [77] Ozawa S. Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian // Duke Math. J. 1981. V. 48. P. 767–778.
- [78] Lord Rayleigh. The theory of Helmholtz resonator // Proc. Roy. Soc. London A. 1916. V. 92. P. 265–275.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
E-mail: grr@nkc.bashkiria.su

Поступила в редакцию
18.09.1995