Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 1, 77–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:36:40

УДК 517.3

ОЦЕНКИ С КОНСТАНТАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
КЛАССОВ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ

Д. А. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	77
§ 2. Некоторые основные результаты	85
§ 3. Остаточный член в методе стационарной фазы (С.Ф.)	99
§ 4. Элементарные составные оценки одномерных осциллирующих ин- тегралов	111
§ 5. Примеры	125
Список литературы	147

§ 1. Введение

Исследование *осциллирующих интегралов* (О.И.)

$$(1.1) \quad J[u, \Phi, \Omega] = \int_{\mathbb{R}^n} u e^{i\Omega \Phi} dx$$

посвящена большая литература [1]–[12]. Так как амплитуда и фаза (u и Φ) могут зависеть от дополнительных параметров $t = (t_1, \dots, t_m)$, то различаются две постановки задачи: задача об асимптотическом поведении функционала J при $\Omega \rightarrow \infty$, и в этом случае речь, как правило, идет об оценке при фиксированном значении параметров, и задача о равномерных оценках вида

$$(1.2) \quad |J[u, \Phi, \Omega]| \leq C[u, \Phi] \Omega^{-\alpha}$$

в некоторой области параметров t [2]–[4], [6]–[12].

Для равномерных оценок возникает вопрос об их асимптотической точности при $\Omega \rightarrow \infty$ и явном указании констант $C[u, \Phi]$ в оценках, т.е. вопрос о получении *асимптотически точных оценок с константами*. Решению этого вопроса для простейшего класса О.И. с фазой, имеющей вырождения коранга ≤ 1 , т.е. особенности типа A_k , и посвящена настоящая работа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00767).

Сразу подчеркнем, что на протяжении всей работы о величине Ω и характере зависимости амплитуды и фазы от Ω не делается никаких априорных предположений (кроме предположений о гладкости). Таким образом, как амплитуда, так и фаза могут зависеть от Ω , и возникающие ограничения на возможный характер этой зависимости явно формулируются в виде условий справедливости получаемых оценок.

Необходимость в такого рода оценках возникает, в частности, при рассмотрении функций, задаваемых в виде ряда О.И.

$$(1.3) \quad F(\Omega) = \sum_n J[u_n, \Phi_n, \Omega].$$

Если удастся от ряда $F(\Omega)$ перейти к конечной сумме при $n < \Omega^\gamma$, то приходим к задаче оценки О.И. с фазой и амплитудой, зависящими от Ω . Рассмотрим примеры задач, допускающих редукцию к задаче оценки рядов О.И.

Механизмом такой редукции во всех рассмотренных ниже примерах являются различные варианты формулы Пуассона [13], [14].

Простейшим примером является задача об оценке точности Δ квадратурной формулы вида

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f(p\Delta t)(\Delta t)^n + \Delta.$$

Применение формулы Пуассона дает точную формулу для величины Δ :

$$\Delta = \sum_{p \neq 0} \hat{f}(2\Omega p), \quad p \in \mathbb{Z}^n, \quad \Omega = \frac{\pi}{\Delta t},$$

где $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции f . Для многих интересных случаев величины $\hat{f}(2\Omega p)$ можно записать в виде О.И. с Ω в качестве большого параметра. Идея такого подхода к оценке точности квадратурных формул, конечно, не является новой. Наиболее известной ее реализацией является формула Вороного–Харди в задаче об оценке числа целых точек в круге и ее многомерные обобщения – формулы для числа целых точек в эллипсоидах [14]–[16]. В более общей ситуации эта идея является основной при оценке числа целых точек в многомерных областях [2], [9], [17].

В качестве второго примера рассмотрим задачу о сходимости метода суммирования по шарам для ряда Фурье характеристической функции $\chi_{\mathcal{D}}$ области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{D} \subset (-\pi, \pi]^n$). Эта задача до самого последнего времени не была решена даже в двумерном случае (см. [18], где рассматривается случай характеристической функции шара). Для общего сферически-симметричного метода суммирования, задаваемого функцией $R(|p|)$, задача состоит в оценке величины $\Delta_R^T = f_R^T - \chi_{\mathcal{D}}$, где

$$f_R^T(x) = \sum_p a(p) R(|p|) e^{i\langle p, x \rangle}, \quad a(p) = (2\pi)^{-n} \hat{\chi}_{\mathcal{D}}(-p),$$

$$\langle p, x \rangle = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n, \quad |p| = (p_1^2 + \dots + p_n^2)^{1/2}, \quad p_i \in \mathbb{Z},$$

и, в частности, для суммирования по шарам [19], [20]

$$R(|p|) = \begin{cases} 1, & |p| < \Omega, \\ 0, & |p| > \Omega. \end{cases}$$

Формальное применение формулы Пуассона позволяет записать величину f_R^T в виде

$$f_R^T(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f_R(x - 2\pi p), \quad f_R(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} H_R(x_0 - x) \chi_{\mathcal{D}}(x) dx,$$

где функция H_R определяется из условия $\hat{H}_R(\xi) = R(|\xi|)$. Величина $f_R(x)$ может быть записана в виде О.И. (см. ниже) с Ω в качестве большого параметра, и задача сводится к оценке ряда О.И.

В качестве третьего примера можно привести задачу об оценке точности восстановления характеристической функции $\chi_{\mathcal{D}}$ области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ в томографии [21]–[28]. Речь по существу идет об оценке точности квадратурной формулы для регуляризованного варианта формулы обращения Радона [21], [25], [28]. В работах [27], [28] был предложен подход к этой задаче, основанный на точной формуле для результата восстановления f^A функции $\chi_{\mathcal{D}}$ с помощью алгоритма A . Для широкого класса алгоритмов, используемых на практике, эта формула, полученная с помощью формул Пуассона на прямой и на окружности, имеет вид

$$f^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{n,m} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi_{nm}} u_n^A.$$

При этом фаза Φ_{nm} задается равенством

$$(1.4) \quad \Phi_{nm}(\varphi, \xi, s) = -2Lm\varphi + \langle \xi \vec{l}(s) + 2n\vec{r}, \vec{\eta} \rangle, \\ \vec{l}(s) = \vec{r}(s) - \vec{r}_0, \quad \vec{r}(s) \in \partial\mathcal{D}, \quad \vec{\eta} = (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

где s – натуральный параметр (длина дуги) на границе $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ и L – некоторая константа. Роль большого параметра играет $\Omega = \pi/\Delta q$, Δq – расстояние между прямыми, для которых измеряется преобразование Радона. Заметим, что фаза Φ_{nm} не зависит от выбора алгоритма.

В двух последних примерах речь идет о приближенном восстановлении характеристической функции области $\mathcal{D}$ с границей $\partial\mathcal{D}$. В связи с этим может быть уместно следующее общее замечание. Рассмотрим некоторый метод приближенного восстановления функции $\chi_{\mathcal{D}}$. Ошибка восстановления $\Delta(x, \alpha)$ зависит от точки x ($x \notin \partial\mathcal{D}$), в которой происходит восстановление, и параметра α , задающего точность метода, $\Delta(x, \alpha) \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$. В рассмотренных выше примерах $\alpha = \Omega^{-1}$. Пусть в типичной точке $x \in \mathbb{R}^n$ $\Delta(x, \alpha) \sim \alpha^p$ ($p > 0$). Будем говорить, что $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, если $\Delta(x, \alpha) \sim \alpha^q$, $q \neq p$. Можно рассмотреть вопрос о связи геометрии области M с геометрией границы $\partial\mathcal{D}$. Как будет показано ниже, в задаче обращения двумерного преобразования Фурье с помощью суммирования по кругам M – эволюта границы $\partial\mathcal{D}$. В задаче томографии (в зависимости от алгоритма восстановления) M может быть эволютой $\partial\mathcal{D}$ или объединением касательных прямых, проведенных через точки уплощения $\partial\mathcal{D}$, и всей области точек $x \in \mathbb{R}^2$, через которые нельзя провести касательную к $\partial\mathcal{D}$. В задаче об обращении трехмерного преобразования Фурье M – снова огибающая поверхность семейства нормалей к поверхности $\partial\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$. Объяснение этих геометрических закономерностей связано с возможностью редукции задачи об оценке величины $\Delta(x, \alpha)$ к задаче оценки О.И.

Трудности, возникающие при оценке рядов О.И., по существу связаны с наличием кроме Ω дополнительных больших параметров, нумерующих члены ряда, от которых зависит фаза в О.И. Даже в случае, когда эта фаза имеет только невырожденные критические точки, возникает вопрос о правомерности подстановки асимптотического разложения, получаемого методом стационарной фазы (С.Ф.) для индивидуального О.И., в ряд. Дело в том, что учет высших членов разложения, как правило, приводит к расходящимся рядам. Таким образом, для использования оценок индивидуальных О.И. при оценке суммы ряда необходимо указание констант в оценках.

Основной результат этой работы можно сформулировать следующим образом. *Для многомерных О.И., фаза которых имеет только особенности коранга, меньшего или равного единицы, т.е. особенности типа A_k [29], а амплитуда – гладкая функция с носителем внутри области интегрирования, можно явно указать константы в оценках. Построение этих оценок с константами конструктивно в следующем смысле: для этого построения достаточно уметь решать системы трансцендентных уравнений и вычислять обратную матрицу. Эвклидов объем области в пространстве параметров, где полученные оценки не точны, не превышает величины порядка $\Omega^{-\beta}$, $\beta > 0$.*

Современный подход к равномерным оценкам О.И., который используется, например, в работах [7]–[12], основан на применении методов теории особенностей и плохо приспособлен для получения оценок с константами. Это связано с тем, что для получения таких оценок необходимо явно указать вид замены координат, приводящей фазу к каноническому виду, и размер окрестности критической точки, где эта замена координат существует. Видимо, в силу этого зависимость констант от фазы в равномерных оценках, полученных этим методом, не указывается.

Для фаз с особенностями вида A_k задача об оценках с константами допускает решение, так как она сводится к решению двух задач: задачи об оценке остаточного члена в методе стационарной фазы для многомерных О.И. с фазой, зависящих от большого параметра, и задачи об оценке одномерных О.И. с вырожденными критическими точками. Обе эти задачи и рассматриваются ниже. Сразу отметим, что решение второй задачи в принципе известно, и излагаемые в § 4 результаты являются достаточно простыми следствиями оценок, приведенных в [4]. Заметим, тем не менее, что эти следствия позволили с единой точки зрения подойти к решению ряда известных задач. В частности, они позволили получить наилучшие из известных автору оценок интеграла Пирси и восполнить пробел, имеющийся в работе Рендела [30] об оценке преобразования Фурье характеристической функции двумерной области. Кроме того, удалось получить точные результаты о характере сходимости общего сферически симметричного метода суммирования двумерных интегралов Фурье для характеристических функций областей в $\mathbb{R}^2$. Эти результаты излагаются в § 5.

Излагаемые в этой работе результаты составляют основу решения задачи томографии и задачи о сходимости двумерных рядов Фурье для характеристических функций областей с границей общего положения. Что касается задачи томографии, то удастся не только доказать сходимость ряда томографических алгоритмов, но и описать геометрию артефактов (аналога явлений Гиббса при восстановлении характеристических функций). В задаче о сходимости ряда Фурье этих результатов достаточно, чтобы доказать для областей с границей общего положения сходимость метода суммирования по кругам в двумерном случае и в трехмерном – везде кроме изолированных

точек. Кроме того, при этом получаются оценки скорости сходимости. Этим приложениям будут посвящены отдельные публикации.

Все излагаемые результаты получены при решении задачи томографии, которая и дала мотивировку постановки задач об оценках с константами. В грубых чертах метод оценки с константами для рассматриваемых классов О.И. был изложен в приложении к работе [28]. Именно в силу недостаточной развитости этих оценок в указанной работе удалось получить только предварительные результаты в задаче томографии, что и стимулировало дальнейшее исследование этих оценок.

Заметим, что идея использования формулы Пуассона для оценки точности квадратурных формул продуктивна и в одномерном случае. В частности, эта идея позволила оценить точность квадратурных формул в случае, когда подынтегральная функция сингулярным образом зависит от шага дискретизации. Это, в свою очередь, позволяет в ряде случаев решить задачу об оценке значений обобщенной функции, если основная задана в дискретных точках [33]–[35]. К последней задаче сводится вопрос о сходимости имеющих большой практический интерес алгоритмов решения одномерного уравнения свертки.

Автор искренне благодарен В. П. Паламодову за замечания и конструктивную критику.

Везде ниже для О.И. $J[u, \Phi, \Omega]$ используется сокращенное обозначение $J[u]$.

Как уже указывалось, в этой работе рассматриваются следующие задачи:

- 1) оценки остаточных членов в методе *стационарной фазы* (С.Ф.),
- 2) равномерные оценки одномерных О.И.

Во всех случаях рассматриваются только оценки, позволяющие явно указать константы в них (*оценки с константами*). Такие оценки позволяют рассмотреть случаи, когда фаза и амплитуда в О.И. зависят от дополнительных больших параметров, в том числе и от Ω .

С имеющимися оценками остаточных членов в методе С.Ф. можно ознакомиться по книгам [1], [5]. Приведем результат из [5]. Рассматривается О.И. $J[u]$ вида (1.1).

ТЕОРЕМА 1.1 [5]. Пусть выполнены условия:

- 1) $u \in C_0^{2k}(K)$, $\Phi \in C^{3k+1}(\tilde{K})$, где K – компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\tilde{K}$ – некоторая его открытая окрестность,
- 2) фаза Φ имеет единственную невырожденную критическую точку $x_0 \in K$.

Тогда имеет место разложение

$$(1.5) \quad J[u] = \frac{e^{i\Omega\Phi(x_0) + \frac{i\pi}{4}\kappa_0}}{\Omega^{n/2} |\det \Phi''(x_0)|^{1/2}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{D_j}{\Omega^j} + R_k$$

с оценкой остаточного члена

$$|R_k| \leq C_k[\Phi] \Omega^{-k} \sum_{|\alpha| \leq 2k} \sup |\partial^\alpha u|.$$

При этом $D_j = L_j u$, L_j – явно выписываемый дифференциальный оператор порядка $2j$, действующий на u в точке x_0 и зависящий от $\partial^\alpha \Phi(x_0)$ ($2 \leq |\alpha| \leq 2k+1$), $\Phi''(x_0)$ – матрица вторых производных в точке x_0 (Гессиан), κ_0 – ее индекс.

С технической точки зрения задача, решаемая в §3, состоит в том, чтобы явно указать константу $C_k[\Phi]$. По ходу дела решаются и следующие задачи: каков радиус

окрестности критической точки, дающей основной вклад в интеграл, при каких расстояниях между невырожденными критическими точками и расстояниях критических точек до границы области интегрирования еще остается верным разложение типа (1.5), и как при этом могут расти производные от Φ и u с ростом Ω .

В одномерном случае аналогичная задача решается в § 3 и для вырожденных критических точек. При доказательстве основной теоремы 2.1 используется *подход Хермандера к методу С.Ф.* [5]. Этот подход не использует лемму Морса и наиболее приспособлен для получения оценок с константами. Подчеркнем, что при получении таких оценок о величине Ω не делается никаких априорных предположений. Это приводит к необходимости аккуратного учета вклада в интеграл точек, далеких от критических. Так как градиент $\nabla\Phi$ может быть мал и вдали от критических точек, то оценка $C_k[\Phi]$ требует привлечения информации о поведении величины $\nabla\Phi$ во всей области интегрирования.

В § 4 рассматриваются равномерные оценки одномерных О.И. вида

$$(1.6) \quad J[u] = \int_a^b e^{i\Omega\Phi(x)} u(x) dx.$$

В настоящей работе используется подход к оценкам таких интегралов, идущих от работ Ван дер Корпута и Виноградова [36], [37]. Основу излагаемого в § 4 метода оценок составляют результаты работ Архипова, Карацубы, Чубарикова [3], [4], [38]–[40]. По поводу других результатов, полученных в рамках этого подхода, см. также [41]–[45]. Принципиально вопрос об оценке одномерных О.И. (1.6) решает

ТЕОРЕМА 1.2 [3], [4]. *Пусть фаза Φ имеет производные до n -го порядка включительно, и число участков монотонности $m[\Phi^{(1)}]$ производной $\Phi^{(1)}$ не превосходит M ($m[\Phi^{(1)}] \leq M$). Тогда*

$$(1.7) \quad \left| \int_a^b e^{i\Omega\Phi} dx \right| \leq C(M, n) H^{-1},$$

$$H = \min_{a \leq x \leq b} \left\{ \sum_{r=1}^n (r!)^{-1} |\Phi^{(r)}(x)|^{1/r} \Omega^{1/r} \right\}.$$

Извлечение из (1.7) явных оценок вида (1.2) является непростой задачей, особенно в случае, когда фаза Φ не является полиномом. Заметим, что, например, в задаче томографии возникает О.И. с фазой

$$(1.8) \quad S(s) = \Phi_{nm}(\varphi(s), \xi(s), s) = -2Lm\varphi(s) + 2n\langle \vec{r}_0, \vec{\eta}(s) \rangle,$$

где функция φ определяется из условия $\langle \vec{\eta}, \vec{l} \rangle = 0$.

Метод С.Ф. подсказывает, что при больших Ω основной вклад в величину H дают окрестности критических точек. Это простое замечание позволяет сформулировать метод извлечения из (1.7) асимптотически точных оценок с константами. При этом оказывается, что для этого нужно только уметь решать уравнение $\Phi^{(1)}(x) = 0$ для критических точек и уравнение $\Phi^{(2)}(x) = 0$ для экстремальных точек.

Отметим, что основной член получаемых оценок зависит только от поведения фазы в критических точках и амплитуды – в малых окрестностях этих точек.

Хотя все изложенные в § 4 результаты можно извлечь из теоремы 1.2, при изложении мы будем использовать только более простую теорему 1.3.

ТЕОРЕМА 1.3 [3], [4]. Пусть выполнены условия:

- 1) амплитуда $|u| \leq \bar{u}$, кусочно-монотонна и имеет $m[u]$ участков монотонности,
- 2) фаза Φ имеет $\nu \geq 2$ непрерывных производных и $|\Phi^{(\nu)}(x)| \geq A_\nu > 0$.

Тогда

$$(1.9) \quad |J[u]| \leq \bar{u} \min \left\{ b - a, \frac{24(2\pi)^{1/\nu} m[u]}{(\Omega A_\nu)^{1/\nu}} \right\}.$$

Сформулируем основную задачу, решаемую в §4 с помощью теоремы 1.3. Пусть задан О.И. $J[u]$ (1.6), в котором как амплитуда, так и фаза могут зависеть от m -мерного параметра $t = (t_1, \dots, t_m)$ и, в том числе, от Ω . О величине Ω снова не делается никаких априорных предположений, хотя нас, конечно, интересуют оценки при больших Ω ($\Omega \geq \Omega_0[\Phi]$) и, если имеются две оценки, то первая считается лучше второй, если она лучше при $\Omega \rightarrow \infty$. Оценки ищутся в компактной области параметров, в качестве которой берется шар T единичного диаметра $T = \{t \in \mathbb{R}^m, |t| \leq 0.5\}$.

Основная задача состоит в построении покрытия $T = \bigcup T_k$ такого, что при $t \in T_k$ интеграл (1.6) допускает оценку вида

$$(1.10) \quad |J[u]| \leq C_k[u, \Phi] \Omega^{-\alpha_k} \quad (\Omega \geq \Omega_k[\Phi], \quad t \in T_k, \quad \alpha_k > 0),$$

где $C_k[\Phi]$, $\Omega_k[\Phi]$ — явно указанные константы.

Такого сорта оценки ниже называются *составными*. Задача, в частности, состоит в таком выборе T_k , чтобы оценки (1.10) были максимально точны. При этом *равномерные оценки, включающие специальные функции, не рассматриваются*. Несколько нестрого можно сказать, что решается задача о том, когда в качестве правой части оценки (1.10) можно взять первый член разложения О.И. $J[u]$ по методу С.Ф. При решении этого вопроса выясняется, какие окрестности критических точек дают основной вклад в оценку, при каких расстояниях до каустики оценки все еще определяются вкладом невырожденных критических точек, и, наконец, когда вообще оценка определяется вкладом критических точек. Используемая связь с методом С.Ф. во многих случаях позволяет контролировать точность оценок и устанавливать их неулучшаемость.

Поясним сказанное на простейшем примере *интеграла Эйри*, рассмотренном в §5. Интегралом Эйри будем называть О.И. (1.6) при $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$, $u \in C_0^1$ с фазой $\Phi(x) = x^3/3 - tx$. Составная оценка этого интеграла при $t \geq 0$ имеет вид

$$(1.11) \quad |J[u]| \leq C \cdot \bar{u} m[u] \begin{cases} (t^{1/2} \Omega)^{-1/2}, & t \geq C_1 \Omega^{-2/3}, \\ \Omega^{-1/3}, & t \leq C_2 \Omega^{-2/3}, \quad C_2 > C_1, \end{cases}$$

где $|u| \leq \bar{u}$ и $m[u]$ — число участков монотонности функции u . В то же время равномерная во всей области t асимптотика интеграла Эйри выражается через функцию Эйри Ai и имеет вид (см. [1], [5], [6]) $J[u] \sim C[u] \Omega^{-1/3} \text{Ai}(-t \Omega^{-2/3})$, что и доказывает неулучшаемость оценки (1.11). Обе оценки в (1.11) совпадают с первыми членами разложения по методу С.Ф. и переходят друг в друга при $t \sim \Omega^{-2/3}$. Оценки, обладающие этими свойствами, естественно назвать *согласованными*. В случае общей

фазы построение согласованных оценок во всей области $t \subset T$, по-видимому, невозможно, и задача состоит в получении оценок, максимально близких к согласованным. Отметим, что учет вклада в интеграл точек, далеких от критических, приводит к тому, что все получаемые в § 4 оценки являются составными. Например, для интеграла Эйри нам не удастся сразу доказать справедливость во всей области t оценки вида $|J[u]| \leq C[u](t^{1/2}\Omega)^{-1/2}$. Эта оценка следует из (1.11) в силу согласованности оценок (1.11). В общем случае именно учет вклада точек, далеких от критических, не позволяет нам получить оценку вида

$$(1.12) \quad |J[u]| \leq C[u, \Phi] \sum_{x_c(t)} |\Omega \Phi^{(2)}(x_c(t))|^{-1/2},$$

где $x_c(t)$ – критические точки фазы Φ . Эта оценка доказывается в [9] и повторена в [2]. Заметим, что при предположении ограниченности константы $C[u, \Phi]$ эта оценка явно не верна. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть одномерный О.И., фаза в котором имеет производную $\Phi^{(1)}(x) = x((x - \alpha)^2 + \beta^2)$. В § 5 на этом примере демонстрируется существование в пространстве параметров переходной области, в которой оценка не определяется вкладом критических точек.

Общая структура получаемых составных оценок дается в теореме 2.2.

Результаты §§ 3, 4 в принципе решают задачу об оценках с константами для многомерных О.И., фаза которых имеет простые особенности типа A_k (см. теорему 2.3).

В § 5 рассмотрены примеры, демонстрирующие характер и точность получаемых оценок. В частности, рассмотрена задача об оценке *интеграла Пирси*. Интегралом Пирси мы называем одномерный О.И. (1.6) с фазой $\Phi(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 + bx$. Применение к этому интегралу общего результата [9] приводит к оценке

$$(1.13) \quad |J[u]| \leq C[u] \min\{d(t, \mathcal{K})^{-1/2}|t|^{-1/4}\Omega^{-1/2}, |t|^{-1/6}\Omega^{-1/3}, \Omega^{-1/4}\},$$

где $t = (a, b)$, $|t| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $d(t, \mathcal{K})$ – расстояние от (a, b) до каустики, задаваемой уравнением $A = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} = 0$. В работе [42] для интеграла Пирси получена оценка

$$(1.14) \quad |J[u]| \leq C[u] \left[\Omega^{1/4} + \Omega^{1/3}(|a|^{1/6} + |b|^{1/4}) + \Omega^{1/2} \left(\frac{|A|}{|a| + |A|^{1/3}} \right)^{1/4} \right]^{-1},$$

улучшающая в смысле поведения при $\Omega \rightarrow \infty$ оценку (1.13). Составная оценка, полученная в § 5, улучшает обе эти оценки (см. лемму 2.1).

В § 5 рассмотрена также известная задача об оценке преобразования Фурье $\widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\omega_1, \omega_2)$ характеристической функции $\chi_{\mathcal{D}}$ области $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ [30]–[32], которая сводится к оценке одномерного О.И.

$$(1.15) \quad \widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi) = \frac{i}{\lambda} \int_{\partial \mathcal{D}} e^{i\lambda \langle \vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle} [\vec{\tau}, \vec{\eta}] ds, \quad \omega_1 = \lambda \cos \varphi, \quad \omega_2 = \lambda \sin \varphi, \\ [\vec{\tau}, \vec{\eta}] \equiv \tau_x \eta_y - i_y \eta_x, \quad \vec{\eta} = (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

с величиной λ в качестве большого параметра. Результаты работы Рендела [30] по существу совпадают с оценкой, вытекающей из (1.12). В §5 доказана лемма 2.2, дополняющая и уточняющая результаты [30]. В примере 5.6 приводится решение задачи о характере сходимости общего сферически-симметричного метода суммирования двумерных интегралов Фурье при восстановлении характеристических функций областей с кусочно-гладкой границей. Кроме того, в §5 рассмотрено несколько задач об оценках функций $F(\Omega)$, задаваемых рядами О.И. (1.3), и демонстрируется возникающий здесь эффект зависимости вида оценки от скорости убывания величин $|u_n|$ с ростом n . В последнем примере 5.7 исследуется специальный класс двумерных О.И., возникающих в задаче томографии.

§2. Некоторые основные результаты

В этом параграфе приведены некоторые из доказанных ниже утверждений, дающие достаточное представление о характере основных результатов, и, кроме того, даны почти все определения, используемые в этой работе.

Сразу сформулируем важное для дальнейшего

СОГЛАШЕНИЕ О КОНСТАНТАХ. Все константы, значения которых не указаны, обозначаются буквой C и могут быть эффективно вычислены. Всегда указывается, от каких величин зависит C . Если эти величины не указаны, то C – абсолютная константа. Если константа C входит в условия или результат, сформулированный в виде утверждения (леммы, теоремы), то это означает, что может быть явно указано значение C , при котором этот результат верен. Если в условиях справедливости некоторой оценки фигурируют неравенства типа $f(\Phi, \Omega) \leq 1$ ($f \geq 1$), то они всегда могут быть заменены на $f(\Phi, \Omega) \leq C$ ($f \geq C$) с соответствующим изменением констант в оценках.

2.1. Оценка остаточных членов в методе С.Ф. и формулировка теоремы 2.1. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначается $\langle x, y \rangle$, $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ – норма вектора x и $d(x, M)$ – евклидово расстояние от x до множества $M \subset \mathbb{R}^n$. Используются стандартные обозначения производных с мультииндексами $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ и, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Если $\beta_i \leq \alpha_i$, то $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$, $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$. В этих обозначениях формула Лейбница имеет вид

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \cdot \partial^{\alpha-\beta} v.$$

Рассмотрим n -мерный О.И.

$$(2.1) \quad J[u] = \int_M e^{i\Omega\Phi(x)} u(x) dx \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

по параллелепипеду $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$. Через M^δ обозначается его δ -окрестность: $M^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i - \delta \leq x_i \leq b_i + \delta\}$. Критические точки фазы Φ всегда обозначаются через x_c ($\partial_i \Phi(x_c) = 0$) и $\Phi_c'' = (a_{ik}^c)$ – матрица вторых

производных в точке x_c ($a_{ik}^c = \partial_i \partial_k \Phi(x_c)$). Если точка x_c невырождена ($\det \Phi_c'' \neq 0$), то существует константа $B_c > 0$ такая, что

$$(2.2) \quad |\Phi_c'' y| \geq B_c |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Ниже B_c, B_0 – любые константы такие, что $B_c \leq \|(\Phi_c'')^{-1}\|^{-1}$, $B_c \geq B_0$. Так как для эвклидовой нормы $\|A\|$ n -мерной матрицы $A = (a_{ik})$ имеется оценка

$$\max_{i,k} |a_{ik}| \leq \|A\| \leq n \max_{i,k} |a_{ik}|,$$

то, в частности, можно взять

$$(2.3) \quad B_c = (nb_c)^{-1},$$

где $b_c \geq |b_{ik}^c|$ и b_{ik}^c – элементы матрицы $(\Phi_c'')^{-1}$.

Квадрат нормы градиента $\nabla \Phi$ обозначается через G

$$(2.4) \quad G = \sum_{i=1}^n (\partial_i \Phi)^2,$$

и $\bar{f}_n, \bar{f}^{(n)}$ – константы в оценках

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \bar{f}_n \quad (|\alpha| \leq n), \quad |\partial^\alpha f(x)| \leq \bar{f}^{(n)} \quad (|\alpha| = n), \quad x \in M.$$

Если фиксированы положительные числа $\delta_c \geq \delta_0 > 0$, то, соответственно,

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \bar{f}_{n,c} \quad (|\alpha| \leq n), \quad |\partial^\alpha f(x)| \leq \bar{f}_c^{(n)} \quad (|\alpha| = n), \quad |x - x_0| \leq 2\delta_c,$$

и $\tilde{\Phi}_1$ – любая константа такая, что

$$(2.5) \quad G(x) \geq \tilde{\Phi}_1^2, \quad |x - x_c| \geq \delta_c.$$

Введем класс $\Lambda_{\bar{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, a)$ амплитуд u и фаз Φ , которые рассматриваются в § 3. Будем говорить, что $(u, \Phi) \in \Lambda_{\bar{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, a)$, если при $x \in M^\delta$ выполняются условия:

- 1) при $|\alpha| \leq \bar{\alpha}$ производные $\partial^\alpha u \in L^1$, а при $|\alpha| \leq \bar{\alpha} - 1$ они непрерывны; определены ограниченные функции $v_{|\alpha|} \subset L^1$ такие, что при $|\alpha| \leq \bar{\alpha}$

$$(2.6) \quad |\partial^\alpha u(x)| \leq a^{-|\alpha|} v_{|\alpha|}(x), \quad 0 < a \leq 1,$$

- 2) при $|\alpha| \leq \bar{\alpha}$ производные $\partial^\alpha \Phi$ непрерывны и

$$(2.7) \quad |\partial^\alpha \Phi(x)| \leq \lambda \lambda_1^{|\alpha|} \quad (2 \leq |\alpha| \leq \bar{\alpha}).$$

При $a = 1$ будем говорить, что $(u, \Phi) \in \Lambda_{\overline{\alpha}}(\lambda, \lambda_1)$. Через $\|v\|_m, \overline{v}_{m,c}, \overline{v}_m^c$ ниже обозначаются любые константы такие, что

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \|v_j\|_{L^1} &\leq \|v\|_m \quad (j \leq m), & |v_j(x)| &\leq \overline{v}_{m,c} \quad (j \leq m, |x - x_c| \leq 2\delta_c), \\ & & |v_m(x_c)| &\leq \overline{v}_m^c, \end{aligned}$$

и λ^c, λ_1^c – константы в оценках

$$|\partial^2 \Phi(x)| \leq \lambda^c (\lambda_1^c)^{|\alpha|}, \quad 2 \leq |\alpha| \leq \overline{\alpha}, \quad |x - x_c| \leq 2\delta_c.$$

Область интегрирования M имеет границу $\partial M = \bigcup_k M_k$, $M_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k = a_k \text{ или } x_k = b_k\}$ и $d\hat{x}_k = dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$ – элемент объема на M_k . При интегрировании по частям О.И. типа $J[u]$ естественно возникают степени *оператора* A_Φ

$$(2.9) \quad A_\Phi(f) = \sum_{i=1}^n \partial_i (f G^{-1} \partial_i \Phi),$$

и $J_{\partial M}^P$ – сумма $(n-1)$ -мерных О.И. по ∂M – *вклад границы*

$$(2.10) \quad J_{\partial M}^P[u] = - \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{i}{\Omega} \right)^{p+1} \sum_{k=1}^n \int_{M_k} [A_\Phi^p(u) G^{-1} \cdot \partial_k \Phi \cdot e^{i\Omega \Phi}]_{a_k}^{b_k} d\hat{x}_k.$$

Величина $J_{\partial M}^P$ определена, если $x_c \notin \partial M$ и в (2.10)

$$[f(x)]_{a_k}^{b_k} \equiv f(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k - 0, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k + 0, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Формула интегрирования по частям в этих обозначениях имеет вид

$$(2.11) \quad J[u] = J_{\partial M}^P[u] + \left(\frac{i}{\Omega} \right)^P J[A_\Phi^P(u)],$$

и она верна, если определены величины в ее правой части, т.е. если в носителе $\text{supp } u$ функции u нет критических точек или в этих точках функция u имеет ноль достаточно высокого порядка. Кроме всех указанных величин, при формулировке теоремы 2.1 будут еще использованы *функции* h_c, ψ_μ^c :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} h_c(x) &= \Phi(x) - \Phi(x_c) - \frac{1}{2} \langle \Phi_c'' \Delta x_c, \Delta x_c \rangle \quad (\Delta x_c = x - x_c), \\ \psi_\mu^c(x) &= u(x) (h^c(x))^\mu. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия:

- 1) $(u, \Phi) \in \Lambda_{\overline{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, a)$, все критические точки $x_c \in M$ невырождены, их число $K \leq K_M$ и $x_c \notin \partial M$,
- 2) фиксированы положительные числа $\delta_c \geq \delta_0 > 0$ такие, что

$$(2.13) \quad \begin{aligned} d(x_c, \partial M) &\geq 2\delta_c, \quad 2\delta_c > \delta, \quad \forall x_c \in M^\delta, \\ \delta_c &\leq C_n B_c (\overline{\Phi}_c^{(3)})^{-1}, \\ \lambda_1 \delta_c &\leq 1, \quad \delta_c \leq a. \end{aligned}$$

Тогда для любых таких δ_c и любых целых $P \geq 1$, $N \geq 1$, $k \geq 1$, $r \geq 1$ таких, что

$$(2.14) \quad 3r \geq 2N, \quad \overline{\alpha} \geq \max\{P+1, N+1, 2k+n+1\},$$

О.И. $J[u]$ (2.1) можно представить в виде

$$(2.15) \quad J[u] = \sum_{x_c \in M} J_{kr}^c + J_{\partial M}^P[u] + \Delta_{Nkr}^P[J].$$

В этой формуле J_{kr}^c – вклад критической точки x_c :

$$(2.16) \quad J_{kr}^c = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{n/2} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\kappa_c + i\Omega\Phi(x_c)}}{|\det \Phi_c''|^{1/2}} \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{(i\Omega)^\mu}{\mu!} \sum_{p \geq 1.5\mu}^{k-1} \frac{i^p \langle (\Phi_c'')^{-1} \partial, \partial \rangle^p \psi_\mu^c(x_c)}{2^p p! \Omega^p},$$

где κ_c – индекс матрицы Φ_c'' и $J_{\partial M}^P$ – вклад границы (2.10). Остаточный член $\Delta_{Nkr}^P[J]$ имеет вид

$$(2.17) \quad \Delta_{Nkr}^P[J] = \Delta J_P + \Delta J_{Nr} + \Delta J_{kr},$$

и справедливы оценки

$$(2.18) \quad \begin{aligned} |\Delta J_P| &\leq C_{Pn} \frac{\|v\|_P (K_M + 1)}{(\Omega \widetilde{\Phi}_1 \delta_0)^P} \sum_{j=0}^P \left(\frac{\lambda \lambda_1^2 \delta_0}{\widetilde{\Phi}_1} \right)^j, \\ |\Delta J_{Nr}| &\leq C_{Nrn} \sum_{x_c \in M} \frac{(\lambda^c)^{r+N} (\lambda_1^c)^{3r+2N} \delta_c^{3r-2N+n}}{\Omega^{N-r} B_c^{2N}} \overline{v}_{N,c}, \\ \Delta J_{kr} &\leq \begin{cases} \frac{C_{krn}}{\Omega^{n/2}} \sum_{x_c \in M} \frac{(\lambda^c)^{r-1} \overline{v}_{2k+n+1,c}}{\Omega^{k-r+1} B_c^k |\det \Phi_c''|^{1/2} \delta_c^{2k}} & (\lambda^c \Omega \geq 1), \\ \frac{C_{krn}}{\Omega^{n/2+k}} \sum_{x_c \in M} \frac{\overline{v}_{2k+n+1,c}}{B_c^k |\det \Phi_c''|^{1/2}} & (\lambda^c \Omega \leq 1). \end{cases} \end{aligned}$$

В качестве величины $\widetilde{\Phi}_1$ (2.5), которая входит в ΔJ_P – оценку вклада точек, далеких от критических, можно взять

$$(2.19) \quad \widetilde{\Phi}_1 = \min_{x_c, x_{ex}} \left\{ 0.5 B_c \delta_c, G(x_{ex})^{1/2}, \min_{x \in \partial M} G(x)^{1/2} \right\},$$

где x_{ex} — экстремальные точки функции G

$$(2.20) \quad \nabla G(x_{ex}) = 0, \quad x_{ex} \neq x_c.$$

Будем говорить, что величины δ_c достаточны малы, если минимум величины G (2.4) при $|x - x_c| \geq \delta_c$ достигается на одной из сфер $|x - x_c| \leq \delta_c$. В этом случае можно взять в (2.18)

$$(2.21) \quad \tilde{\Phi}_1 = 0.5 \cdot B_0 \delta_0.$$

Из (2.19) следует, что величины δ_c достаточны малы, если выполняются условия

$$(2.22) \quad 0.5 B_c \delta_c \leq G(x_{ex})^{1/2}, \quad 0.5 B_c \delta_c \leq \min_{x \in \partial M} G(x)^{1/2} \quad (\forall x_c, x_{ex}).$$

Введем величины

$$(2.23) \quad D_q^c = \sum_{\mu=0}^{2q} b_{\mu, \mu+q}^c, \quad \bar{\lambda}_1^c = \max(\lambda_1^c, a^{-1}),$$

$$b_{\mu, p}^c = \frac{i^{p+\mu}}{\mu! p! 2^p} (\langle (\Phi_c'')^{-1} \partial, \partial \rangle^p \psi_\mu^c)(x_c).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть выполнены условие 1) теоремы 2.1 и следующие условия:

2) величины

$$(2.24) \quad \delta_c = \delta_0 = C_n \Omega^{-(1-\varepsilon_1)/2} \lambda^{1/2} \lambda_1 B_0^{-1} \quad (\varepsilon_1 > 0)$$

достаточно малы и $d(x_c, \partial M) \geq 2\delta_0$, $\delta_0 < a$,

3) существуют не зависящие от Ω константы $\theta_i \geq 0$ такие, что

$$(2.25) \quad \|v\|_{\bar{\alpha}} \leq \Omega^{\theta_1}, \quad \bar{v}_{\bar{\alpha}, c} \leq \Omega^{\theta_2}, \quad \lambda_c \leq \Omega^{\theta_3}, \quad K_M \leq \Omega^{\theta_4},$$

4) величины λ , λ_1 , Ω , B_c , λ^c , $\bar{\lambda}_1^c$ удовлетворяют условиям

$$(2.26) \quad \lambda_1 \geq 1, \quad \lambda^c \Omega \geq 1, \quad \Omega \geq 1,$$

$$\lambda^5 \lambda_1^{12} B_0^{-6} \leq \Omega^{1-\varepsilon_2},$$

$$(\lambda^c)^2 (\bar{\lambda}_1^c)^6 B_c^{-3} \leq \Omega, \quad \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1,$$

5) целые числа P , N , k , r определяются из соотношений

$$(2.27) \quad P \geq [(T + \theta_1) \varepsilon_1^{-1}] + 1, \quad N = 3q, \quad r = 2q,$$

$$q \geq [(T + \theta_2 + \theta_4) \varepsilon_2^{-1}] + 1,$$

$$k \geq [(2\theta_3 + 2 + \varepsilon_2)(T + \theta_2 + \theta_4)(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-1}] + 1,$$

где T — любое фиксированное число.

Тогда при $\delta_c = \delta_0$, $B_c = B_0$, $\bar{\alpha} \geq \alpha(T, \theta_i, \varepsilon_i)$ выполнены все условия теоремы 2.1 и для любых ε_i , θ_i , T , P , q , удовлетворяющих условиям (2.24)–(2.27), и любого целого числа Q такого, что

$$Q \leq \left\lfloor \frac{1}{3}(k-1) \right\rfloor, \quad Q \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(r-1) \right\rfloor,$$

О.И. $J[u]$ (2.1) можно представить в виде

$$(2.28) \quad J[u] = \sum_{x_c} J_c^Q + \Delta J_{QT} + J_{\partial M}^P[u].$$

При этом

$$(2.29) \quad J_c^Q = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{n/2} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\kappa_c + i\Omega\Phi(x_c)}}{|\det \Phi_c''|^{1/2}} \sum_{q=0}^Q \frac{D_q^c}{\Omega^q},$$

где величины D_q^c определены в (2.23) и справедливы оценки

$$(2.30) \quad |\Delta J_{QT}| \leq C_n(Q, T, \varepsilon_i, \theta_i) \left[\Omega^{-T} + \sum_{x_c} \frac{\bar{v}_{2k-2}^c}{\Omega^{n/2} |\det \Phi_c''|^{1/2}} \left(\frac{(\lambda^c)^2 (\bar{\lambda}_1^c)^6}{B_c^3 \Omega} \right)^{Q+1} \right],$$

$$(2.31) \quad |D_q^c| \leq C_{nq} \bar{v}_{6q}^c \left(\frac{(\lambda^c)^2 (\bar{\lambda}_1^c)^6}{B_c^3} \right)^q.$$

2.2. Элементарные составные оценки одномерных О.И., теоремы 2.2, 2.3.

В §4 рассматриваются одномерные О.И. (1.6) и доказывается теорема 2.3 об оценках многомерного интеграла (2.1), фаза которого имеет только особенности типа A_k . Фаза и амплитуда всегда могут зависеть от m -мерного параметра, и эта зависимость часто явно не указывается.

Рассмотрим оценки для одномерного О.И. (1.6). В пространстве параметров $\mathbb{R}^m$ предполагается заданной эвклидова норма $|t|$, и оценки рассматриваются в шаре T единичного диаметра. Через $d(t, U)$ обозначается эвклидово расстояние от t до множества $U \subset \mathbb{R}^m$. В оценках используются константы, введенные выше, и обозначения

$$\Phi^{(\nu)} = \left(\frac{d}{dx} \right)^\nu \Phi, \quad \partial_k \Phi^{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial t_k} (\Phi^{(\nu)}).$$

Предполагается, что при $t \in T$, $x \in [a - \delta, b + \delta]$ амплитуда и фаза в интеграле (1.6) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) амплитуда $u \in L^1$, кусочно-дифференцируема и продолжена нулем с интервала $[a, b]$ на интервал $[a - \delta, b + \delta]$,
- 2) фаза Φ имеет по крайней мере три непрерывных производных $\Phi^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, 3$, и конечное число $K(t) \leq \bar{K}$ критических точек $x_c \equiv x_c(t) \subset [a - \delta, b + \delta]$, кратности которых ограничены:

$$(2.32) \quad \Phi^{(1)}(x_c) = 0, \dots, \Phi^{(\nu_c-1)}(x_c) = 0, \quad \Phi^{(\nu_c)}(x_c) \neq 0, \quad \nu_c \leq \bar{\nu}.$$

Оценки проводятся для *трех классов амплитуд и фаз*. Эти классы обозначаются, соответственно, $\{m, M\}$, $L_M^1(n_1, n_2)$, $L^1(n_1, n_2, n_3)$. Будем говорить, что $(u, \Phi) \in \{m, M\}$, если при $t \in T$ выполняются условия 1), 2) и целые числа $m[u]$, $m[\Phi^{(1)}]$ участков монотонности функций $u, \Phi^{(1)}$ на интервале $[a - \delta, b + \delta]$ ограничены: $m[u] \leq m$, $m[\Phi^{(1)}] \leq M$.

Если амплитуда u имеет в точке $x_n \in [a - \delta, b + \delta]$ разрыв первого рода, то $\Delta_n = u(x_n + 0) - u(x_n - 0)$ – скачок к функции u в точке x_n .

Скажем, что $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1, n_2)$, если при $t \in T$ выполнены условия 1), 2) и, кроме того,

$$u^{(1)} \in L^1, \quad \|u^{(1)}\|_{L^1} \leq n_1, \quad \sum_n |\Delta_n| \leq n_2, \quad m[\Phi^{(1)}] \leq M.$$

И, наконец, $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$, если при $t \in T$ выполнены условия 1), 2) и $u^{(1)} \in L^1$, $\Phi^{(2)} \in L^1$,

$$\|u^{(1)}\|_{L^1} \leq n_1, \quad \sum_n |\Delta_n| \leq n_2, \quad \|\Phi^{(2)}\|_{L^1} \leq n_3.$$

Норма в L^1 везде берется по интервалу $[a, b]$.

По определению *каустика* $\mathcal{K} = \mathcal{K}[\Phi]$ – это множество $\mathcal{K} \subset T$ такое, что при $t \in \mathcal{K}$ фаза Φ имеет вырожденные критические точки x_c ($\nu_c \geq 3$). Каустика $\mathcal{K}$ – стратифицированное многообразие [29], каждый страт $\mathcal{K}_\alpha$ которого характеризуется числом K_α и кратностями $\nu_\alpha - 1$ критических точек $x_c(t)$, $t \in \mathcal{K}_\alpha$. Страты $\mathcal{K}_\alpha$ по определению считаются непересекающимися гладкими многообразиями. Мы, кроме того, будем считать их связными. Если $\mathcal{K}_\beta \subset \partial \mathcal{K}_\alpha$ (∂ – операция взятия границы), то для краткости будем писать $\beta \subset \partial \alpha$.

Покрывание каустики $\mathcal{K}^h \supset \mathcal{K}$ назовем *правильным*, если

$$(2.33) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}^h &= \bigcup_\alpha \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}, \\ \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha} \cap \mathcal{K}_\beta^{h_\beta} &= \emptyset, \text{ если } \alpha \not\subset \partial \beta \text{ и } \beta \not\subset \partial \alpha, \\ \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha} &= \{t \in T \mid d(t, \mathcal{K}_\alpha) \leq h_\alpha, d(t, \mathcal{K}_\beta) \geq h_\alpha^1 \ \forall \beta \subset \partial \alpha\}. \end{aligned}$$

В случае правильного покрытия $\forall t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$ однозначно определена *проекция* $t_\alpha = t(t_\alpha) \in \mathcal{K}_\alpha$ на $\mathcal{K}_\alpha$. Условия правильности покрытия можно записать в виде

$$h_\alpha \leq H_\alpha[\Phi],$$

и функционалы $H_\alpha[\Phi]$ считаются заданными. Пример правильного покрытия показан на рис. 1, где страты изображены сплошными линиями и выделенными точками, а границы $\mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$ – пунктиром.

Через $T_i \subset T$ обозначим связную компоненту дополнения к каустике $(T \setminus \mathcal{K} = \bigcup T_i)$. При $t \in T_i$ фаза Φ имеет K_i невырожденных критических точек $x_{ic} \equiv x_{ic}(t)$.

Определим множества V_i :

$$(2.34) \quad V_i = \{t \in T_i \mid d(t, \mathcal{K}_\alpha) \geq d_i > 0 \ \forall \alpha \subset \partial i\},$$

Рис. 1

где $\alpha \subset \partial i$ означает, что $\mathcal{K}_\alpha \subset \partial T_i$. Тогда при $d_i \leq h_\alpha$ ($\alpha \subset \partial i$) получаем *покрытие* $T = (\bigcup V_i) \cup \mathcal{K}^h$, которое также назовем *правильным*, если $\mathcal{K}^h$ – правильное покрытие. Для критических точек $x_c(t)$ при $t \in V_i$ ($t \subset \mathcal{K}_\alpha$) используется обозначение x_{ic} ($x_{\alpha c}$) и их число меньше K_i (K_α), соответственно.

Пусть заданы числа $\delta_{ic} > 0$ ($\delta_{\alpha c} > 0$), тогда $m[u] \leq m_{ic}[u]$ ($m_{\alpha c}[u]$), если рассматривается интервал $|x - x_{ic}| < \delta_{ic}$ ($|x - x_{\alpha c}| < \delta_{\alpha c}$). При $t \subset V_i$ ($t \subset \mathcal{K}_\alpha$) имеем $m[u] \leq m_i$ (m_α), $m[\Phi^{(1)}] \leq M_i$ (M_α). Любую величину f будем называть *малой*, если на соответствующем классе (u, Φ) можно явно указать ограниченные на этом классе функционалы $A_f[\Phi]$, $\Omega[\Phi]$ и константы $\beta = \beta[f] > 0$ такие, что

$$|f| \leq A_f[\Phi] \Omega^{-\beta[f]} \quad \text{при} \quad \Omega \geq \Omega[\Phi].$$

Будем говорить, что оценка О.И. $J[u]$ (1.6) при $t \in V_i$ определяется вкладом критических точек x_{ic} , если на соответствующем классе (u, Φ) можно указать ограниченные функционалы $\Omega_i[\Phi]$, $A_{ic}[u]$, $A_i[u, \Phi]$ такие, что при некотором $\varepsilon > 0$ и $\Omega \geq \Omega_i[\Phi]$ имеет место равномерная по t ($t \in V_i$) оценка

$$(2.35) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{ic}} \frac{A_{ic}[u]}{|\Omega \Phi^{(2)}(x_{ic}(t), t)|^{1/2}} + \frac{A_i[u, \Phi]}{\Omega^{0.5+\varepsilon}},$$

в которой величина $A_{ic}[u]$ зависит только от поведения амплитуды u при $|x - x_{ic}| \leq 2\delta_{ic}$ и величины δ_{ic} малы. Аналогично, оценка $J[u]$ при $t \subset \mathcal{K}_\alpha^h$ определяется вкладом критических точек $x_{\alpha c} = x_c(t_\alpha)$ ($t_\alpha = t_\alpha(t)$ – проекция t на $\mathcal{K}_\alpha$), если она имеет вид

$$(2.36) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{\alpha c}} \frac{A_{\alpha c}[u]}{|\Omega \Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x_{\alpha c}, t_\alpha)|^{1/\nu_{\alpha c}}} + \frac{A_\alpha[u, \Phi]}{\Omega^{0.5+\varepsilon}},$$

выполняется при $\Omega \geq \Omega_\alpha[\Phi]$, и функционалы $A_{\alpha c}[u]$, $A_\alpha[u, \Phi]$, $\Omega_\alpha[\Phi]$ ограничены на соответствующем классе (u, Φ) , величины $A_{\alpha c}[u]$ зависят только от поведения u при $|x - x_{\alpha c}| < \delta_{\alpha c}$ и величины $\delta_{\alpha c}$ малы.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть при $t \subset T$ фаза Φ и амплитуда u принадлежат одному из указанных выше классов $\{m, M\}$, $L_M^1(n_1, n_2)$, $L^1(n_1, n_2, n_3)$, фаза Φ имеет

$\bar{\nu} + 1$ непрерывные производные, которые дифференцируемы по t , и выполняются условия:

1) имеют место оценки

$$(2.37) \quad \sum_{k=1}^n |\partial_k \Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x, t)| \leq D_{\alpha}, \quad \sum_{k=1}^n |\partial_k \Phi^{(1)}(x, t)| \leq D_{\alpha}^1 \quad (t \in \mathcal{K}_{\alpha}^{h_{\alpha}}),$$

$$|\Phi^{(\nu_{\alpha c}+1)}(x, t)| \leq \bar{\Phi}_{\alpha}(t \subset \mathcal{K}_{\alpha}), \quad |\Phi^{(3)}(x, t)| \leq \bar{\Phi}_i \quad (t \subset V_i),$$

2) заданы числа $n_{i\alpha} \geq 0$, $n_{\alpha\beta} \geq 0$ и константы A_i , A_{α} такие, что

$$(2.38) \quad |\Phi^{(2)}(x_{ic}(t), t)| \geq A_i \prod_{\alpha \subset \partial i} d(t, \mathcal{K}_{\alpha})^{n_{i\alpha}} \quad (t \subset T_i),$$

$$|\Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x_{\alpha c}, t)| \geq A_{\alpha} \prod_{\beta \subset \partial \alpha} d(t, \mathcal{K}_{\beta})^{n_{\alpha\beta}} \quad (t \subset \mathcal{K}_{\alpha}).$$

Тогда при $\Omega \geq \Omega_0[\Phi]$, где $\Omega_0[\Phi]$ – явно указываемый ограниченный на соответствующем классе функционал, можно указать правильное покрытие $T = (\bigcup V_i) \cup \mathcal{K}^h$ такое, что оценки в V_i и $\mathcal{K}_{\alpha}^{h_{\alpha}}$ определяются вкладом критических точек, а величины d_i , h_{α} , h_{α}^1 , δ_{ic} , $\delta_{\alpha c}$ малы, зависят от ε , $n_{i\alpha}$, $n_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon < 0.5$ – любое.

2.3. Оценки с константами n -мерных О.И. Изложенные выше результаты позволяют получить аналог теоремы 2.2 для n -мерных О.И., фаза которых имеет только критические точки с вырождениями коранга ≤ 1 , т.е. особенности типа A_k ($1 \leq k \leq \bar{k}$).

Определение каустики $\mathcal{K} = \mathcal{K}[\Phi]$, данное в начале п. 2.2, годится и для многомерного случая, но теперь стратифицированное множество $\mathcal{K} \subset T$ находится из условия $\det \Phi''(x_c(t), t) = 0$. Так же сохраняются и данные выше определения множеств $\mathcal{K}_{\alpha}^{h_{\alpha}}$, V_i правильного покрытия $T = (\bigcup V_i) \cup \mathcal{K}^h$ проекции $t_{\alpha} = t_{\alpha}(t)$ точки t на $\mathcal{K}_{\alpha}$ и малой величины. В теоремах 2.1, 2.2 были указаны все условия, необходимые для вычисления констант в оценках. Так как построение оценок для рассматриваемого класса n -мерных О.И. по существу сводится к последовательному применению указанных теорем, то при формулировке и доказательстве теоремы 2.3 в целях большей ясности и краткости мы не будем явно указывать все константы и все условия, необходимые для их вычисления. Явный вид этих условий и констант извлекается из доказательства.

Пусть построено правильное покрытие $\mathcal{K}^h \supset \mathcal{K}$ и $t_{\alpha} = t_{\alpha}(t)$ ($t \subset \mathcal{K}_{\alpha}^{h_{\alpha}}$) – проекция t на страт $\mathcal{K}_{\alpha}$, $x_{\alpha c} = x_{\alpha c}(t_{\alpha})$ – критические точки фазы Φ при $t = t_{\alpha}$. Введем обозначения $x = (y, s)$, $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $s = x_n$. Определим функцию Ψ от y равенством $\Psi(y) = \Phi(y, s)$, и для функции Ψ переменная s рассматривается как параметр. В целях упрощения обозначений и без ограничения общности будем считать, что $\det \Psi''(y_{\alpha c}) \neq 0$. Если это условие не выполнено для исходных переменных x , то в силу того, что $\text{rank } \Phi''(x_{\alpha c}, t_{\alpha}) \geq n - 1$, его выполнения можно добиться, проведя линейную ортогональную и не зависящую от параметров замену координат x . В малой окрестности $|x - x_{\alpha c}| \leq 2\delta_{\alpha c}$ ($\delta_{\alpha c}$ мало, т.е. $\delta_{\alpha c} \leq \Omega^{-\beta_{\alpha c}}$, $\beta_{\alpha c} > 0$) при $|t - t_{\alpha}| < \delta_{\alpha}$,

где δ_α также мало, критические точки $y_{\alpha c}(s)$ фазы Ψ являются гладкими функциями s . Тогда при $t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha} \mid s - s_{\alpha c} \mid \leq 2\delta_{\alpha c}$ определена функция $S_{\alpha c}$ одной переменной s

$$(2.39) \quad S_{\alpha c}(s) = \Phi(y_{\alpha c}(s), s),$$

и для нее

$$(2.40) \quad S_{\alpha c}^{(1)}(s_{\alpha c}) = 0, \dots, S_{\alpha c}^{(\nu_{\alpha c}-1)}(s_{\alpha c}) = 0, \quad S_{\alpha c}^{(\nu_{\alpha c})}(s_{\alpha c}) \neq 0, \quad \nu_{\alpha c} \leq \bar{k} - 1.$$

Точно так же определены функции $u_{\alpha c}(s) = u(y_{\alpha c}(s), s)$. Заметим, что при $|t - t_\alpha| < \delta_\alpha$ каустика $\mathcal{K}[\Phi]$ совпадает с $\bigcup \mathcal{K}(S_{\alpha c})$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Рассмотрим n -мерный О.И. $J[u]$ (2.1). Пусть при $t \in T$, $x \in M$ фаза Φ и амплитуда u удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Фаза Φ имеет непрерывные производные $\partial^\alpha \Phi$ при $|\alpha| \leq C(n, \bar{k})$, и эти производные непрерывно дифференцируемы по параметрам t_i .*
2. *Все критические точки фазы Φ принадлежат классам A_k ($1 \leq k \leq \bar{k}$).*
3. *$\sup u \in M$, $(u, \Phi) \in \Lambda_\alpha(\lambda, \lambda_1, a)$ и функции $u_{\alpha c}$, $S_{\alpha c}$ принадлежат одному из классов $\{m, M\}$, $L_M^1(n_1, n_2)$, $L^1(n_1, n_2, n_3)$.*

Тогда существует правильное покрытие $T = (\bigcup V_i) \cup \mathcal{K}^h$ такое, что при $\Omega \geq \Omega_n[\Phi, \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0.5$ имеют место следующие утверждения.

1. *Для $t \in V_i$ оценка определяется вкладом невырожденных критических точек $x_{ic} \equiv x_{ic}(t)$ в том смысле, что*

$$(2.41) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{ic}} \frac{A_{ic}[u]}{\Omega^{n/2} |\det \Phi''(x_{ic}, t)|^{1/2}} + \frac{A_i[u, \Phi]}{\Omega^{\frac{n}{2} + \varepsilon}}.$$

Функционалы $A_{ic}[u]$, $A_i[u, \Phi]$ ограничены на рассматриваемых классах функций u , Φ , и значения $A_{ic}[u]$ зависят только от поведения u при $|x - x_{ic}| \leq 2\delta_{ic}$.

2. *Для $t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$ оценка $J[u]$ определяется вкладом критических точек $x_{\alpha c} \equiv x_c(t_\alpha)$, где $t_\alpha = t_\alpha(t)$ – проекция t на $\mathcal{K}_\alpha$, т.е.*

$$(2.42) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{\alpha c}} \frac{A_{\alpha c}[u]}{\Omega^{\frac{n-1}{2} + \frac{1}{\nu_{\alpha c}}} |\det \Psi''(y_{\alpha c}(s_{\alpha c}), s_{\alpha c}, t_\alpha)|^{1/2} |S_{\alpha c}^{(\nu_{\alpha c})}(s_{\alpha c}(t_\alpha), t_\alpha)|^{1/\nu_{\alpha c}}} + A_\alpha[u, \Phi] \Omega^{-\frac{n}{2} - \varepsilon}.$$

Функционалы $A_{\alpha c}[u]$, $A_\alpha[u, \Phi]$ ограничены, и значения $A_{\alpha c}[u]$ зависят только от поведения амплитуды u при $|x - x_{\alpha c}| \leq 2\delta_{\alpha c}$.

3. *Величины d_i , h_α , h_α^1 , участвующие в определении покрытия $\mathcal{K}^h$, и величины δ_{ic} , $\delta_{\alpha c}$ малы, т.е. все они меньше $\Omega^{-\beta}$, $\beta > 0$. Все функционалы $\Omega_n[\Phi, \varepsilon]$, $A_{ic}[u]$, $A_i[u, \Phi]$, $A_\alpha[u, \Phi]$, $A_{\alpha c}[u]$ и величины $d_i(\varepsilon, \Omega)$, $h_\alpha(\varepsilon, \Omega)$, $h_\alpha^1(\varepsilon, \Omega)$, $\delta_{ic}(\varepsilon, \Omega)$, $\delta_{\alpha c}(\varepsilon, \Omega)$ можно явно указать и для этого, как и для построения оценок, достаточно уметь решать системы трансцендентных уравнений и вычислять обратную матрицу.*

4. *Эвклидов объем области параметров, где оценки (2.41), (2.42) не точны, не превышает величины $\Omega^{-\gamma}$, $\gamma > 0$.*

2.4. ПРИМЕРЫ. Характер и точность получаемых в рамках теоремы 2.2 оценок иллюстрируют две леммы, доказанные в §5. Первая из них описывает составную оценку определенного выше *интеграла Пирси*. Напомним, что для этого интеграла производная фазы – полином третьей степени ($\Phi^{(1)}(x) = x^3 + ax + b$) и в этом случае $t = (a, b)$. Так как оценки симметричны относительно замены $b \rightarrow -b$, то достаточно рассмотреть верхнюю полуплоскость $b \geq 0$. Разбиение $T = \bigcup_{i=1}^6 T_i$, возникающее в процессе получения оценок, показано на рис. 2 и задается с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \{(a, b) \in T \mid |A| \geq b^2, |a| \geq \Omega^{-1/2}\} \quad \left(A \equiv \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right), \\
 T_2 &= \{(a, b) \in T \mid A < 0, |a| \geq \Omega^{-1/2}, \gamma\Omega^{-2/3}|b|^{10/9} \leq |A| \leq b^2\}, \\
 (2.43) \quad T_3 &= \{(a, b) \in T \mid |a| \geq \Omega^{-1/2}, |A| \leq \gamma\Omega^{-2/3}|b|^{10/9}\}, \\
 T_4 &= \{(a, b) \in T \mid b \geq \alpha\Omega^{-3/4}, \gamma\Omega^{-2/3}|b|^{10/9} \leq A \leq \beta\Omega^{-1/2}|b|^{4/3}\}, \\
 T_5 &= \{(a, b) \in T \mid A > 0, \beta\Omega^{-1/2}|b|^{4/3} \leq A \leq b^2; |a| \geq \Omega^{-1/2} \text{ или } b \geq \Omega^{-3/4}\alpha\}, \\
 T_6 &= \{(a, b) \in T \mid |a| \leq \Omega^{-1/2}, |b| \leq \alpha\Omega^{-3/4}\};
 \end{aligned}$$

здесь α, β, γ – абсолютные константы, значения которых можно указать. В частности, можно считать, что $\alpha = 3^{-1/2}$, $\beta = 3^{-1/3}6^{-1}$ и γ – любое, такое, что $\gamma \leq 12^{-1} = \gamma_0$. Предполагается, что $|a| < 1$, $|b| < 1$, $\Omega \geq 1$.

Рис. 2

Кривые $\Gamma_{\pm}$ задаются уравнениями $\pm A = b^2$, кривые $\Gamma_{\gamma}^{\pm}$ – уравнениями $A = \pm\gamma\Omega^{-2/3}|b|^{10/9}$, а кривая Γ – уравнением $A = \beta\Omega^{-1/2}|b|^{4/3}$. Если ввести Δb из условия $b = b_0(a) + \Delta b$, $(a, b_0) \in \mathcal{K}$, то в области T_3 имеем $|\Delta b| < C\Omega^{-2/3}|a|^{1/6}$, и в области T_4 – $|\Delta b| < C\Omega^{-1/2}|a|^{1/2}$. Напомним, что каустика $\mathcal{K}$ определяется из условия $A = 0$.

ЛЕММА 2.1. Пусть амплитуда u имеет компактный носитель, ограничена ($u \leq \bar{u}$) и имеет $m[u] \leq m$ участков монотонности. Тогда для интеграла Пирси $J[u]$ при любом $\gamma \leq \gamma_0$ справедливы следующие оценки (предполагается,

что $\Omega > 1$, $a < 1$, $b < 1$):

$$\begin{aligned}
 (2.44) \quad & |J[u]| \leq C_1 \bar{u} m \Omega^{-1/2} |a|^{-1/2} & (a, b) \in T_1, \\
 & |J[u]| \leq C_2 \bar{u} m \gamma^{-3/4} |b|^{1/6} |A|^{-1/4} \Omega^{-1/2} & (a, b) \in T_2, \\
 & |J[u]| \leq C_3 \bar{u} m \Omega^{-1/3} |a|^{-1/6} & (a, b) \in T_3, \\
 & |J[u]| \leq C_4 \bar{u} m \Omega^{-1} |b| |A|^{-1} & (a, b) \in T_4, \\
 & |J[u]| \leq C_5 \bar{u} m \Omega^{-1/2} |b|^{-1/3} & (a, b) \in T_5, \\
 & |J[u]| \leq C_6 \bar{u} m \Omega^{-1/4} & (a, b) \in T_6.
 \end{aligned}$$

Этот результат с точностью до изменения констант в оценках сохраняется, если вместо разбиения $T = \bigcup_i T_i$ (2.43) взять его образ при сохраняющем начало координат диффеоморфизме $a \rightarrow ag_1(ab)$, $b \rightarrow bg_2(ab)$, $0 < C \leq |g_i| \leq C'$.

Вторая лемма описывает составную оценку преобразования Фурье $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi)$ характеристической функции $\chi_{\mathcal{D}}$ двумерной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ (1.15). Введем некоторые определения, которые будут использоваться ниже. Граница $\partial\mathcal{D}$ предполагается *положительно ориентированной* и s – *натуральный параметр* (длина дуги) на $\partial\mathcal{D}$, $\vec{r}(s)$ – *радиус-вектор точки на $\partial\mathcal{D}$* , $\vec{\tau}(s) = d\vec{r}/ds$ – *касательный вектор*, $\vec{\nu}(s)$ – *внешняя нормаль*, $k(s)$ – *кривизна $\partial\mathcal{D}$ в точке $\vec{r}(s)$* и уравнения Серре–Френе имеют вид

$$(2.45) \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau}, \quad [\vec{\nu}, \vec{\tau}] = 1.$$

Так как $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль, то кривизна k может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Будем говорить, что *контур $\partial\mathcal{D}$ принадлежит классу $\{\partial\mathcal{D}\}$ ($\partial\mathcal{D} \in \{\partial\mathcal{D}\}$)*, если выполнены условия

- 1) на $\partial\mathcal{D}$ имеется конечное число точек уплощения s_i^0 , и все они имеют конечный порядок p_i , $1 \leq p_i \leq p$,

$$(2.46) \quad k^{(n)}(s_i^0) = 0, \quad n = 0, \dots, p_i - 1, \quad |k^{(p_i)}(s_i^0)| = K_i > 0,$$

- 2) контур $\partial\mathcal{D}$ достаточно гладкий, т.е. $k(s) \leq \bar{k}$ и кривизна k имеет по крайней мере $p + 1$ непрерывную производную.

Задача состоит в оценке О.И. (1.15) с фазой $\Phi(s) = \langle \vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle$, зависящей от одного параметра φ , и $\Omega \equiv \lambda$ ($\vec{\eta} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$). Так как $\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi) = \hat{\chi}_{\mathcal{D}}(-\lambda, \varphi + \pi)$, то ниже предполагается, что $0 \leq \varphi \leq \pi$. Через φ_i^0 обозначается *угол касательной* в точке уплощения s_i^0 . Под углом прямой всегда подразумевается угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) в ее уравнении $\langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle = q$. Точки s_i^0 упорядочены по ориентации. Множество $\{\varphi_i^0\}$ неупорядочено и, возможно, $\varphi_i^0 = \varphi_j^0$ ($i \neq j$). Через $\{\varphi_t\}$ обозначим упорядоченное без совпадающих элементов множество углов φ_i^0 . Таким образом, $\varphi \in \{\varphi_t\}$, если в пучке прямых под углом φ имеется прямая касательная к $\partial\mathcal{D}$ в некоторой точке уплощения. В случае $\varphi_i^0 = \varphi_t$ будем говорить, что $i \subset t$. Критические точки $s_c \equiv s_c(\varphi)$ фазы $\Phi(s) = \langle \vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle$ определяются из условия $\langle \vec{\tau}(s), \vec{\eta} \rangle = 0$, которое означает, что в пучке прямых под углом φ есть прямые касательные к $\partial\mathcal{D}$ и $s_c = s_c(\varphi)$ – точки касания.

Так как $\Phi^{(2)}(s) = k\langle\vec{\nu}\vec{\eta}\rangle$, то каустикой является множество $\{\varphi_t\}$ ($\mathcal{K} = \{\varphi_t\}$). Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что

$$(2.47) \quad |k^{(n)}(s)| \leq C_n \bar{k} b^n, \quad b \geq k,$$

и определим константы Δ_i

$$(2.48) \quad \Delta_i = C_i K_i (\bar{k} b^{p_i+1})^{-1} \quad \left(C_i \leq \frac{p_i+1}{2} \right).$$

Здесь и ниже константы C_i зависят только от p_i . Критические точки при $\varphi = \varphi_t$ обозначим через $s_{0c} \equiv s_c(\varphi_t)$, а константы $\tilde{k}$, $\Delta_0 \varphi_t$ определим с помощью соотношений

$$(2.49) \quad \begin{aligned} |k(s)| &\geq \tilde{k} \quad \text{при} \quad |s - s_i^0| \geq \Delta_i, \\ \Delta_0 \varphi_t &= \max_{i \subset t} C_i K_i^{\frac{1}{p_i+2}} |\lambda|^{-\frac{p_i+1}{p_i+2}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $\partial\mathcal{D} \in \{\partial\mathcal{D}\}$. Тогда

1) если $|\varphi - \varphi_t| \geq \Delta_0 \varphi_t \quad \forall t$ и

$$(2.50) \quad |\lambda| > 4(\bar{k}^2 + \bar{k}^{(1)}(\tilde{k})^{-3}),$$

то (при надлежащем выборе констант C)

$$(2.51) \quad |\hat{\chi}_D(\lambda, \varphi)| \leq \frac{C\mathcal{N}}{|\lambda|} \left[\sum_{s_c} |\lambda|^{-1/2} |k(s_c)|^{-1/2} + \left(\min_t |\varphi - \varphi_t| \cdot |\lambda| \right)^{-1} \right],$$

где $\mathcal{N}$ – число выпуклых дуг, из которых состоит контур $\partial\mathcal{D}$, и для $k(s_c)$ выполняется по крайней мере одна из оценок

$$(2.52) \quad |k(s_c)| \geq \tilde{k}, \quad |k(s_c)| \geq \min_{t, i \subset t} \left\{ C_i K_i^{\frac{1}{p_i+1}} |\varphi - \varphi_t|^{\frac{p_i}{p_i+1}} \right\},$$

2) если $|\varphi - \varphi_t| \leq \Delta_0 \varphi_t$, интервалы $|\varphi - \varphi_t| \leq \Delta_0 \varphi_t$ не пересекаются, т.е. $\varphi_{t+1} - \varphi_t \geq C(p)(\Delta_0 \varphi_t + \Delta_0 \varphi_{t+1})$ и $\lambda \geq \lambda_t[\tilde{k}, K_i, \bar{k}, b, p_i]$, то

$$(2.53) \quad |\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi)| \leq \frac{C(p)\mathcal{N}}{|\lambda|} \left[\sum_{s_{0c}} |\lambda|^{-1/2} |k(s_{0c})|^{-1/2} + \sum_{j \subset t} |\lambda|^{-\frac{1}{p_j+2}} K_j^{-\frac{1}{p_j+2}} \right],$$

где суммирование ведется по $s_{0c} = s_c(\varphi_t) \neq s_j^0$, $j \subset t$, и для $k(s_c^0)$ справедлива по крайней мере одна из оценок

$$(2.54) \quad |k(s_{0c})| \geq \tilde{k}, \quad |k(s_{0c})| \geq \min_{t', i \subset t' \neq t} \left\{ C_i K_i^{\frac{1}{p_i+1}} |\varphi_t - \varphi_{t'}|^{\frac{p_i}{p_i+1}} \right\}.$$

Величину λ_t и все константы C можно явно указать.

В примере 5.6 рассматривается задача оценки *ошибки регуляризации*, определяемой равенством

$$(2.55) \quad \Delta f_R(\vec{r}_0) = f_R(\vec{r}_0) - f(\vec{r}_0), \quad \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2,$$

в котором $f(\vec{r}_0) = \chi_{\mathcal{D}}(\vec{r}_0)$ есть характеристическая функция области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ и f_R — общая сферически-симметричная регуляризация функции f , задаваемая регуляризатором $R(\lambda)$:

$$(2.56) \quad f_R(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \lambda R(\lambda) e^{-i\lambda \langle \vec{r}_0, \vec{\eta} \rangle} \widehat{f}(\lambda \vec{\eta}) d\lambda \quad (\vec{\eta} = (\cos \varphi, \sin \varphi)).$$

При этом регуляризатор предполагается *однородным*, т.е.

$$(2.57) \quad R(\lambda) = G(\xi), \quad \xi = \lambda/\Omega, \quad R(0) = G(0) = 1.$$

Эту задачу можно рассматривать как задачу о сходимости общего сферически-симметричного метода суммирования двумерного интеграла Фурье. Суммированию по кругам отвечает случай $G(\xi) = 1$, $|\xi| < 1$, $G(\xi) = 0$, $|\xi| > 1$. В § 5 дано полное решение задачи об оценке величины Δf_R для случая кусочно-гладкой функции G . Здесь мы приведем только простейшее следствие из полученных результатов.

Будем говорить, что контур $\partial \mathcal{D}$ (граница области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$) является *контуром общего положения*, если его кривизна k как функция натурального параметра s имеет только простые экстремумы, т.е. если $k^{(1)}(s_0) = 0$, то $k^{(2)}(s_0) \neq 0$. Тогда *эволюта* Γ кривой $\partial \mathcal{D}$ имеет только простые точки возврата, и их объединение обозначим через Γ_0 .

ЛЕММА 2.3. *Метод суммирования по кругам для двумерного интеграла Фурье сходится при $\vec{r}_0 \notin \partial \mathcal{D}$ для характеристических функций областей с кусочно-гладкой границей и при этом*

$$(2.58) \quad |\Delta f_R(\vec{r}_0)| = O(\Omega^{-1/2}), \quad \Omega \rightarrow \infty.$$

Для областей с границей общего положения при $\vec{r}_0 \notin \partial \mathcal{D}$

$$(2.59) \quad |\Delta f_R(\vec{r}_0)| = \begin{cases} O(\Omega^{-1}), & \vec{r}_0 \notin \Gamma, \\ O(\Omega^{-5/6}), & \vec{r}_0 \in \Gamma, \vec{r}_0 \notin \Gamma_0, \\ O(\Omega^{-3/4}), & \vec{r}_0 \in \Gamma_0. \end{cases}$$

Все эти оценки точны по порядку Ω^{-1} .

Аналогичный результат имеет место и в трехмерном случае. В двумерном случае из этих результатов и леммы 2.2 вытекает сходимость метода суммирования по кругам и для ряда Фурье. В этом случае для определенной во введении величины Δf_R^T ($x = \vec{r}_0$) имеет место аналог оценки (2.58) $|\Delta f_R^T(\vec{r}_0)| = O(\Omega^{-1/2})$, и эта оценка также точна по порядку Ω^{-1} . Доказательство этого результата и его уточнение для контуров общего положения будет опубликовано в отдельной работе. В только что посланной в печать работе М. И. Дьяченко, используя другой метод, доказал сходимость двумерного ряда Фурье при суммировании по кругам для выпуклых областей. Автор благодарен М. И. Дьяченко за разрешение ознакомиться с этой работой до ее публикации.

§3. Остаточный член в методе стационарной фазы (С.Ф.)

Основная цель этого параграфа – доказательство теоремы 2.1 и следствия 2.1, формулировки которых приведены в п. 2.1. Кроме того, в этом параграфе рассматриваются оценки остаточных членов в методе С.Ф. для одномерных О.И. и в случае вырожденных критических точек. При изложении используются обозначения, введенные в п. 2.1.

3.1. Вспомогательные леммы. Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобятся три леммы. В первой из них дается оценка степеней оператора A_Φ (2.9), во второй – количественная формулировка принципа локализации [1], в третьей – оценка гауссовых О.И., фазой которых является невырожденная квадратичная форма.

ЛЕММА 3.1. Пусть функция f N раз непрерывно дифференцируема, а функция Φ – $N + 1$ раз, выполняются оценки (2.7) и $N + 1 \leq \bar{\alpha}$. Тогда, если $x_c \notin \text{supp } f$, то имеет место оценка

$$(3.1) \quad |(A_\Phi^N f)(x)| \leq C_{Nn} \sum_{|\gamma|=0}^N |\partial^\gamma f(x)| \sum_{p=0}^{N-|\gamma|} G(x)^{-\frac{N+p}{2}} \lambda^p \lambda_1^{N-|\gamma|+p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции доказывается точная формула

$$(3.2) \quad A_\Phi^N(f) = \sum_{|\gamma|=0}^N \partial^\gamma f \sum_{k=0}^{N-|\gamma|} G^{-N-k} \sum_{p=0}^{N-|\gamma|} (\partial^1 \Phi)^{N+2k-p} \times \sum_{(n_2, \dots, n_{N+1})} (\partial^2 \Phi)^{n_2} \dots (\partial^{N+1} \Phi)^{n_{N+1}} C_{n_2 \dots n_{N+1}},$$

в которой $\partial^i \Phi \equiv \partial^{\alpha_i} \Phi$ ($|\alpha_i| = i$) и для сокращения записи опущены индексы α_i и знак суммирования по всем $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ ($|\alpha_i| = n_i$). Суммирование в (3.2) ведется по всем α_i и наборам $(n_2, \dots, n_{N+1})$ целых неотрицательных чисел таких, что

$$n_2 + n_3 + \dots + n_{N+1} = p, \quad n_2 + 2n_3 + \dots + Nn_{N+1} = N - |\gamma|.$$

Учитывая, что $|\partial^1 \Phi| \leq G^{1/2}$, из (3.2) сразу получаем нужный результат.

Для формулировки принципа локализации введем нужное нам понятие разбиения единицы $E(x_i, \delta_i)$, $i = 1, \dots, I$, с центрами в точках x_i и масштабами δ_i . Будем говорить, что разбиение единицы $E(x_i, \delta_i)$ задано, если заданы точки x_i числа $\delta_i \geq \delta_0 > 0$ и функции $p_i \in C_0^\infty$ такие, что

$$(3.3) \quad \rho_i(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_i| \leq \delta_i, \\ 0, & |x - x_i| \geq 2\delta_i, \end{cases} \quad |\partial^\alpha \rho_i(x)| \leq C_{|\alpha|, n}^\rho \delta_i^{-|\alpha|}, \quad |x_i - x_j| \geq 2(\delta_i + \delta_j).$$

Последнее условие означает, что $\text{supp } \rho_i \cap \text{supp } \rho_j = \emptyset$. Явный вид функций ρ_i для дальнейшего не важен, важно только то, что они существуют [5]. Функцию $\tilde{\rho}$ определим из равенства

$$1 = \sum_{i=1}^I \rho_i(x) + \tilde{\rho}(x).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_i| \leq \delta_i, \\ 1, & |x - x_i| \geq 2\delta_i. \end{cases}$$

Ниже функции ρ_i предполагаются фиксированными, и зависимость оценок от констант $C_{|\alpha|n}^p$ нигде не указывается.

Если задано $E(x_i, \delta_i)$ и $x_i \in M$, то О.И. $J[u]$ (2.1) можно представить в виде

$$(3.4) \quad J[u] = \sum_{i=1}^I J[\rho_i u] + J[\tilde{\rho} u].$$

Наша цель – оценить *объемный член* – О.И. $J[\tilde{\rho} u]$ при условии, что $x_c \notin \text{supp } \tilde{\rho}$.

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия:

- 1) $(u, \Phi) \in \Lambda_{\overline{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, a)$, фаза Φ имеет не более K_M (возможно, вырожденных) критических точек $x_c \in M^\delta$ и при этом $d(x_c, \partial M) \geq d_0 > 0$,
- 2) задано $E(x_i, \delta_i)$ такое, что $\forall x_c$ существует единственный центр x_i , $i = i(c)$, такой, что

$$|x_c - x_i| \leq 0.5\delta_i, \quad d(x_i, \partial M) \geq 2\delta_i, \quad 0 < \delta_0 \leq \delta_i < a < 1, \quad 2\delta_i < d_0.$$

Тогда для любого целого P ($1 \leq P \leq \overline{\alpha} - 1$) имеет место представление

$$(3.5) \quad J[\tilde{\rho} u] = J_{\partial M}^P[u] + \Delta J_P,$$

в котором вклад границы $J_{\partial M}^P[u]$ определен в (2.10), а для ΔJ_P имеется оценка

$$(3.6) \quad |\Delta J_P| \leq C_{Pn}(K_M + 1) \frac{\|v\|_P \lambda_1^P}{(\Omega \tilde{\Phi}_1)^P} \sum_{p=0}^P \left(\frac{\lambda \lambda_1}{\tilde{\Phi}_1} \right)^p \sum_{j=0}^{P-p} (\lambda_1 \delta_0)^{-j},$$

где $\tilde{\Phi}_1$ – константа, определенная в (2.5) при $\delta_c \leq 0.5\delta_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы интегрирования по частям (2.11) получим (3.5), и при этом

$$\Delta J_P = \left(\frac{i}{\Omega} \right)^P \int_M A_{\Phi}^P(\tilde{\rho} u) e^{i\Omega\Phi} dx.$$

Последний интеграл оценивается с помощью (3.1):

$$|\Delta J_P| \leq \frac{C_{Pn}}{\Omega^P} \sum_{|\gamma|=0}^P \sum_{p=0}^{P-|\gamma|} (\tilde{\Phi}_1)^{-P-p} \lambda^p \lambda_1^{P-|\gamma|+p} \int_M |\partial^\gamma(\tilde{\rho} u)| dx.$$

Остается воспользоваться тем, что в силу сделанных предположений (см. (2.6))

$$|\partial^\gamma(\tilde{\rho}u)| \leq (K_M + 1)\delta_0^{-|\gamma|}v_{|\alpha|}(x).$$

При доказательстве теоремы 2.1 возникают *гауссовы О.И.* $J_A[u]$ вида

$$(3.7) \quad J_A[u] = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{i\frac{\Omega}{2}\langle Ax, x \rangle} dx.$$

Интегралы J_A рассматривались в [1], [5]. При доказательстве леммы 3.3 будем следовать методу [1] и уточним имеющиеся там результаты.

ЛЕММА 3.3. Пусть $u \in L^1$, $\partial^\alpha u \in L^1$ при $|\alpha| \leq m$ и u , $\partial^\alpha u$ непрерывны при $|\alpha| \leq m$, а матрица A невырождена. Тогда для любых m, k таких, что $m \geq 2k + n + 1$, $k > 1$,

$$(3.8) \quad J_A[u] = \left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\kappa}}{|\det A|^{1/2}} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{i^p (\langle A^{-1}\partial, \partial \rangle^p u)(0)}{2^p p! \Omega^p} + R_k,$$

и для R_k справедлива оценка

$$(3.9) \quad |R_k| \leq \frac{C_{kmn} \|A^{-1}\|^k}{\Omega^{k+\frac{n}{2}} |\det A|^{1/2}} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \{\|\partial_i^m u\|_{L^1}\} \right)^{\frac{2k+n}{m}} (\|u\|_{L^1})^{\frac{m-2k-n}{m}},$$

где κ — индекс матрицы A и $\|A^{-1}\|$ — евклидова норма матрицы A^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий на амплитуду u следуют оценки ее преобразования Фурье $\hat{u}$:

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^1}, \quad |\hat{u}(\xi)| \leq \xi_0^{-m} \max_i \|\partial_i^m u\|_{L^1} \quad (\xi = (\xi_1 \cdots \xi_n), \quad |\xi_i| \geq \xi_0).$$

Таким образом,

$$|\hat{u}(\xi)| \leq n^{m/2} |\xi|^{-m} \max_i \{\|\partial_i^m u\|_{L^1}\}$$

и равномерно по ξ

$$(3.10) \quad |\hat{u}(\xi)| \leq 2^m a_m [|\xi| + (a_m(a_0)^{-1})^{1/m}]^m, \\ a_m = n^{m/2} \max_i \|\partial_i^m u\|_{L^1}, \quad a_0 = \|u\|_{L^1}.$$

Преобразуем интеграл $J_A[u]$ с помощью формулы Парсеваля

$$\int u(x) v(x) dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(-\xi) \hat{v}(\xi) d\xi.$$

В интересующем нас случае эту формулу при $m \geq n + 1$ можно обосновать с помощью введения множителя $\exp(-\varepsilon \langle x, x \rangle)$ под интеграл и последующего предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$. Из формулы Парсеваля получаем

$$J_A[u] = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{n/2} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\kappa}}{|\det A|^{1/2}} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{2\Omega} \langle A^{-1}\xi, \xi \rangle} \hat{u}(-\xi) d\xi.$$

Разлагая экспоненту в ряд Тейлора

$$\exp ix = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{(ix)^p}{p!} + \Delta_k, \quad |\Delta_k| \leq \frac{|x|^k}{k!} \quad \left(x = -\frac{1}{2\Omega} \langle A^{-1}\xi, \xi \rangle \right),$$

получим (3.8) и оценку R_k при $m \geq 2k + n + 1$

$$(3.11) \quad |R_k| \leq \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{n/2} \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det A|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\langle A^{-1}\xi, \xi \rangle|^k}{k! (2\Omega)^k} |\widehat{u}(-\xi)| d\xi.$$

Нужная оценка (3.9) следует из (3.11), если воспользоваться (3.10) и тем, что

$$|\langle A^{-1}\xi, \xi \rangle| \leq \|A^{-1}\| |\xi|^2.$$

Для константы C_{knm} при этом получим

$$C_{knm} = \frac{2^{m+1-n-k} n^{k+\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2) 2^k k! (m - 2k - n)}.$$

3.2. Доказательство теоремы 2.1. Как уже указывалось, при доказательстве будет использован подход Хермандера [5] к методу С.Ф. В соответствии с этим введем две зависящие от параметра s ($0 \leq s \leq 1$) функции

$$F_s(x) = \frac{1}{2} \langle \Phi_c'' \Delta x_c, \Delta x_c \rangle - s \cdot h_c(x) \quad (\Delta x_c = x - x_c),$$

$$G_s(x) = |\nabla F_s|^2 = \sum_{i=1}^n ((\partial_i F_s)(x))^2 \quad (\Phi_c'' \equiv \Phi''(x_c)),$$

где функция h_c определена в (2.12). По определению

$$F_1(x) = \Phi(x) - \Phi(x_c), \quad G_0(x) = |\Phi_c'' \Delta x_c|^2, \quad G_1 = G.$$

Оценим величину G_s при $|\Delta x_c| \leq 2\delta_c$. По формуле Тейлора в этой области

$$|\nabla h_c| \leq C'_n \sqrt{n} \overline{\Phi}_c^{(3)} |\Delta x_c|^2 \quad \left(C'_n = \sum_{|\alpha|=2} (\alpha!)^{-1} \right).$$

Рассмотрим величину

$$\Delta G_s = G_s - G_0 = 2 \langle \Phi_c'' \Delta x_c, \nabla h_c \rangle + s^2 (\nabla h_c)^2.$$

При условии

$$(3.12) \quad |\nabla h_c| \leq \frac{1}{8} |\Phi_c'' \Delta x_c|$$

верна оценка

$$(3.13) \quad |\Delta G_s| \leq \frac{1}{2} |\Phi_c'' \Delta x_c|.$$

Условие (3.12) выполняется, если

$$8C'_n |\Delta x_c| \overline{\Phi}_c^{(3)} \leq |\Phi_c'' \Delta x_c|,$$

и, учитывая определение B_c (2.2), получим, что оценка (3.13) верна, если в (2.13) взять $C_n \leq (8\sqrt{n} C'_n)^{-1}$. Таким образом, при условии (2.13) для δ_c

$$(3.14) \quad 0.5G_0(x) \leq G_s(x) \leq 1.5G_0(x), \quad |x - x_c| \leq 2\delta_c.$$

Отсюда, в свою очередь, получаем, что

$$|x_c - x_{c'}| \geq 2(\delta_c + \delta_{c'}),$$

и, следовательно, определено разложение единицы $E(x_c, \delta_c)$ и

$$(3.15) \quad J[u] = \sum_{x_c} J[\rho_c u] + J[\tilde{\rho} u].$$

По лемме 3.2 для $J[\tilde{\rho} u]$ имеем равенство (3.5) с оценкой (3.6). Оценка ΔJ_P (2.18) следует из (3.6) при $\lambda_1 \delta_0 < 1$.

В соответствии с методом Хермандера для исследования интегралов $J[p_c u]$ введем интегралы

$$I_c(s) = \int \rho_c u e^{i\Omega F_s} dx.$$

По определению функции F_s

$$J[\rho_c u] = e^{i\Omega \Phi(x_c)} I_c(1).$$

Используя обозначения $I_c^{(\mu)}(s) = \left(\frac{d}{ds}\right)^\mu I_c(s)$, по формуле Тейлора имеем

$$(3.16) \quad J[\rho_c u] = e^{i\Omega \Phi(x_c)} \left[\sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{I_c^{(\mu)}(0)}{\mu!} + \Delta_c^r \right], \quad |\Delta_c^r| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} (r!)^{-1} |I_c^{(r)}(s)|.$$

Оценим величину

$$I_c^{(r)}(s) = (i\Omega)^r \int \rho_c \psi_r^c e^{i\Omega F_s} dx.$$

Так как $h_c(x) \sim |\Delta x_c|^3$, то $\psi_r^c(x) \sim |\Delta x_c|^{3r}$, и при $3r \geq 2N$ в этом интеграле можно N раз интегрировать по частям ($G_s \sim |\Delta x_c|^2$)

$$I_c^{(r)}(s) = (i\Omega)^r \left(\frac{i}{\Omega}\right)^N \int A_{F_s}^N(\rho_c \psi_r^c) e^{i\Omega F_s} dx.$$

Оценим величины $A_{F_s}^N(\rho_c \psi_r^c)(x)$. Использование формулы Лейбница и условий (2.7) приводит к оценке

$$(3.17) \quad |\partial^\alpha (h_c)^r(x)| \leq C_{n,|\alpha|,r}(\lambda^c)^r(\lambda_1^c)^{|\alpha|}.$$

При $|\alpha| \leq 3r$ эту оценку можно уточнить. По формуле Тейлора

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_p \bar{f}_{k+|\alpha|} |x|^k,$$

если $\partial^\alpha f(0) = 0$, $|\alpha| \leq p-1$, $|\alpha| + k \leq p$. Беря $f = h_c$, $p = 3r$, $k + |\alpha| = 3$, с учетом оценки (3.17) получим

$$|\partial^\alpha (h_c)^r(x)| \leq C_{n,r}(\lambda^c)^r(\lambda_1^c)^{3r} |\Delta x_c|^{3r-|\alpha|} \quad (|\alpha| \leq 3r).$$

Отсюда следует, что (см. (2.6))

$$|\partial^\gamma (\rho_c \psi_r^c)(x)| \leq C_{n,|\gamma|,r} \bar{v}_{|\gamma|,c} (\lambda^c)^r (\lambda_1^c)^{3r} |\Delta x_c|^{3r-|\gamma|} \quad (|\Delta x_c| \leq 2\delta_c, |\gamma| \leq 3r).$$

Из определения величины B_c (2.2), учитывая (3.14), получаем, что

$$G_s(x) \geq 0.5 B_c^2 |\Delta x_c|^2 \quad (|\Delta x_c| \leq 2\delta_c).$$

Теперь для оценки $A_{F_s}^N(\rho_c \psi_r^c)(x)$ можно воспользоваться (3.1)

$$(3.18) \quad |A_{F_s}^N(\rho_c \psi_r^c)(x)| \leq C_{nNr} (\lambda^c)^r (\lambda_1^c)^{3r} |\Delta x_c|^{3r-2N} \sum_{j=0}^N \bar{v}_{j,c} \sum_{p=0}^{N-j} \frac{(\lambda^c)^p (\lambda_1^c)^{N-j+p}}{B_c^{N+p} \delta_c^{N-j+p}}.$$

Интеграл $I_c^{(r)}(s)$, входящий в Δ_c^r (3.16), оцениваем тривиально:

$$|I_c^{(r)}(s)| \leq \frac{C_n \delta_c^n}{\Omega^{N-r}} \max_{|\Delta x_c| \leq 2\delta_c} |A_{F_s}^N(\rho_c \psi_r^c)(x)|.$$

Подставляя сюда оценку (3.18) и учитывая, что $\lambda_1 \delta_c \leq 1$, $B_c \leq \lambda^c (\lambda_1^c)^2$, имеем

$$|I_c^{(r)}(s)| \leq C_{nNr} \frac{\bar{v}_{N,c} (\lambda^c)^{r+N} (\lambda_1^c)^{3r-2N} \delta_c^{3r-2N+n}}{\Omega^{N-r} B_c^{2N}}.$$

Из этой оценки и равенства (3.16) следует, что

$$(3.19) \quad \sum_{x_c} J[\rho_c u] = \sum_{x_c} e^{i\Omega \Phi(x_c)} \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{I_c^{(\mu)}(0)}{\mu!} + \Delta J_{rN}$$

и ΔJ_{rN} удовлетворяет оценке (2.18). Осталось рассмотреть гауссовы интегралы

$$I_c^{(\mu)}(0) = (i\Omega)^\mu \int \rho_c \psi_\mu^c e^{i\frac{\Omega}{2} \langle \Phi_c'' \Delta x_c \Delta x_c \rangle} dx.$$

Используем результат (3.8) леммы 3.3, в котором возьмем $m = 2k + n + 1$ и упростим остаточный член с помощью оценок

$$\begin{aligned} \|(\Phi_c'')^{-1}\| &\leq B_c^{-1}, \\ \|\partial^\alpha(\rho_c \psi_\mu^c)\|_{L^1} &\leq C_{\mu, |\alpha|, n} \delta_c^{n-|\alpha|} (\lambda^c)^\mu \bar{v}_{|\alpha|, c}. \end{aligned}$$

Подставляя результат в (3.19), получим

$$(3.20) \quad \sum_{x_c} J[\rho_c u] = \sum_{x_c} J_{kr}^c + \Delta J_{rN} + \Delta J_{kr},$$

где ΔJ_{kr} удовлетворяет оценке (2.18). Равенство (2.15) получается подстановкой (3.5), (3.20) в (3.15). Остается заметить, что $\psi_\mu^c \sim |\Delta x_c|^{3\mu}$, и поэтому в (2.16) суммирование по p ведется в области $p \geq 1.5\mu$.

При некоторых естественных дополнительных условиях результат теоремы 2.1 можно упростить, что и сделано в следствии 2.1, которое сформулировано в п. 2.1. Прежде чем переходить к доказательству следствия 2.1, отметим, что *критический вклад* J_{kr}^c (2.16) точки x_c можно записать в виде

$$(3.21) \quad J_{kr}^c = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{n/2} \frac{e^{i\Omega\Phi(x_c) + \frac{i\pi}{4}\kappa_c}}{|\det \Phi_c''|^{1/2}} u(x_c) + \Delta_0 J_{kr}^c,$$

и первый член в правой части этого равенства называется *основным критическим вкладом точки* x_c . Так как

$$(3.22) \quad \begin{aligned} |(\Phi_c'')^{-1} \partial, \partial)^p \psi_\mu^c(x_c)| &\leq B_c^{-p} |\partial^\alpha \psi_\mu^c(x_c)|, \\ |\partial^\alpha \psi_\mu^c(x_c)| &\leq C_{|\alpha|, \mu} \bar{u}_{|\alpha|}(x_c) (\lambda^c)^\mu \max\{1, (\lambda_1^c)^\mu\}, \end{aligned}$$

то при дополнительных условиях

$$(3.23) \quad \lambda_1^c \geq 1, \quad \frac{\lambda^c (\lambda_1^c)^6}{B_c^3 \Omega} \leq 1,$$

получим оценку

$$(3.24) \quad |\Delta_0 J_{kr}^c| \leq C_{krn} \frac{\bar{u}_{2k-2}(x_c)}{\Omega^{n/2} |\det \Phi_c''|^{1/2}} \frac{(\lambda^c)^2 (\lambda_1^c)^6}{B_c^3 \Omega}.$$

3.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.1. В силу определения δ_0 (2.24) и условий (2.26) выполняются и условия 2) теоремы 2.1. Начнем с преобразования критического вклада J_{kr}^c (2.16). Рассмотрим случай $2k > 3r - 1$ и запишем выражение J_{kr}^c в виде разложения по степеням Ω^{-1} :

$$\begin{aligned} J_{kr}^c &= \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{n/2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\kappa_c + i\Omega\Phi(x_c)}}{|\det \Phi_c''|^{1/2}} \\ &\times \left[\sum_{s=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \Omega^{-s} \sum_{\mu=0}^{2s} b_{\mu, \mu+s}^c + \sum_{s=\left[\frac{r-1}{2}\right]}^{k-r} \Omega^{-s} \sum_{\mu=0}^{r-1} b_{\mu, \mu+s}^c + \sum_{s=k-r+1}^{k-1} \Omega^{-s} \sum_{\mu=0}^{k-1-s} b_{\mu, \mu+s}^c \right]. \end{aligned}$$

Оценим две последние суммы в этом выражении. Так как $\|(\Phi_c'')^{-1}\| \leq B_c^{-1}$ и имеется оценка (3.17), то

$$|b_{\mu p}^c| \leq C_{\mu p} \frac{(\lambda^c)^\mu (\bar{\lambda}_1^c)^{2p}}{B_c^p} \bar{v}_{2p}^c,$$

где константа $\bar{\lambda}_1^c$ определена в (2.23) и $|v_{2p}(x_c)| \leq \bar{v}_{2p}^c$ (2.8). Отсюда, учитывая (2.26), получим оценку (2.31) и представление

$$(3.25) \quad J_{kr}^c = J_c^Q + \Delta_Q J_{kr}^c$$

с оценкой

$$(3.26) \quad |\Delta_Q J_{kr}^c| \leq C_{kr} \frac{\bar{v}_{2k-r}^c}{\Omega^{n/2} |\det \Phi_c''|^{1/2}} \left(\frac{(\lambda^c)^2 (\bar{\lambda}_1^c)^6}{B_c^3 \Omega} \right)^{Q+1}.$$

Случай $2k \leq 3r - 1$ рассматривается аналогично, и для него снова получаем (3.25) и (3.26). Величина $\Delta_Q J_{kr}^c$ дает второй член в оценке (2.30).

Покажем, что при сделанных предположениях для остаточного члена Δ_{Nkr}^P (2.17) справедлива оценка

$$|\Delta_{Nkr}^P| \leq C_n(T, \varepsilon_i, \theta_i) \Omega^{-T}.$$

Рассмотрим оценки (2.18). Используя (2.21) и то, что $B_0 \leq \lambda \lambda_1^2$, получим

$$|\Delta J_P| \leq C_{Pn} \|v\|_P \left(\frac{\lambda \lambda_1^2}{\Omega B_0^2 \delta_0^2} \right)^P (K_M + 1).$$

Принимая во внимание наш выбор δ_0 , P имеем $|\Delta J_P| \leq C_n(T, \varepsilon_i, \theta_i) \Omega^{-T}$. Условия (2.26) вместе с (2.27) позволяют прямо из (2.18) заключить, что $|\Delta J_{Nr}| \leq C_n(T, \varepsilon_i, \theta_i) \Omega^{-T}$. Для вывода оценки $|\Delta J_{kr}| \leq C_n(T, \varepsilon_i, \theta_i) \Omega^{-T}$ надо воспользоваться еще неравенством Адамара $|\det \Phi_c''| \geq C_n B_c^n$.

Предположим, что

$$\delta_c = \delta_0 = \lambda^{-1/3} \lambda_1^{-1} \Omega^{-1/3}, \quad \lambda \geq 1, \quad \lambda_1 \geq 1, \quad \Omega \geq \lambda \lambda_1^3.$$

Тогда все условия следствия 2.1 будут выполнены, если для некоторого ε ($0 < \varepsilon < 1/3$) выполняются условия

$$\begin{aligned} d(x_c, \partial M) &\geq \delta_0, \quad B_0 \geq \Omega^{-1/6+\varepsilon/2} \lambda^{5/6} \lambda_1^3, \\ G(x_{ex}) &\geq \Omega^{-1+\varepsilon} \lambda \lambda_1^2, \quad \min_{x \in \partial M} G(x) \geq \Omega^{-1+\varepsilon} \lambda \lambda_1^2. \end{aligned}$$

При этом из (3.26) следует, что

$$|\Delta_Q J_{kr}^c| \leq C_{kr} \frac{\bar{v}_{2k-2}^c}{\Omega^{n/2} |\det \Phi_c''|^{1/2}} \left(\frac{\lambda^{3/2}}{\Omega^{1/2-(3/2)\varepsilon}} \right)^{Q+1}.$$

Таким образом, если известны зависимости величин $x_c, x_{ex}, \lambda, \lambda_1, B_0$ от параметров, то можно явно указать область в пространстве параметров, в которой верно следствие 2.1. Заметим, что в этой области $|x_c - x_{c'}| \geq 2\delta_0$.

3.4. Метод С.Ф. для одномерных О.И. в случае вырожденных критических точек. В этом пункте доказывается аналог теоремы 2.1 для одномерных О.И. в случае вырожденных критических точек. Роль леммы 3.3 при этом играет лемма Эрдейи [1], которую мы приведем в уточненной формулировке.

ЛЕММА 3.4 (лемма Эрдейи) [1]. Пусть амплитуда u и ее производные $u^{(k)}$ непрерывны, ограничены при $k \leq \bar{k}-1$ и $u^{(k)} \in L^1$ при $k = 0, \dots, \bar{k}$. Тогда для любого N ($1 \leq N \leq \bar{k}$) при $\nu = 2, 3, 4, \dots$, $\Omega \in \mathbb{R}^1$, $\Omega \neq 0$, имеет место равенство

$$(3.27) \quad \int_0^\infty u(x) e^{i\Omega x^\nu} dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} \frac{\exp\left(\frac{i\pi(k+1)}{2\nu} \operatorname{sgn} \Omega\right)}{\nu |\Omega|^{\frac{k+1}{\nu}}} \Gamma\left(\frac{k+1}{\nu}\right) + R_N,$$

$$|R_N| \leq \frac{\Gamma(N/\nu)}{(N-1)!} \frac{\|u^{(N)}\|_{L^1}}{\nu \Omega^{N/\nu}},$$

и, следовательно, если ν четно и $\nu \geq 2$, то $\forall P \geq 1$, $2P \leq \bar{k}$,

$$(3.28) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{i\Omega x^\nu} dx = \sum_{p=0}^{P-1} \frac{2u^{(2p)}(0)}{(2p)!} \frac{e^{\frac{i\pi(2p+1)}{2\nu} \operatorname{sgn} \Omega}}{\nu |\Omega|^{\frac{2p+1}{\nu}}} + 2R_{2P},$$

а если ν нечетно, $\nu \geq 3$, то $\forall P$, $1 \leq P \leq \bar{k}$,

$$(3.29) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{i\Omega x^\nu} dx = \sum_{k=0}^{P-1} \frac{u^{(k)}(0) \left(e^{\frac{i\pi(k+1)}{2\nu} \operatorname{sgn} \Omega} + (-1)^k e^{-\frac{i\pi(k+1)}{2\nu} \operatorname{sgn} \Omega} \right)}{k! \nu |\Omega|^{\frac{k+1}{\nu}}} + R_P.$$

Доказательство см. в [1].

Рассмотрим одномерный О.И. $J[u]$ (1.6). Функцию $\psi_\mu \equiv \psi_\mu^c$ определим равенством (2.12), но теперь

$$h_c(x) = \Phi(x) - \Phi(x_c) - \frac{1}{\nu_c!} \Phi^{(\nu_c)}(x_c) \Delta x_c^{\nu_c} \quad (\Delta x_c = x - x_c).$$

Предположим, что все критические точки $x_c \in [a, b]$ конечнократны, т.е.

$$\Phi^{(1)}(x_c) = 0, \dots, \Phi^{(\nu_c-1)}(x_c) = 0, \quad |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)| \geq \Phi_c > 0, \quad \varkappa_c = \operatorname{sgn} \Phi^{(\nu_c)}(x_c).$$

Введем константы a_{cp} . При четном ν_c

$$a_{cp} = \begin{cases} 0 & (p - \text{нечетное}), \\ 2\Gamma\left(\frac{p+1}{\nu_c}\right) (\nu_c!)^{\frac{p+1}{\nu_c}} e^{\frac{i\pi}{2\nu_c}(p+1)\varkappa_c} (p! \nu_c)^{-1} & (p - \text{четное}), \end{cases}$$

а при нечетном ν_c

$$a_{cp} = \left(e^{\frac{i\pi(p+1)\varkappa_c}{2\nu_c}} + (-1)^p e^{-\frac{i\pi(p+1)\varkappa_c}{2\nu_c}} \right) (\nu_c!)^{\frac{p+1}{\nu_c}} \Gamma\left(\frac{p+1}{\nu_c}\right) (p! \nu_c)^{-1}.$$

Через $\tilde{\Phi}_1$ обозначается любая величина такая, что

$$(3.30) \quad \tilde{\Phi}_1 \leq \min_{x_c x_{ex}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Phi^{(\nu_c)}(x_c)| \delta_c^{\nu_c-1}}{(\nu_c-1)!}, |\Phi^{(1)}(x_{ex})|, |\Phi^{(1)}(a)|, |\Phi^{(1)}(b)| \right\},$$

где $x_{ex} \neq x_c$ определяются из уравнения $\Phi^{(2)}(x_{ex}) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для одномерного О.И. $J[u]$ (1.6) выполнены условия:

- 1) $(u, \Phi) \in \Lambda_{\bar{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, a)$, все критические точки $x_c \in [a, b]$ конечнократны ($\nu_c \leq \bar{\nu}$), их число $\leq K_m$ и $x_c \neq a, b$,
- 2) фиксированы числа $\delta_c \geq \delta_0 > 0$, $2\delta_c < \delta$ такие, что

$$(3.31) \quad \begin{aligned} |x_c - a| &\geq 2\delta_c, & |x_c - b| &\geq 2\delta_c & \forall x_c \in [a - \delta, b + \delta], \\ \delta_c &\leq \frac{1}{2} \frac{|\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|}{\bar{\Phi}^{(\nu_c+1)}}, & \delta_c &\leq a \leq 1, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\lambda_1^c \geq 1, \quad \lambda^c \Omega \geq 1.$$

Тогда для любых δ_c , удовлетворяющих условию 2), и любых целых чисел $P \geq 1$, $N_c \geq 1$, $r_c \geq 1$, $k_c \geq 1$ таких, что

$$r_c(\nu_c^2 - 1) \geq N_c(\nu_c^2 - 2), \quad N_c \geq \nu_c, \quad \bar{\alpha} \geq \max_{x_c} \{P + 1, N_c + 1, 2k_c + 2\},$$

О.И. $J[u]$ (1.6) можно представить в виде

$$(3.32) \quad J[u] = \sum_{x_c \in [a, b]} J_{kr}^c + J_{ab}^P + \Delta_{Nkr}^P.$$

В этой формуле граничный член

$$(3.33) \quad J_{ab}^P = - \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{i}{\Omega} \right)^{p+1} [A_{\Phi}^p(u)(\Phi^{(1)})^{-1} e^{i\Omega\Phi}]_a^b$$

и остаточный член

$$\Delta_{Nkr}^P = \Delta J_P + \Delta J_{Nr} + \Delta J_{kr}.$$

Критический вклад

$$(3.34) \quad J_{kr}^c = e^{i\Omega\Phi(x_c)} \sum_{\mu=0}^{r_c-1} \frac{(i\Omega)^\mu}{\mu!} \sum_{p \geq \mu(\nu_c+1)}^{2k_c-1} \frac{(\psi_\mu^{(p)})(x_c) a_{cp}}{\Omega^{\frac{p+1}{\nu_c}} |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|^{\frac{p+1}{\nu_c}}}.$$

При этом для ΔJ_P справедлива оценка (2.18), а для ΔJ_{Nr} , ΔJ_{kr} — оценки

$$(3.35) \quad |\Delta J_{Nr}| \leq \sum_{x_c \in [a, b]} \frac{C_{N_c r_c} \bar{\nu}_{N_c, c} (\lambda^c)^{r_c + N_c} (\lambda_1^c)^{r_c(\nu_c+1) + 2\nu_c N_c} \delta_c^{\sigma_c + 1}}{\Omega^{N_c - r_c} |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|^{2N_c}} \left(\sigma_c = r_c(\nu_c + 1) - N_c \frac{\nu_c^2 - 2}{\nu_c - 1} \right),$$

$$(3.36) \quad |\Delta J_{kr}| \leq \sum_{x_c \in [a, b]} \frac{C_{k_c r_c} \bar{\nu}_{2k_c, c} \delta_c^{-2k_c+1} (\lambda^c)^{r_c-1}}{\Omega^{\frac{2k_c}{\nu_c} + 1 - r_c} |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|^{\frac{2k_c}{\nu_c}}}.$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 2.1. Функция F_s теперь определяется равенством

$$F_s(x) = (\nu_c!)^{-1} \Phi^{(\nu_c)}(x_c) \Delta x_c^{\nu_c} + s \cdot h_c(x) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

Условие (3.31) позволяет рассмотреть разбиение единицы $E(x_c, \delta_c)$. В равенстве

$$J[u] = \sum_{x_c} J[\rho_c u] + J[\tilde{\rho} u]$$

объемный член имеет вид

$$J[\tilde{\rho} u] = J_{ab}^P + \Delta J_P.$$

Величина ΔJ_P оценивается точно так же, как в теореме 2.1, с учетом того, что $G(x) = (\Phi^{(1)}(x))^2$.

Для $J[\rho_c u]$ имеет место равенство (3.16), и, как и в теореме 2.1, задача состоит в оценке величины $A_{F_s}^N(\rho_c \psi_\mu^c)(x)(\psi_\mu = u(h_c)^\mu)$. Фиксируем точку x_c и для краткости опустим индекс c у величин ν, r, N . Для производной $(h_c)^{(m)}$ снова имеется оценка (3.17) и

$$(3.37) \quad |(\rho_c \psi_\mu)^{(p)}(x)| \leq C_{pr} \bar{v}_{p,c} \lambda_c^r (\lambda_1^c)^{r(\nu+1)} |\Delta x_c|^{r(\nu+1)-p} \\ (p \leq r(\nu+1), |\Delta x_c| \leq 2\delta_c).$$

Точную формулу (3.2) в одномерном случае можно записать в виде

$$(3.38) \quad A_{\Phi}^N(f) = \sum_{p=0}^N f^{(p)} \sum_{j=0}^{N-p} (\Phi^{(1)})^{-N-1} \sum_{jp} [\Phi], \\ \sum_{jp} [\Phi] = \sum_{(n)} (\Phi^{(2)})^{n_2} \dots (\Phi^{(N+1)})^{n_{N+1}} C_{(n)},$$

где суммирование ведется по всем наборам $(n) = (n_2, \dots, n_{N+1})$ таким, что $n_i \geq 0$,

$$n_2 + \dots + n_{N+1} = j, \quad 2n_2 + 3n_3 + \dots + (N+1)n_{N+1} = N + j - p.$$

При $N \geq \bar{\nu}$, используя оценки

$$|F_s^{(k)}(x)| \leq \begin{cases} 2|\Phi^{(\nu_c)}(x_c)| |\Delta x_c|^{\nu-k}, & 2 \leq k \leq \nu, \\ \lambda \lambda_1^k, & k \geq \nu+1, \end{cases}$$

получим, что

$$\left| \sum_{jp} [\Phi] \right| \leq \sum_{(n)} |\Phi^{(\nu)}(x_c)|^{n_1 + \dots + n_\nu} (\lambda^c)^{n_{\nu+1} + \dots + n_{N+1}} (\lambda_1^c)^{(\nu+1)n_{\nu+1} + \dots + (N+1)n_{N+1}} \\ \times |\Delta x_c|^{(\nu-2)j + t_\nu} C_{jp(n)}^\nu, \\ t_\nu = (\nu-2)j - n_2(\nu-2) - n_3(\nu-3) - \dots - n_{\nu-1} \quad (\nu \geq 3), \quad t_2 = 0.$$

Отсюда следует оценка сверху для t_ν

$$t_\nu \leq \frac{\nu-2}{\nu-1}(N-p).$$

Используя, что $\lambda_1^c \geq 1$, $N \geq \nu$, $|\Phi^{(\nu_c)}(x_c)| \leq \lambda^c(\lambda_1^c)^\nu$, получим

$$\left| \sum_{jp} [\Phi] \right| \leq C_{jp\nu} |\Delta x_c|^{(\nu-2)j - \frac{\nu-2}{\nu-1}(N-p)} (\lambda^c)^j (\lambda_1^c)^{j(\nu-2) + N + j - p - \frac{\nu-2}{\nu-1}(N-p)}.$$

Это вместе с (3.37) дает нужную оценку

$$\begin{aligned} |A_{F_s}^N(\rho_c \Psi_r)| &\leq C_{Nr\nu} \bar{\nu}_{N,c} (\lambda^c)^r (\lambda_1^c)^{r(\nu+1)} |\Delta x_c|^{r(\nu+1) - \frac{\nu^2-2}{\nu-1}N} \\ &\times \sum_{p=0}^N \sum_{j=0}^{N-p} |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|^{-2j - \frac{p}{\nu-1}} (\lambda^c)^{2j - N + \frac{p}{\nu-1}} (\lambda_1^c)^{j\nu - p - p\frac{\nu-2}{\nu-1}}. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.1, получим для $\sum_c J[\rho_c u]$ равенство (3.19) с оценкой (3.35) для ΔJ_{Nr} . Величины $I_c^{(\mu)}(0)$ в (3.19) теперь определяются равенствами

$$\begin{aligned} I_c^{(\mu)}(0) &= (i\Omega)^\mu \int \rho_c \psi_\mu e^{i\Omega F_0} dx, \\ F_0 = F_s|_{s=0} &= (\nu_c!)^{-1} \Phi^{(\nu_c)}(x_c) (\Delta x_c)^{\nu_c}. \end{aligned}$$

По лемме Эрдейи (3.28) (3.29)

$$(3.39) \quad I_c^{(\mu)}(0) = \sum_{p=0}^{2k-1} \frac{\psi_\mu^{(p)}(x_c) a_{cp}}{\Omega^{\frac{p+1}{\nu}} |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|^{\frac{p+1}{\nu}}} + \Delta I_{\mu k}^c$$

с оценкой

$$|\Delta I_{\mu k}^c| \leq \frac{\Omega^\mu}{(2k-1)!} \frac{\Gamma\left(\frac{2k}{\nu}\right) (\nu!)^{\frac{2k}{\nu}}}{\nu! |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|^{\frac{2k}{\nu}} \Omega^{\frac{2k}{\nu}}} \|(\rho_c \psi_\mu)^{(2k)}\|_{L^1}.$$

При $\delta_c \lambda_1^c \leq 1$

$$|(\rho_c \psi_\mu)^{(2k)}(x)| \leq C_{\mu k \nu} \bar{\nu}_{2k,c} (\lambda^c)^\mu \delta_c^{-2k},$$

и, следовательно,

$$(3.40) \quad |\Delta I_{\mu k}^c| \leq \frac{C_{\mu k \nu} \bar{\nu}_{2k,c} (\lambda^c)^\mu \delta_c^{-2k+1}}{\Omega^{\frac{2k}{\nu} - \mu} |\Phi^{(\nu_c)}(x_c)|^{\frac{2k}{\nu}}}.$$

Подставляя (3.39) в (3.19), снова получим (3.20), и при этом

$$\Delta J_{kr} = \sum_{x_c} e^{i\Omega \Phi(x_c)} \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{\Delta I_{\mu k}^c}{\mu!}.$$

Остается воспользоваться (3.40), чтобы получить оценку (3.36). Завершает доказательство замечание, что

$$\psi_\mu^{(p)}(x_c) = 0, \quad p < \nu(\mu + 1).$$

Это позволяет в (3.34) ограничить снизу область суммирования по p .

Не представляет труда доказать аналог следствия 2.1 для теоремы 3.1, но мы не будем этим заниматься.

Рассмотрим, как изменится формулировка теоремы 3.1, если в точке $x_c = x_0$ нарушается гладкость функции u . Пусть при этом функция u остается кусочно-гладкой, но некоторая ее производная имеет в точке x_0 разрыв первого рода. Доказательство в этом случае – то же, но нужно пользоваться формулой (3.27) из леммы Эрдейи. Тогда получаем, что в утверждении теоремы 3.1 достаточно произвести два изменения: во-первых, в граничном члене J_{ab}^P (3.33) необходимо заменить $A_\Phi^p[u]$ на $A_\Phi^p[\rho_0 u]$, во-вторых, в выражении J_{kr}^c (3.34), отвечающем точке $x_c = x_0$, надо заменить $\psi_\mu^{(p)}(x_c)$ на $\tilde{\psi}_\mu^{(p)}(x_0)$ и a_{cp} на $\tilde{a}_{0p}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\mu^{(p)}(x_0) &= \begin{cases} \psi_\mu^{(p)}(x_0 - 0)(-1)^p + \psi_\mu^{(p)}(x_0 + 0) & (\nu_0 - \text{четное}), \\ \psi_\mu^{(p)}(x_0 - 0)(-1)^p e^{-\frac{i\pi(p+1)\kappa_0}{2\nu_0}} + \psi_\mu^{(p)}(x_0 + 0) & (\nu_0 - \text{нечетное}), \end{cases} \\ \tilde{a}_{0p} &= \frac{(\nu_0!)^{\frac{p+1}{\nu_0}} \Gamma\left(\frac{p+1}{\nu_0}\right)}{p! \nu_0} e^{\frac{i\pi(p+1)\kappa_0}{2\nu_0}}. \end{aligned}$$

Легко подсчитать порядок главного члена J_0^c асимптотического разложения J_{kr}^c при $\Omega \rightarrow \infty$. Пусть

$$u^{(p)}(x_c) = 0, \quad p \leq k-1, \quad u^{(k)}(x_c) \neq 0.$$

Тогда для нечетных ν

$$(3.41) \quad J_0^c = C_{k\nu}[u, \Phi] \Omega^{-\frac{k+1}{\nu}}.$$

Если ν – четные и

$$u^{(p)}(x_c) = 0, \quad p \leq 2j-2,$$

$u^{(2j-1)}(x_c) \neq 0$ или $u^{(2j)}(x_c) \neq 0$, то

$$(3.42) \quad J_0^c = C_{j\nu}[u\Phi] \Omega^{-\frac{2j+1}{\nu}}.$$

Явный вид величин $C_{k\nu}[u, \Phi]$, $C_{j\nu}[u, \Phi]$ может быть получен из (3.34).

§ 4. Элементарные составные оценки одномерных осциллирующих интегралов

В этом параграфе будут доказаны теоремы 2.2, 2.3, сформулированные в пп. 2.2, 2.3, где приведены все нужные определения. Теорема 2.2 указывает стратегию получения и вид составных оценок одномерных О.И. В конкретных случаях прямое использование лемм из п. 4.1 часто позволяет получить более точные результаты.

4.1. Основные леммы. В §3 при построении разбиений единицы $E(x_p, \delta_p)$ использовали гладкие функции $\rho_p \in C_0^\infty$ (3.3). В доказательстве теоремы 2.2 и леммы 4.1–4.3 будут использоваться *кусочно-гладкие функции*

$$\rho_p(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_p| \leq \delta_p, \\ 0, & |x - x_p| > \delta_p. \end{cases}$$

В этом случае мы говорим, что на интервале $[a - \delta, b + \delta]$ задано разбиение единицы $E(x_p, \delta_p)$, $p = 1, \dots, P$, с центрами в точках $x_p \in [a - \delta, b + \delta]$ и масштабами $\delta_p \geq \delta_0 > 0$, если

$$|x_p - x_{p'}| > \delta_p + \delta_{p'}.$$

Определяя функцию $\tilde{\rho}$ из равенства

$$(4.1) \quad 1 = \tilde{\rho}(x) + \sum_{p=1}^P \rho_p(x),$$

получим, что

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_p| > \delta_p, \\ 0, & |x - x_p| \leq \delta_p. \end{cases}$$

При $P = 0$ по определению будем считать, что $\{x_p\} = \emptyset$, $\tilde{\rho} = 1$. Основой всех дальнейших оценок служит

ЛЕММА 4.1. Пусть при $t \subset U \subset T$ существует разбиение единицы $E(x_p, \delta_p)$ такое, что

- 1) при $|x - x_p| \leq \delta_p$ фаза Φ имеет $\nu_p \geq 2$ непрерывных производных и

$$|\Phi^{(\nu_p)}(x)| \geq \Phi_p \quad (|x - x_p| \leq \delta_p),$$

- 2) при $|x - x_p| > \delta_p$ первая производная $\Phi^{(1)}$ непрерывна и

$$|\Phi^{(1)}(x)| \geq \tilde{\Phi}_1 \quad (|x - x_p| > \delta_p \quad \forall p).$$

Тогда если $(u, \Phi) \in \{m, M\}$, то для одномерного О.И. $J[u]$ (1.6) имеет место оценка

$$(4.2) \quad |J[u]| \leq \sum_{p=1}^P \frac{m_p \bar{u}_p C(\nu_p)}{(\Omega \Phi_p)^{1/\nu_p}} + \frac{C \bar{u} (P + m[u] + m[\Phi^{(1)}])}{\Omega \tilde{\Phi}_1},$$

если $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1 n_2)$, то

$$(4.3) \quad |J[u]| \leq \sum_{p=1}^P \frac{(|u(x_p)| + 4\delta_p \bar{u}_p^{(1)} + \sum_n |\Delta_n|)}{(\Omega \Phi_p)^{1/\nu_p}} \cdot C(\nu_p) + \frac{C m[\Phi^{(1)}] (\bar{u} + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n|)}{\Omega \tilde{\Phi}_1},$$

u , наконец, если $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$, то

$$(4.4) \quad |J[u]| \leq \sum_{p=1} \frac{\left(|u(x_p)| + 4\delta_p \bar{u}_p^{(1)} + \sum_n^p |\Delta_n|\right) C(\nu_p)}{(\Omega \Phi_p)^{1/\nu_p}} + \left(\bar{u} + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum \Delta_n\right) \frac{1}{\Omega} \left[\frac{P+1}{\tilde{\Phi}_1} + \frac{\|\Phi^2\|_{L^1}}{(\tilde{\Phi}_1)^2}\right].$$

В этих формулах $C(\nu_p) \leq C\nu_p$, $\sum_n^p |\Delta_n|$ – сумма скачков (см. п. 2.2) амплитуды u в интервале $|x - x_p| \leq \delta_p$ и $\bar{u}_p$, $u_p^{(1)}$ – константы в оценках $|u(x)| \leq \bar{u}_p$, $|u^{(1)}(x)| \leq \bar{u}_p^{(1)}$ при $|x - x_p| \leq \delta_p$. Если $P = 0$, то по определению $\sum_{p=1}^P \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разбиение единицы $E(x_p, \delta_p)$, запишем О.И. $J[u]$ (1.6) в виде

$$J[u] = \sum_p J[\rho_p u] + J[\tilde{\rho} u].$$

Члены под знаком $\sum_p$ в оценках (4.2)–(4.4) отвечают различным оценкам интегралов $J[\rho_p u]$, а второй член в этих оценках – различным оценкам интегралов $J[\tilde{\rho} u]$. При доказательстве используются результаты и методы, изложенные в § 1 главы 1 книги [4].

Рассмотрим интеграл $J[\rho_p u]$. В силу [4, гл. 1, § 1, следствие 1] при $(u, \Phi) \in \{m, M\}$ получаем оценку

$$(4.5) \quad |J[\rho_p u]| \leq \bar{u}_p \min \left\{ 2\delta_p, \frac{C(\nu_p)m_p}{(\Omega \Phi_p)^{1/\nu_p}} \right\} \quad (C(\nu_p) \leq 24 \cdot (2\pi)^{1/\nu_p} \nu_p),$$

используемую в (4.2). Чтобы рассмотреть два других случая, воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} u(x) e^{i\Omega \Phi(x)} dx &= u(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\Omega \Phi} dx + \sum_{x_n \in (\alpha, \beta)} \Delta_n(u) \int_{x_n}^{\beta} e^{i\Omega \Phi} dx \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta} u^{(1)} \left[\int_x^{\beta} e^{i\Omega \Phi(\xi)} d\xi \right] dx \\ &(\Delta_n(u) = u(x_n + 0) - u(x_n - 0)), \end{aligned}$$

из которого следует оценка

$$(4.6) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} u e^{i\Omega \Phi} dx \right| \leq I(\alpha, \beta) \left[|u(\alpha)| + \sum_{x_n \in (\alpha, \beta)} |\Delta_n| + \|u^{(1)}\|_{L^1(\alpha, \beta)} \right],$$

$$I(\alpha, \beta) \equiv \max_{y \in (\alpha, \beta)} \left| \int_y^{\beta} e^{i\Omega \Phi} dx \right|.$$

При $\alpha = x_p - \delta_p$, $\beta = x_p + \delta_p$ из леммы 2 § 1 [4] получаем, что

$$I(\alpha, \beta) \leq \min \left\{ 2\delta_p, \frac{C(\nu_p)}{(\Omega \Phi_p)^{1/\nu_p}} \right\},$$

и, таким образом, при $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1, n_2)$ или $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$

$$(4.7) \quad |J[\rho_p u]| \leq C(\nu_p) \left(|u(x_p)| + 4\delta_p \bar{u}_p^{(1)} + \sum_n^p |\Delta_n| \right) (\Omega \Phi_p)^{-1/\nu_p}.$$

Эти оценки используются в (4.3) и (4.4). Оценим интеграл $J[\tilde{\rho}u]$, который естественно назвать *объемным вкладом*. Пусть $(u, \Phi) \in \{m, M\}$. Разобьем множество $[a - \delta, b + \delta] \setminus \bigcup_p [x_p - \delta_p, x_p + \delta_p]$ на интервалы $[y_i, y_{i+1}]$, в каждом из которых обе функции $u, \Phi^{(1)}$ монотонны. Число N этих интервалов легко оценивается: $N \leq 1 + m[u] + m[\Phi^{(1)}] + P$. Запишем интеграл $J[\tilde{\rho}u]$ в виде

$$J[\tilde{\rho}u] = \sum_i J_i, \\ J_i = \int_{y_i}^{y_{i+1}} u e^{i\Omega\Phi} dx = \left[u \int_{y_i}^x e^{i\Omega\Phi(\xi)} u(\xi) d\xi \right]_{y_i}^{y_{i+1}} - \int_{y_i}^{y_{i+1}} \left(\int_{y_i}^x e^{i\Omega\Phi(\xi)} d\xi \right) du.$$

Так как u — монотонная функция в интервале $[y_i, y_{i+1}]$, то ее полное изменение в этом интервале не больше $2\bar{u}$ и, следовательно,

$$|J_i| \leq 3\bar{u} I(y_i, y_{i+1}) \leq \frac{12\bar{u}}{\Omega \tilde{\Phi}_1}$$

по второй теореме о среднем. Используя приведенную выше оценку числа N , получим, что

$$(4.8) \quad |J[\tilde{\rho}u]| \leq C \frac{\bar{u}(P + m[u] + m[\Phi^{(1)}])}{\Omega \tilde{\Phi}_1}.$$

Нужный результат (4.2) следует из (4.5) и (4.8).

Чтобы рассмотреть случаи $(u, \Phi) \in L_m^1(n_1, n_2)$; $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$, воспользуемся вытекающей из (4.6) оценкой

$$(4.9) \quad |J[\tilde{\rho}u]| \leq \sum_{j=0}^P \left[|u(x_j + \delta_j)| + \sum_{x_n \in (x_j + \delta_j, x_{j+1} - \delta_{j+1})} |\Delta_n| + \|u^{(1)}\|_{L^1(x_j + \delta_j, x_{j+1} - \delta_{j+1})} \right] \\ \times I(x_j + \delta_j, x_{j+1} - \delta_{j+1}),$$

где по определению $x_0 + \delta_0 = a, x_{P+1} - \delta_{P+1} = b$. Если (α, β) — интервал монотонности функции $\Phi^{(1)}$, то по второй теореме о среднем

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\Omega\Phi} dx \right| \leq I(\alpha, \beta) \leq \frac{4m_{(\alpha\beta)}[\Phi^{(1)}]}{\Omega \tilde{\Phi}_1(\alpha, \beta)} \quad (\Phi^{(1)}(x) \geq \tilde{\Phi}_1(\alpha, \beta), \quad x \in (\alpha, \beta))$$

и из (4.9) получаем нужную оценку при $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1, n_2)$

$$(4.10) \quad |J[\tilde{\rho}u]| \leq C \frac{[\bar{u} + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n|] m[\Phi^{(1)}]}{(\Omega \tilde{\Phi}_1)}.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$(4.11) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\Omega\Phi} dx \right| \leq \frac{2}{\Omega \tilde{\Phi}_1(\alpha, \beta)} + \frac{1}{\Omega} \frac{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1(\alpha, \beta)}}{\tilde{\Phi}_1(\alpha, \beta)^2},$$

и используя эту оценку для величин $I(x_i + \delta_i, x_{i+1} - \delta_{i+1})$, входящих в (4.9), получим, что при $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$

$$(4.12) \quad |J[\tilde{\rho}u]| \leq \frac{C}{\Omega} \left(\bar{u} + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n| \right) \left(\frac{P+1}{\tilde{\Phi}_1} + \frac{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}}{(\tilde{\Phi}_1)^2} \right).$$

Оценки (4.10), (4.12) вместе с (4.7) и дают нужные результаты (4.3) (4.4).

Чтобы сформулировать лемму 4.2, введем некоторые определения. Пусть x_c – невырожденная критическая точка и фиксированы числа $\delta_c > 0$. Величина

$$(4.13) \quad \Delta_c \leq \frac{1}{4} \frac{|\Phi^{(2)}(x_c)|}{\overline{\Phi}_c^{(3)}} \quad (|\Phi^{(3)}(x)| \leq \overline{\Phi}_c^{(3)}, \quad |x - x_c| \leq 2\delta_c)$$

характеризует размер окрестности точки x_c , в которой функция $\Phi^{(1)}$ монотонна. Из разложения в ряд Тейлора следует, что

$$(4.14) \quad \begin{aligned} |\Phi^{(2)}(x)| &\geq \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_c)| & (|x - x_c| \leq 2\Delta_c), \\ |\Phi^{(1)}(x)| &\geq \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_c)| |x - x_c| & (|x - x_c| \leq 2\Delta_c), \end{aligned}$$

а отсюда вытекает оценка снизу расстояния между невырожденными критическими точками

$$(4.15) \quad |x_c(t) - x_{c'}(t)| \geq (\Delta_c + \Delta_{c'}), \quad t \in V_i,$$

где область V_i определена в (2.34) и K_i – число критических точек при $t \in V_i$. Через x_{ex} обозначим экстремальные точки функции $\Phi^{(1)}$ ($\Phi^{(2)}(x_{ex}) = 0$). Если задано разбиение единицы $E(x_p, \delta_p)$, то функцию $\Phi_{\Delta}^1(t)$ определим с помощью соотношения

$$(4.16) \quad \Phi_{\Delta}^1(t) = \min_{x_{ex}} \{ |\Phi^{(1)}(x_{ex})|, |\Phi^{(1)}(a)|, |\Phi^{(1)}(b)| \},$$

где минимум берется по всем x_{ex} таким, что $|x_p - x_{ex}| \geq \delta_p$, и $|\Phi^{(1)}(a)|$ ($|\Phi^{(1)}(b)|$) в правой части (4.16) надо опустить, если $|x_p - a| < \delta_p$ ($|x_p - b| < \delta_p$).

ЛЕММА 4.2. Пусть $t \in V_i$, где множество $V_i \subset T$ определено выше (2.34), $x_c \equiv x_c(t) \in [a - \delta, b + \delta]$ – невырожденные критические точки и $\delta_c \equiv \delta_c(t)$ – любые числа, удовлетворяющие условиям

$$(4.17) \quad \delta_c \leq \Delta_c \leq \frac{1}{4} \frac{|\Phi^{(2)}(x_c)|}{\tilde{\Phi}_c^{(3)}}.$$

Тогда если функции u , Φ принадлежат одному из трех классов $\{m, M\}$, $L_M^1(n_1, n_2)$, $L^1(n_1, n_2, n_3)$, определенных в п. 2.2, то выполняется равномерная по t оценка

$$(4.18) \quad |J[u]| \leq C_1 \sum_{x_c} \frac{A_c[u]}{|\Omega \Phi^{(2)}(x_c)|^{1/2}} + C_2 \frac{A[u, \Phi]}{\Omega}.$$

Если $(u, \Phi) \in \{m, M\}$, то

$$(4.19) \quad A_c[u] \leq m_c \bar{u}_c, \quad A[u, \Phi] \leq (m[u] + m[\Phi^{(1)}] + K_i) \tilde{\Phi}_1^{-1}, \\ \tilde{\Phi}_1 \leq \min_{x_c} \left\{ \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_c)| \delta_c, \Phi_\Delta^1(t) \right\},$$

где $\Phi_\Delta^1(t)$ – величина, определенная в (4.16) при $E(x_p, \delta_p) = E(x_c, \delta_c)$.

Если $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1, n_2)$, то

$$(4.20) \quad A_c[u] \leq |u(x_c)| + \|u^{(1)}\|_c + \sum_n^c |\Delta_n| \leq |u(x_c)| + 4\delta_c \bar{u}_c^{(1)} + \sum_n^c |\Delta_n|,$$

$$(4.21) \quad A[u, \Phi] \leq \left(\bar{u} + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n| \right) m[\Phi^{(1)}] (\tilde{\Phi}_1)^{-1}.$$

Если $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$, то величина $A_c[u]$ удовлетворяет оценке (4.20) и

$$(4.22) \quad A[u, \Phi] \leq \left(\bar{u} + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n| \right) (\Phi_1)^{-1} (K_i + 1), \\ \Phi_1 \leq \min_{x_c} \left\{ \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_c)| \delta_c, \frac{(|\Phi^{(2)}(x_c)| \Delta_c)^2}{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}}, \frac{(\Phi_\Delta^1(t))^2}{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.15) и условия (4.17) определено разбиение единицы $E(x_c, \delta_c)$ и

$$J[u] = \sum_{x_c} J[\rho_c u] + J[\tilde{\rho} u].$$

Первый член в (4.18) соответствует оценке $J[\rho_c u]$, а второй – $J[\tilde{\rho} u]$. В случае $(u, \Phi) \in \{m, M\}$ или $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1, n_2)$ достаточно применить лемму 4.1 при $x_p = x_c$, $\delta_p = \delta_c$, $\Phi_p = \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_c)|$ (см. (4.14)) и заметить, что $|\Phi^{(1)}(x)| \geq \tilde{\Phi}_1$ при $|x - x_c| \geq \delta_c$, где величина $\tilde{\Phi}_1$ удовлетворяет (4.19). В случае $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$ оценка $J[\tilde{\rho} u]$ с таким $\tilde{\Phi}_1$ будет квадратична по δ_c^{-1} . Чтобы получить линейную по δ_c^{-1}

оценку (4.22), в интеграле $J[\tilde{\rho}u]$ отдельно рассматриваются оценки в интервалах вида $[x_c + \delta_c, x_c + \Delta_c]$ ($[x_c - \Delta_c, x_c - \delta_c]$) и интервалах $[x_c + \Delta_c, x_{c+1} - \Delta_{c+1}]$. В интервалах $[x_c + \delta_c, x_c + \Delta_c]$ ($[x_c - \Delta_c, x_c - \delta_c]$) функция $\Phi^{(1)}$ монотонна и $|\Phi^{(1)}(x)| \geq C|\Phi^{(2)}(x_c)|\delta_c$. Оценка вклада этих интервалов в $J[\tilde{\rho}u]$ сводится, как в лемме 4.1, к оценке величин $I(x_c + \delta_c, x_c + \Delta_c)$, $(I(x_c - \Delta_c, x_c - \delta_c))$, которые оцениваются по второй теореме о среднем. Оценка вклада интервалов $[x_c + \Delta_c, x_{c+1} - \Delta_{c+1}]$ также сводится к оценке величин $I[x_c + \Delta_c, x_{c+1} - \Delta_{c+1}]$, которые оцениваются интегрированием по частям (4.11). При этом используется то, что в каждом таком интервале

$$|\Phi^{(1)}(x)| \geq \min \left\{ \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_c)| \Delta_c, \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_{c+1})| \Delta_{c+1}, \Phi_{\Delta}^1(t) \right\}.$$

Чтобы использовать лемму 4.2, необходимо кроме критических точек знать еще и экстремальные точки x_{ex} . При их определении могут возникнуть трудности и в таком случае может быть полезно простое дополнение к лемме 4.2. Заметим также, что если известно число N_{ex} экстремальных точек, то $m[\Phi^{(1)}] \leq N_{ex} + 1$.

ДОПОЛНЕНИЕ К ЛЕММЕ 4.2. Пусть при всех $x \in \text{supp } u$

$$(4.23) \quad |\Phi^{(1)}(x)| \geq |\Psi(x)|$$

и функция Ψ имеет по крайней мере две производные. Введем величины

$$\tilde{\Delta}_c \leq \frac{1}{4} \frac{|\Psi^{(1)}(x_c)|}{\overline{\Psi}_c^{(2)}} \quad (|\Psi^{(2)}(x)| \leq \overline{\Psi}_c^{(2)}, \quad |x - x_c| < 2\tilde{\Delta}_c).$$

Тогда если выполняются условия

$$\delta_c \leq \tilde{\Delta}_c, \quad \Psi(x) \geq \tilde{\Psi} \quad (|x - x_c| \geq \delta_c),$$

то в оценках леммы 4.2 можно взять $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Psi}$, где $\tilde{\Psi}$ — любая константа такая, что

$$(4.24) \quad \tilde{\Psi} \leq \min \left\{ \frac{1}{2} |\Psi(x_c)| \delta_c, \Psi_{\Delta} \right\}, \quad \Psi_{\Delta} = \min_{x_{ex}^1} \{ |\Psi(x_{ex}^1)|, |\Psi(a)|, |\Psi(b)| \},$$

где x_{ex}^1 — экстремальные точки функции Ψ ($\Psi^{(1)}(x_{ex}) = 0$ такие, что $|x_{ex}^1 - x_c| \geq \delta_c$). В определении Ψ_{Δ} надо опустить $|\Psi(a)|$ ($|\Psi(b)|$), если $|x_c - a| \leq \delta_c$ ($|x_c - b| \leq \delta_c$).

В случае $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$ в оценке (4.22) в качестве Φ_1 можно взять любую величину такую, что

$$(4.25) \quad \Phi_1 \leq \min \left\{ \frac{1}{2} |\Phi^{(2)}(x_c)| \delta_c, \frac{(|\Psi^{(1)}(x_c)| \Delta_c^0)^2}{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}}, \frac{(\Psi_{\Delta})^2}{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}} \right\}.$$

В этой формуле $\Delta_c^0 = \min\{\tilde{\Delta}_c, \Delta_c\}$ и условие $\delta_c \leq \tilde{\Delta}_c$ можно в этом случае опустить.

Оценки $J[u]$ вблизи каустики получаются с помощью леммы 4.3 — леммы об устойчивости. Эта лемма дает условия, при которых оценка в точке $t = t_0$ будет верна в некоторой окрестности $T_0 \subset T$ этой точки, и указывает размер этой окрестности.

Фиксируем точку $t_0 \in T$, и пусть функция Φ_0 ($\Phi_0(x) \equiv \Phi(x, t_0)$) имеет K_0 критических точек x_{0c} кратности $\nu_{0c} - 1$:

$$\Phi_0^{(1)}(x_{0c}) = 0, \dots, \Phi_0^{(\nu_{0c}-1)}(x_{0c}) = 0, \Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c}) \neq 0.$$

Введем величину $\Phi_{0\Delta}^1$ следующим образом:

$$\Phi_{0\Delta}^1 \equiv \Phi_{\Delta}^1(t_0) \quad (E(x_p, \delta_p) = E(x_{0c}, \delta_{0c})).$$

Как и выше, считаем, что

$$(4.26) \quad \begin{aligned} |\Phi_0^{(\nu_{0c}+1)}(x)| &\leq (\bar{\Phi}_0^{(\nu_{0c}+1)})_{0c} \quad (|x - x_{0c}| \leq 2\delta_{0c}), \\ |\Phi_0^{(\nu_{0c}+1)}(x)| &\leq \bar{\Phi}_0^{(\nu_{0c}+1)} \quad (a - \delta \leq x \leq b + \delta). \end{aligned}$$

Если

$$\Delta_{0c} \leq \frac{1}{4} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|}{(\bar{\Phi}_0^{(\nu_{0c}+1)})_{0c}}, \quad \delta_{0c} \leq \Delta_{0c},$$

то справедливы оценки

$$(4.27) \quad \begin{aligned} |\Phi_0^{(1)}(x)| &\geq \frac{3}{4} |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| |x - x_{0c}|^{\nu_{0c}-1} \quad (|x - x_{0c}| \leq 2\Delta_{0c}), \\ |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x)| &\geq \frac{3}{4} |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| \quad (|x - x_{0c}| \leq 2\Delta_{0c}), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(4.28) \quad |x_{0c} - x_{oc'}| \geq (\Delta_{0c} + \Delta_{oc'}).$$

ЛЕММА 4.3. Пусть при $t \in T_0$ фаза Φ имеет по крайней мере $\max(\nu_{0c} + 1)$ производных, функции $\Phi^{(1)}, \Phi^{(\nu_{0c})}$ дифференцируемы по t и при этом

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\partial_k \Phi^{(\nu_{0c})}(x, t)| &\leq D_{0c}^\nu \quad (|x - x_{0c}| \leq \delta_{0c}, \quad t \in T_0), \\ \sum_{k=1}^n |\partial_k \Phi^{(1)}(x, t)| &\leq D^1, \quad \left(x \in [a - \delta, b + \delta], \quad t \in T_0, \quad \left(\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial t_k} \right) \right), \end{aligned}$$

$\delta_{0c} > 0$ – любые числа такие, что

$$(4.30) \quad \delta_{0c} \leq \Delta_{0c} \leq \frac{1}{4} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|}{(\Phi_0^{(\nu_{0c}+1)})_{0c}},$$

и область T_0 такова, что при $t \in T_0$

$$(4.31) \quad \begin{aligned} D_{0c}^\nu |t - t_0| &\leq \frac{1}{4} |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| \quad (\forall x_{0c}), \\ D^1 |t - t_0| &\leq \frac{1}{4} \tilde{\Phi}_{01}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Phi}_{01}$ любая величина, удовлетворяющая условию

$$(4.32) \quad \tilde{\Phi}_{01} \leq \min_{x_{0c}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|}{(\nu_{0c} - 1)!} \delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}, \Phi_{0\Delta}^1 \right\}.$$

Тогда если пара (u, Φ) принадлежит одному из классов $\{m, M\}$, $L_M^1(n_1, n_2)$, $L^1(n_1, n_2, n_3)$, то в области T_0 равномерно по t

$$(4.33) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{0c}} \frac{A_{0c}[u]C(\nu_{0c})}{|\Omega \Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|^{1/\nu_{0c}}} + C \frac{A[u\Phi]}{\Omega}.$$

При этом, если $(u, \Phi) \in \{m, M\}$, то

$$(4.34) \quad A_{0c}[u] \leq m_{0c} \bar{u}_{0c}, \quad A[u, \Phi] \leq (m[u] + m[\Phi^{(1)}] + K_0)(\tilde{\Phi}_{01})^{-1};$$

если $(u, \Phi) \in L_m^1(n_1, n_2)$, то

$$(4.35) \quad \begin{aligned} A_{0c}[u] &\leq |u(x_{0c})| + 4\delta_{0c} \bar{u}_{0c}^{(1)} + \sum_n^{oc} |\Delta_n|, \\ A[u, \Phi] &\leq \left(u + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n| \right) m[\Phi^{(1)}](\tilde{\Phi}_{01})^{-1}; \end{aligned}$$

а если $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$, то величина $A_{0c}[u]$ удовлетворяет (4.35) и

$$(4.36) \quad A[u, \Phi] \leq \left(\bar{u} + \|u^{(1)}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n| \right) (K_0 + 1)(\Phi_{01})^{-1},$$

где Φ_{01} — любая величина такая, что

$$(4.37) \quad \Phi_{01} \leq \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| \delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}}{(\nu_{0c} - 1)!}, \frac{1}{4} \frac{(|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| \Delta_{0c}^{\nu_{0c}-1})^2}{(\nu_{0c} - 1)! \|\Phi_0^{(2)}\|_{L^1}}, \frac{(\Phi_{0\Delta}^1)^2}{\|\Phi_0^{(2)}\|_{L^1}} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.28) и предположения (4.30) определено разбиение единицы $E(x_{0c}, \delta_{0c})$ и

$$J[u] = \sum_{x_{0c}} J[\rho_{0c}u] + J[\tilde{\rho}u].$$

Так как

$$\begin{aligned} |\Phi^{(\nu_{0c})}(x, t)| &\geq |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x)| - D_{0c}^\nu |t - t_0|, \\ |\Phi^{(1)}(x, t)| &\geq |\Phi_0^{(1)}(x)| - D^1 |t - t_0|, \end{aligned}$$

то, учитывая (4.27) и условия (4.29) (4.31), получаем, что

$$\begin{aligned} |\Phi^{(\nu_{0c})}(x, t)| &\geq \frac{1}{2} |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| \quad (|x - x_{0c}| \leq \delta_{0c}), \\ |\Phi^{(1)}(x, t)| &\geq \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{0c} \quad (|x - x_{0c}| > \delta_{0c}). \end{aligned}$$

В случае $(u, \Phi) \in \{m, M\}$ или $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1, n_2)$ для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 4.1 при $x_p = x_{0c}$, $\delta_p = \delta_{0c}$, $\Phi_p = \frac{1}{2}|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|$, $\tilde{\Phi}_1 = 0.5\tilde{\Phi}_{01}$. В случае $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$ интеграл $J[\tilde{\rho}u]$ оценивается, как в лемме 4.2, т.е. отдельно рассматриваются интервалы $(x_{0c} + \delta_{0c}, x_{0c} + \Delta_{0c}]$ $[x_{0c} - \Delta_{0c}, x_{0c} - \delta_{0c}]$ и интервалы $[x_{0c} + \Delta_{0c}, x_{0,c+1} - \Delta_{0,c+1}]$. В интервалах первого типа используется, то что $\Phi^{(1)}(x, t) \geq C((\nu_{0c} - 1)!)^{-1}|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|\delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}$, и вторая теорема о среднем для оценки величин $I(x_{0c} + \delta_{0c}, x_{0c} + \Delta_{0c})$. В интервалах второго типа величины $I(x_{0c} + \Delta_{0c}, x_{0,c+1} - \Delta_{0,c+1})$ оцениваются интегрированием по частям с учетом того, что в этих интервалах

$$|\Phi^{(1)}(x, t)| \geq \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|}{(\nu_{0c} - 1)!} \Delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}, \frac{1}{2} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0,c+1})}(x_{0,c+1})|}{(\nu_{0,c+1} - 1)!} (\Delta_{0,c+1})^{\nu_{0,c+1}-1}, \Phi_{0\Delta}^1 \right\}.$$

Как и для леммы 4.2, иногда полезно

ДОПОЛНЕНИЕ К ЛЕММЕ 4.3. Пусть при $x \in \text{supp } u$

$$(4.38) \quad |\Phi_0^{(1)}(x)| \geq |\Psi(x)|,$$

функция Ψ имеет при $|x - x_{0c}| \leq \delta_{0c}$ по крайней мере $\nu_{0c} + 1$ производные и

$$(4.39) \quad \begin{aligned} & \Psi(x_{0c}) = 0, \dots, \Psi^{(\nu_{0c}-2)}(x_{0c}) = 0, \Psi^{(\nu_{0c}-1)}(x_{0c}) \neq 0, \\ & \delta_{0c} \leq \frac{1}{4} \frac{|\Psi^{(\nu_{0c}-1)}(x_{0c})|}{(\Psi^{(\nu_{0c})})_{0c}} \equiv \tilde{\Delta}_{0c} \quad (|\Psi^{(\nu_{0c})}(x)| \leq (\bar{\Psi}^{(\nu_{0c})})_{0c}, |x - x_{0c}| < 2\Delta_{0c}), \\ & |\Psi(x)| \geq \tilde{\Psi} \quad (|x - x_{0c}| > \delta_{0c}). \end{aligned}$$

Тогда в оценках леммы 4.3 можно положить $\tilde{\Phi}_{01} = \tilde{\Psi}$ при условии, что

$$(4.40) \quad \tilde{\Phi}_{01} = \tilde{\Psi} \leq \min_{x_{0c}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Psi^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|}{(\nu_{0c} - 1)!} \delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}, \Psi_{\Delta} \right\}.$$

В случае $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$ в качестве Φ_{01} можно взять любую величину такую, что

$$(4.41) \quad \begin{aligned} & \Phi_{01} \leq \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|\delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}}{(\nu_{0c} - 1)!}, \frac{(|\Psi^{(\nu_{0c}-1)}(x_{0c})|(\Delta_{0c}^0)^{\nu_{0c}-1})^2}{(\nu_{0c} - 1)! \|\Phi^{(2)}\|_{L^1}}, \frac{(\Psi_{\Delta})^2}{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}} \right\}, \\ & \Delta_{0c}^0 = \min \{ \Delta_{0c}, \tilde{\Delta}_{0c} \}, \end{aligned}$$

и опустить условие $\delta_{0c} \leq \tilde{\Delta}_{0c}$.

Заметим, что при доказательстве леммы 4.3 фактически показано, при каких условиях на $|t - t_0|$ и δ_{0c} все критические точки фазы Φ лежат в окрестностях $|x - x_{0c}| \leq \delta_{0c}$ критических точек x_{0c} фазы Φ_0 .

4.2. Доказательство теоремы 2.2. Будем считать, что $(u, \Phi) \in \{m, M\}$. Случаи $(u, \Phi) \in L_M^1(n_1, n_2)$, $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$ рассматриваются аналогично. Доказательство проводится по индукции вниз по размерности рассматриваемых на каждом шаге стратов. Введем разбиение стратов на классы $\mathcal{K}^p$. По определению $\mathcal{K}^1$ – объединение стратов максимальной размерности в различных связных компонентах каустики $\mathcal{K}$. Условие $\mathcal{K}_\alpha \subset \mathcal{K}^1$ ниже записывается в виде $\alpha \in \{\alpha_1\}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{K}}^1$ – дополнение $\mathcal{K}^1$ в $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} = \mathcal{K}^1 \cup \widetilde{\mathcal{K}}^1$). Тогда $\mathcal{K}^2$ – объединение стратов максимальной размерности в различных связных компонентах $\widetilde{\mathcal{K}}^1$ ($\alpha \in \{\alpha_2\} \iff \mathcal{K}_\alpha \subset \mathcal{K}^2$) и $\widetilde{\mathcal{K}}^1 = \mathcal{K}^2 \cup \widetilde{\mathcal{K}}^2$, $\widetilde{\mathcal{K}}^2$ – дополнение $\mathcal{K}^2$ в $\widetilde{\mathcal{K}}^1$, $\mathcal{K}^3$ – объединение стратов максимальной размерности в различных связных компонентах $\widetilde{\mathcal{K}}^2$, и т. д. Продолжая этот процесс, получим разбиение $\mathcal{K} = \bigcup \mathcal{K}^p$, и, так как $\dim \mathcal{K}^p \leq \dim \mathcal{K}^{p-1} - 1$, то $P \leq n - 1$.

1. Оценка при $t \in V_i$ (нулевой шаг). Будем использовать обозначения

$$\Pi_i = \prod_{\alpha \subset \partial_i} d(t, \mathcal{K}_\alpha)^{n_{i\alpha}}, \quad \Pi_\alpha = \prod_{\beta \subset \partial_\alpha} d(t_\alpha, \mathcal{K}_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \quad (t_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha).$$

Так как $d(t, \mathcal{K}_\alpha) \leq 1$, то будем считать, что $n_{i\alpha} \geq 1$ ($n_{\alpha\beta} \geq 1$), если $\alpha \subset \partial_i$ ($\beta \subset \partial_\alpha$). По определению V_i (2.34) $-\Pi_i \geq d_i^{n_i}$, $n_i = \sum_{\alpha \subset \partial_i} n_{i\alpha}$, и в силу условия (2.38) имеем $|\Phi^{(2)}(x_{ic}, t)| \geq A_i d_i^{n_i}$. Применим лемму 4.2 и будем снабжать величины, фигурирующие в этой лемме, индексом i , указывающим на то, что $t \subset V_i$. Через $\Phi_{i\Delta}^1$ обозначается величина $\Phi_{i\Delta}^1 \equiv \Phi_{i\Delta}^1(t)$ при $t \in V_i$. Выберем $\delta_{ic} = A_i^{-1} \Pi_i^{-1} \Omega^{-0.5+\varepsilon}$ и потребуем, чтобы выполнялось условие $\Phi_{i\Delta}^1 \geq C_i \Omega^{-0.5+\varepsilon}$. Тогда из (4.18), (4.19) следует, что

$$(4.42) \quad |J[u]| \leq C_1 \sum_{x_{ic}} \frac{\bar{u}_{ic} m_{ic}}{|\Omega \Phi^{(2)}(x_{ic}, t)|^{1/2}} + C_2 \frac{(m[u] + K_i + M_i) \bar{u}}{\Omega^{0.5+\varepsilon}}.$$

Это дает оценку (2.35) с указанием констант. Так как $|\Phi^{(3)}| \leq \bar{\Phi}_i$ ($t \in V_i$), то условие (4.17) выполняется, если

$$(4.43) \quad d_i = 2(\bar{\Phi}_i A_i^{-2})^{\frac{1}{2n_i}} \Omega^{\frac{-0.5+\varepsilon}{2n_i}},$$

и, следовательно, $\delta_i \leq (\bar{\Phi}_i)^{-1/2} \Omega^{\frac{-0.5+\varepsilon}{2}}$. Таким образом, d_i , δ_i малы при $\Omega \geq \Omega_i[A_i, \Phi_i, \Phi^{(1)}(x_{ex})]$, и это условие включает в себя требование $\Phi_{i\Delta}^1 \geq C_i \Omega^{-0.5+\varepsilon}$. Подчеркнем, что в силу нашего выбора δ_{ic} величина $\Phi_{i\Delta}^1$ не зависит от Ω .

2. Оценка при $t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$, $\alpha \in \{\alpha_1\}$ (первый шаг). Введем величины $h_\alpha = \max_i d_i$, $p_\alpha = \max(2n_i)$ ($\alpha \subset \partial_i$). Тогда из (4.43) следует, что при $\Omega > 1$

$$(4.44) \quad h_\alpha = C_\alpha [\Phi] \Omega^{\frac{-0.5+\varepsilon}{p_\alpha}},$$

и достаточно рассмотреть область $d(t, \mathcal{K}_\alpha) \leq h_\alpha$. Следовательно, можно считать, что $|t - t_\alpha| \leq h_\alpha$, $\alpha \in \{\alpha_1\}$ (t_α – проекция t на $\mathcal{K}_\alpha$). Для оценки в этой области используем лемму 4.3, положив в ней $t_0 = t_\alpha(t)$, $x_{0c} = x_{\alpha c} \equiv x_c(t_\alpha)$. Используя обозначение $\Phi_{\alpha\Delta}^1 \equiv \Phi_{\alpha\Delta}^1(t_\alpha)$ из (4.33), получим, что

$$(4.45) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{\alpha c}} \left[\frac{C_{\alpha c}^1 \bar{u}_{\alpha c} m_{\alpha c}}{|\Omega \Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x_{\alpha c}, t_\alpha)|^{1/\nu_{\alpha c}}} + \frac{C_{\alpha c}^2 (m_\alpha + K_\alpha + M_\alpha) \bar{u}}{|\Omega \Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x_{\alpha c}, t_\alpha)| \delta_{\alpha c}^{\nu_{\alpha c}-1}} \right] + \frac{C_\alpha (m_\alpha + K_\alpha + M_\alpha) \bar{u}}{\Omega \Phi_{\alpha\Delta}^1}.$$

В силу определения $\mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$, оценки $\Pi_\alpha \geq (h_\alpha^1)^{h_\alpha}$, $n_\alpha \equiv \sum_{\beta \subset \partial\alpha} n_{\alpha\beta}$ из условия (2.38) следует, что $\Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x_{\alpha c}, t_\alpha) \geq A_\alpha (h_\alpha^1)^{h_\alpha}$. Тогда условия (4.30), (4.31), при которых имеет место оценка (4.45), выполняются, если

$$(4.46) \quad \begin{aligned} h_\alpha D_\alpha &\leq \frac{1}{4} A_\alpha (h_\alpha^1)^{n_\alpha}, \\ h_\alpha D_\alpha^1 &\leq \min \left\{ \frac{1}{4} \frac{A_\alpha (h_\alpha^1)^{n_\alpha} \delta_{\alpha c}^{\nu_{\alpha c}-1}}{(\nu_\alpha - 1)!}, \frac{1}{2} \Phi_{\alpha\Delta}^1 \right\}, \\ \delta_{\alpha c} &\leq \frac{1}{4} \frac{A_\alpha (h_\alpha^1)^{n_\alpha}}{\overline{\Phi}_\alpha}, \end{aligned}$$

где константы D_α , D_α^1 , $\overline{\Phi}_\alpha$ определены в (2.37) и величины h_α^1 – в (2.33). Здесь предполагается, что $\nu_{\alpha c} \leq \nu_\alpha$, $|\Phi^{(\nu_{\alpha c}+1)}(x, t)| \leq \overline{\Phi}_\alpha$. Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$(4.47) \quad \frac{1}{2} \frac{A_\alpha (h_\alpha^1)^{n_\alpha} \delta_{\alpha c}^{\nu_{\alpha c}-1}}{(\nu_\alpha - 1)!} \leq \Phi_{\alpha\Delta}^1, \quad A_\alpha (h_\alpha^1)^{n_\alpha} \delta_{\alpha c}^{\nu_{\alpha c}-1} \geq C \Omega^{-0.5+\varepsilon},$$

при которых оценка (4.45) принимает нужный вид

$$(4.48) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{\alpha c}} \frac{C_{\alpha c}^1 \overline{u}_{\alpha c} m_{\alpha c}}{|\Omega \Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x_{\alpha c}, t_\alpha)|^{1/\nu_{\alpha c}}} + \frac{C(\overline{\nu})(m_\alpha + K_\alpha + M_\alpha) \overline{u}}{\Omega^{0.5+\varepsilon}},$$

и определим величины $\delta_{\alpha c}$ из равенств

$$(4.49) \quad h_\alpha D_\alpha^1 = \frac{1}{4} \frac{A_\alpha (h_\alpha^1)^{n_\alpha} \delta_{\alpha c}^{\nu_{\alpha c}-1}}{(\nu_\alpha - 1)!}.$$

Тогда третье из условий (4.46) выполняется, если

$$(4.50) \quad h_\alpha^1 = C_\alpha^1 [\Phi] \Omega^{\frac{-0.5+\varepsilon}{n_\alpha \nu_\alpha p_\alpha}}.$$

Так как можно считать, что $\rho_\alpha \geq 1$, $n_\alpha \nu_\alpha \geq 1$, то условия (4.46), (4.47) выполняются, если $\Omega \geq \Omega_1[\Phi]$. При этом $h_\alpha^1 \geq \Omega^{\gamma_\alpha} h_\alpha$, $\gamma_\alpha > 0$, что обеспечивает правильность покрытия. Остается заметить, что из (4.49) следует оценка

$$(4.51) \quad \delta_{\alpha c} \leq C_\alpha^2 [\Phi] \Omega^{\frac{-0.5+\varepsilon}{p_\alpha \nu_\alpha}}.$$

Таким образом, при $t \subset \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$, $\alpha \in \{\alpha_1\}$, наше утверждение доказано.

3. *Завершение индукции.* Рассмотрим оценку при $t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$, $\alpha \in \{\alpha_2\}$. Тогда существуют $\alpha^1 \in \{\alpha_1\}$ такие, что $\alpha \in \partial\alpha^1$, и достаточно рассмотреть область

$$|t - t_\alpha| \leq h_\alpha, \quad \alpha \in \{\alpha_2\}, \quad h_\alpha = \min_{\alpha^1} h_{\alpha^1} \quad (\alpha \subset \partial\alpha^1).$$

Все дальнейшее полностью аналогично рассмотренному выше случаю $\alpha \in \{\alpha_1\}$. Снова получим те же оценки при $\Omega \geq \Omega_2[\Phi]$. Так как для стратов минимальной размерности второе из условий (2.38) принимает вид $\Phi^{(\nu_{\alpha c})}(x_{\alpha c}(t_\alpha), t_\alpha) \geq A_\alpha$, то,

продолжая этот процесс, мы получим оценку во всей области T . Возникающее при этом покрытие будет правильным при $\Omega \geq \Omega_0[\Phi]$, так как величины h_α малы ($h_\alpha \leq C[\Phi]\Omega^{-\beta_\alpha}$) и $h_\beta \geq \Omega^{\sigma_\alpha} h_\alpha$ ($\beta \subset \partial\alpha, \sigma_\alpha > 0$) в силу доказанного на первом этапе условия $h_\alpha^1 \geq \Omega^{\gamma_\alpha} h_\alpha$.

4.3. Доказательство теоремы 2.3. Будем следовать схеме доказательства теоремы 2.2. 1. Рассмотрим случай: $t \in V_i$ и константы d_i в (2.34) пока не определены.

1. В области V_i все критические точки невырождены. Применяем теорему 2.1 и следствие 2.1. Используя оценки

$$B_{0i} \geq A_i \prod_{\alpha \subset \partial i} d(t, \mathcal{K}_\alpha)^{n_{i\alpha}},$$

$$G(x_{ex}) \geq A'_i \prod_{\alpha \subset \partial i} d(t, \mathcal{K}_\alpha)^{n'_{i\alpha}}, \quad |\det \Phi''(x_{ic}, t)| \geq B_{0i}^n C_n,$$

в которых через B_{0i} обозначены фигурирующие в теореме 2.1 величины B_0 , получим нужную оценку (2.41) при $d(t, \mathcal{K}_\alpha) \geq h_\alpha$, где h_α мало ($h_\alpha \leq \Omega^{-\beta_\alpha}$). Таким образом, остается рассмотреть область $d(t, \mathcal{K}_\alpha) \leq h_\alpha$.

2. Так же, как в п. 4.2, вводится разбиение стратов на классы $\mathcal{K}^p$, и начнем с оценки в области $d(t, \mathcal{K}_\alpha) \leq h_\alpha$, $\mathcal{K}_\alpha \in \mathcal{K}^1$ ($\alpha \in \{\alpha^1\}$). Пусть $t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$, $t_\alpha = t_\alpha(t)$ есть проекция t на $\mathcal{K}_\alpha$ и величины h_α^1 , входящие в определение $\mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$, пока не фиксированы. Рассмотрим критическую точку $x_{\alpha c} \equiv x_c(t_\alpha)$. В окрестности $|x - x_{\alpha c}| \leq \delta_{\alpha c}[\Phi]$ при $|t - t_\alpha| \leq \delta_\alpha[\Phi]$, $\delta_\alpha > h_\alpha$, вводим новые координаты $z = (z_1, \dots, z_n) = (y_1, \dots, y_{n-1}, s) - x = Uz$, где U – не зависящая от x , t ортогональная матрица такая, что $(U^{-1}\Phi''(x_{\alpha c}, t_\alpha)U)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Так как $\text{rank } \Phi''(x_{\alpha c}, t_\alpha) \geq n - 1$, то $|\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}| \geq M_{\alpha c}$. По теореме о неявной функции [46] величины $\delta_{\alpha c}[\Phi]$, $\delta_\alpha[\Phi]$ можно выбрать таким образом, что критические точки y^c фазы Ψ ($\Psi(y) \equiv \Phi(z, t)$) будут гладкими функциями s, t и, следовательно, определены функции от s – $S'_{\alpha c}$, $u_{\alpha c}(S'_{\alpha c}(s) = \Psi(y^c(s, t), s, t)$, $u_{\alpha c}(s) = u(y^c(s, t), s, t)$). Кроме того, величины $\delta_{\alpha c}[\Phi]$ можно выбрать так, что определено разбиение единицы $E(x_{\alpha c}, \delta_{\alpha c})$ с центрами $x_{\alpha c}$ и масштабами $\delta_{\alpha c}$. Чтобы это доказать, достаточно для функции $S_{\alpha c}^0 = S_{\alpha c}|_{t=t_\alpha}$ провести те же рассуждения, что и в п. 4.1 перед леммой 4.3.

Запишем интеграл $J[u]$ в виде

$$J[u] = \sum_{\alpha c} J[\rho_{\alpha c} u] + J[\tilde{\rho} u]$$

и оценим объемный член $J[\tilde{\rho} u]$. Введем функцию $\Phi^0 = \Phi|_{t=t_\alpha}$ и $G^0 = (\nabla \Phi^0)^2$ – квадрат ее градиента. Тогда при $|t - t_\alpha| \leq \delta_\alpha$

$$G \equiv (\nabla \Phi)^2 \geq G^0 - C[\Phi] \delta_\alpha.$$

Используя оценки $\frac{dy^c}{ds}(s, t_\alpha) \leq C_i[\Phi]$, вытекающие из уравнений $\frac{d}{ds} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(y_i^c, s) = 0$, получим, что на сфере $|x - x_{\alpha c}| = \delta_{\alpha c}$ выполняется оценка $G^0 \geq C_{\alpha c}[\Phi, M_{\alpha c}] \delta_{\alpha c}^{2(\nu_{\alpha c}-1)}$. При $\delta_\alpha \leq C[\Phi, M_{\alpha c}] \delta_{\alpha c}^{2(\nu_{\alpha c}-1)}$ такая же оценка верна и для функции G . В результате анализа экстремальных точек фазы Φ^0 получим константу Φ_1 такую, что $G \geq \Phi_1$ при

$|x - x_{\alpha c}| \geq \delta_{\alpha c}$. Теперь для оценки интеграла $J[\rho_{\alpha c} u]$ переходим в нем к переменным $z = (y, s)$ и интегрируем по y с помощью теоремы 2.1 и следствия 2.1, а затем интеграл по s оцениваем с помощью теоремы 2.2. В результате при $\alpha \in \{\alpha^1\}$ получаем оценку (2.42) и определяем величину h_α^1 при $\alpha \in \{\alpha^1\}$.

3. Оценки при $t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$, $\mathcal{K}_\alpha \in \mathcal{K}^p$, $p \geq 2$, проводятся точно так же (см. доказательство теоремы 2.2).

4.4. Замечания. 1. Выше считалось, что оценка одномерного О.И. $J[u]$ (1.6) определяется вкладом критических точек, если выполняются оценки (2.35), (2.36). Второй член в этих оценках имеет порядок $\Omega^{-0.5-\varepsilon}$. Это определение по крайней мере для достаточно гладких функций u , Φ можно изменить, потребовав, чтобы этот член был порядка $\Omega^{-M} \forall M$. Ниже без доказательства приведены соответствующие варианты лемм 4.2, 4.3 и теоремы 2.2, которые мы называем леммами 4.2 $^\infty$, 4.3 $^\infty$ и теоремой 4.1 $^\infty$. Для их доказательства достаточно воспользоваться результатом §3 для оценки объемных членов $J[\tilde{\rho}u]$. Будем использовать определения из §§ 2, 3. Скажем, что оценки при $t \in V_i$ определяются вкладом критических точек с точностью до $O(\Omega^{-\infty})$, если второй член в правой части (2.35) может быть заменен на $A_{iM}[u, \Phi]\Omega^{-M} \forall M$ при сохранении всех остальных условий. Определение для $t \in \mathcal{K}_\alpha^{h_\alpha}$ аналогично, но относится к оценке (2.36).

При $t \in V_i$ Φ_2 – любая константа такая, что $\Phi^{(2)}(x_c, t) \geq \Phi_2$. Будем говорить, что критические точки далеки от границы, если $|x_c - a| \geq \delta_c$, $|x_c - b| > \delta_c$.

ЛЕММА 4.2 $^\infty$. Пусть выполнены условия леммы 4.2 и, кроме того, $(u, \Phi) \subset \Lambda_{\bar{\alpha}}(\lambda, \lambda_1)$, величины $\delta_c > \delta_0$ достаточно малы (см. (2.21)) и критические точки x_c далеки от границы. Тогда при $\lambda_1 \delta_0 < 1$ для любого P , $1 \leq P \leq \bar{\alpha} - 1$, в области $t \subset V_i$ справедлива оценка

$$|J[u]| \leq C \sum_{x_c} \frac{A_c[u]}{|\Omega \Phi^{(2)}(x_c, t)|^{1/2}} + |J_{a,b}^P| + \Delta_P,$$

где $J_{a,b}^P$ – вклад границы (3.33) и

$$|\Delta_P| \leq C_P(K+1)\|u\|_P \left(\frac{\lambda \lambda_1^2}{\Omega(\Phi_2 \delta_0)^2} \right)^P.$$

ЛЕММА 4.3 $^\infty$. Пусть выполнены условия леммы 4.3. Кроме того, пусть $(u, \Phi) \subset \Lambda_{\bar{\alpha}}(\lambda, \lambda_1)$, величины $\delta_{0c} \geq \delta_0 > 0$ достаточно малы и критические точки x_{0c} далеки от границы. Тогда при $t \subset T_0 \forall P$ ($1 \leq P \leq \bar{\alpha} - 1$)

$$|J[u]| \leq \sum_{x_{0c}} \frac{A_{0c}[u]C(\nu_{0c})}{|\Omega \Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|^{1/\nu_{0c}}} + |J_{a,b}^P| + \Delta_P,$$

и, если $\nu_{0c} \leq \nu$, $|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| \geq \Phi_\nu$, то для Δ_P верна оценка

$$|\Delta_P| \leq C_P(K+1)\|u\|_P \left[\frac{\lambda \lambda_1^2}{\Omega \Phi_\nu^2 \delta_0^{2(\nu-1)}} \right]^P.$$

ТЕОРЕМА 4.1[∞]. Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и $\text{supp } u \in (a, b)$, $(u, \Phi) \in \Lambda_{\overline{\alpha}}(\lambda, \lambda_1) \quad \forall \alpha$ и $\|u\|_P \leq C\Omega^\theta$. Тогда в утверждении теоремы 2.2 можно считать, что оценки определяются вкладом соответствующих критических точек с точностью до $O(\Omega^{-\infty})$.

Достаточно предположить, что

$$\frac{\lambda\lambda_1^2}{\Omega\Phi_2^2\delta_0^2} \leq \Omega^{-\varepsilon}, \quad \frac{\lambda\lambda_1^2}{\Omega\Phi_\nu^2\delta_0^{2(\nu-1)}} \leq \Omega^{-\varepsilon}.$$

2. Оценки теоремы 2.2 не являются согласованными, и возможные пути их улучшения ясны из доказательства. В частности, если отбросить предположения $n_{i\alpha} \geq 1$ ($n_{\alpha\beta} \geq 1$) и ввести аналог условий (2.38) для $\Phi^{(1)}(x_{ex})$, то можно получить оценки с переходными областями, аналогичные тем, которые рассмотрены в примерах 5.2, 5.3.

§ 5. Примеры

В этом параграфе на ряде примеров демонстрируется метод получения эффективных оценок О.И. с помощью результатов, изложенных в §§ 3, 4. Для простоты рассматриваются в основном одномерные О.И. Двумерные О.И. рассматриваются только в примере 5.7.

5.1. Обобщенный интеграл Эйри. В пп. 5.1–5.4 рассматриваются О.И. вида

$$(5.1) \quad J[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{i\Omega\Phi} dx,$$

в которых амплитуда u имеет компактный носитель (например, $\text{supp } u \in (-1, 1)$), ограничена и имеет конечное число участков монотонности ($u \leq \bar{u}$, $m[u] \leq m$). В этом случае *обобщенным интегралом Эйри* будем называть О.И. вида (5.1) с фазой $\Phi(x) = x^{p+1}/(p+1) - tx$, $p = 2, 3, 4, \dots$. Так как $|x_c| = |t|^{1/p}$, $|\Phi^{(2)}(x_c)| = p|t|^{\frac{p-1}{p}}$, то каустика состоит из одной точки $t = 0$. В области $t \neq 0$ применим лемму 4.2. Учитывая, что $x_{ex} = 0$, $|\Phi^{(1)}(x_{ex})| = |t|$, получим $\Phi_\Delta^1(t) = |t|$. Функция $\Phi^{(3)}$ монотонна, и, следовательно, $-|\Phi_c^{(3)}| \leq C_p(|t|^{1/p} + \delta_c)^{p-2}$. Полагая $\delta_c \leq C|t|^{1/p}$, получим $\overline{\Phi}_c^{(3)} = C_p|t|^{\frac{p-2}{p}}$, и условия (4.17) выполняются. Из (4.18) следует, что

$$|J[u]| \leq C_1 \sum_{x_c} \left[\frac{m_c \bar{u}_c}{\Omega^{1/2}|t|^{\frac{p-1}{2p}}} + \frac{B}{\Omega|t|^{\frac{p-1}{p}}\delta_c} \right] + \frac{C_2 B}{\Omega|t|}, \quad B \equiv m[u] + m[\Phi^{(1)}] + K.$$

Выбирая δ_c из условия равенства знаменателей первого и второго членов в этой оценке, имеем $\delta_c = \Omega^{-1/2}|t|^{-(p-1)/(2p)}$, и условие $\delta_c \leq C|t|^{1/p}$ выполняется, если $|t| \geq C_p \Omega^{-p/(p+1)}$. В этой области $\Omega|t| \geq \Omega^{1/2}|t|^{(p-1)/(2p)}$, и, так как $B \leq C m[u]$, то

$$(5.2) \quad |J[u]| \leq \frac{C \bar{u} m[u]}{\Omega^{1/2}|t|^{\frac{p-1}{2p}}} \quad (|t| \geq C_p \Omega^{-p/(p+1)}).$$

В области $|t| \leq C_p \Omega^{-p/(p+1)}$ можно использовать равномерную по t оценку

$$(5.3) \quad |J[u]| \leq C_p \bar{u} m[u] \Omega^{-1/(p+1)},$$

следующую из теоремы 1.3 или леммы 4.3. В совокупности оценки (5.2), (5.3) дают, в частности, согласованную оценку (1.8). Эти оценки, конечно, не точны при четных p в области, где нет критических точек. Однако, например, при $t \geq 0$, $p = 2$ полученную составную оценку улучшить нельзя. Это следует из вида равномерной асимптотики интеграла $J[u]$, которая выражается через функции Эйри [1], [5]

$$|J[u]| \sim C[u]\Omega^{-1/3} \text{Ai}(-\Omega^{2/3}t) \quad (p = 2), \quad \Omega \rightarrow \infty.$$

Заметим, что даже в этом простейшем случае не удастся получить согласованную составную оценку, если для оценки вклада точек, далеких от критических, использовать формулу интегрирования по частям, т.е. если использовать оценки в классе $L^1(n_1, n_2, n_3)$.

5.2. Оценка с переходной областью. Рассмотрим О.И. (5.1) с фазой $\Phi(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}\alpha x^3 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}x^2$, которая подобрана так, что $\Phi^{(1)}(x) = x((x - \alpha)^2 + \beta^2)$. В этом случае при $\beta \neq 0$ имеется одна невырожденная критическая точка $x_0 = 0$, а при $\beta = 0$ к ней добавляется вырожденная критическая точка $x_1 = \alpha$ и, следовательно, каустикой является прямая $\beta = 0$ в пространстве параметров $t = (\alpha, \beta)$. Каустика состоит из трех стратов, для которых $\beta = 0$, и, соответственно, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$. Так как при замене $x \rightarrow -x$, $\alpha \rightarrow -\alpha$ производная $\Phi^{(1)}$ просто меняет знак, то ограничимся рассмотрением положительного квадранта $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Для оценки в области $\beta > 0$ используем лемму 4.2. В этой области имеется одна невырожденная критическая точка $x_0 = 0$, и величина $(\Phi^{(2)}(x_0))^{-1}$ при $\alpha > 0$ остается ограниченной при приближении к каустике $(\Phi^{(2)}(x_0) = \alpha^2 + \beta^2)$. Так как $\Phi^{(2)}(x) = 3x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, то экстремальные точки x_{ex} отсутствуют при $3\beta^2 > \alpha^2$, а при $3\beta^2 \leq \alpha^2$ выполнено $|x_{ex}| \geq (1/3)\alpha$. Отсюда следует, что $|\Phi^{(1)}(x_{ex})| \geq C\alpha\beta^2$. Выбираем $\delta_0 = C\Omega^{-1/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} = C\Delta_0$. Так как $\Phi^{(3)}(x) = 6x - 4\alpha$, то условие (4.17) выполняется, если $\alpha^2 + \beta^2 \geq C\delta_0(\delta_0 + \alpha)$. Рассмотрим область $\alpha > \beta$ и предположим, что $\delta_0 < C\alpha$. Тогда эти условия выполняются при $\alpha \geq C\Omega^{-1/4}$, и из (4.18) имеем

$$|J[u]| \leq C\bar{u}m[u] \left[\frac{1}{\Omega^{1/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} + \frac{1}{\Omega\alpha\beta^2} \right] \quad (\alpha > \beta, \alpha \geq C\Omega^{-1/4}).$$

В области $\beta > \alpha$ условие (4.17) выполняется, если $\beta \geq C\Omega^{-1/4}$, и тогда из (4.18) следует, что

$$(5.4) \quad |J[u]| \leq \frac{C\bar{u}m[u]}{\Omega^{1/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}, \quad \alpha < \beta, \quad \beta \geq C\Omega^{-1/4}.$$

Таким образом,

$$(5.5) \quad |J[u]| \leq \frac{C\bar{u}m[u]}{\Omega^{1/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}, \quad \beta \geq C\Omega^{-1/4}.$$

Рассмотрим оценки $J[u]$ с помощью леммы 4.1. При этом используется, что $\Phi^{(1)}(x) \geq |\Phi_0(x)| \equiv |x(x - \alpha)^2|$. Выбираем (в обозначениях леммы 4.1) разбиение единицы $E(x_p, \delta_p)$ таким образом, что $x_p = (x_0, \alpha)$, $\delta_p = (\delta_0, \delta_1)$. Тогда $\Phi_1 = C\alpha^3$ и константы

C_p можно выбрать так, что $|\Phi^{(2)}(x)| \geq C\alpha^2$ ($|x - x_0| \leq \delta_0$), $\Phi^{(3)} \leq C\alpha$ ($|x - \alpha| \leq \delta_1$). Применяя лемму 4.1, получаем равномерную по β оценку

$$|J[u]| \leq C\bar{u}m[u] \left[\frac{1}{\Omega^{1/2}\alpha} + \frac{1}{\Omega^{1/3}\alpha^{1/3}} + \frac{1}{\Omega\alpha^3} \right],$$

из которой следует, что

$$(5.6) \quad |J[u]| \leq C\bar{u}m[u](\Omega\alpha)^{-1/3} \quad (\alpha \geq C\Omega^{-1/4}).$$

В области $\beta < C\Omega^{-1/4}$, $\alpha > \beta$, $\alpha > C\Omega^{-1/4}$ из (5.4) получаем

$$(5.7) \quad |J[u]| \leq C\bar{u}m[u](\Omega\alpha\beta^2)^{-1}.$$

Две последние оценки совпадают на кривой Γ , задаваемой уравнением $\beta = \Omega^{-1/3}\alpha^{-1/3}$. Учитывая, что в силу теоремы 1.3 или леммы 4.3 во всей области α, β

$$(5.8) \quad |J[u]| \leq C\bar{u}m[u]\Omega^{-1/4},$$

получаем разбиение плоскости α, β на четыре области I, II, III, IV, в которых, соответственно, имеются оценки (5.5), (5.7), (5.6), (5.8).

Рис. 3

На кривых, разделяющих эти области, соответствующие оценки переходят друг в друга. Из вывода ясно, что результат сохраняется, если вместо этого разбиения взять его образ при диффеоморфизме плоскости (α, β) , который можно записать в виде $\alpha \rightarrow \alpha g_1(\alpha, \beta)$, $\beta \rightarrow \beta g_2(\alpha, \beta)$, $0 < C_1 \leq g_i \leq C_2$. Область II называется *переходной*. Это единственная область, где оценки не определяются вкладом критических точек. Причиной появления переходной области является ограниченность величины $(\Phi^{(2)}(x_0))^{-1}$ при приближении к каустике (при $\beta \rightarrow 0$). По-видимому, такая переходная область и в общем случае характеризуется тем, что при приближении к каустике вдоль пути, лежащего в этой области, величины $(\Phi^{(2)}(x_c))^{-1} \forall x_c$ остаются ограниченными. Естественнo предположить, что полученные оценки нельзя улучшить всюду, кроме области $\Pi \cup \text{III}$, ширина которой $\sim \Omega^{-1/4}$. При $\alpha \geq C$ равномерная по β асимптотика интеграла $J[u]$ имеет вид $C_1[u](\alpha\Omega)^{-1/3} \text{Ai}(\frac{1}{2}\beta^2\Omega^{2/3}\alpha^{2/3}) + C_2[u](\Omega^{1/2}\alpha)^{-1}$. Это означает, что истинная ширина области $\Pi \cup \text{III}$, по-видимому, экспоненциально мала.

5.3. Интеграл Пирси. Доказательство леммы 2.1. Оценки (2.44) вытекают из следующих утверждений:

- 1) если $|A| \geq b^2$, $|a| \geq \Omega^{-1/2}$, то $|J[u]| \leq C\bar{u}m(\Omega|a|)^{-1/2}$,
- 2) если $A < 0$, $\beta\Omega^{-2/3}|b|^{10/9} < |A| < b^2$, $b > \beta^{9/8}\Omega^{-3/4}$, то

$$|J[u]| \leq C\bar{u}b^{1/6}\Omega^{-1/2}|A|^{-1/4}\beta^{-3/4} \quad \forall \beta < 1,$$

- 3) если $0 < A < b^2$, $|b| > \alpha\Omega^{-3/4}$, то $\forall \alpha < 1$

$$|J[u]| \leq C\bar{u}m \begin{cases} \Omega^{-1/2}|b|^{-1/3}\alpha^{-2/3} + |b|\Omega^{-1}A^{-1}, & a < 0, \\ \Omega^{-1/2}|b|^{-1/3}\alpha^{-2/3}, & a > 0, \end{cases}$$

- 4) если $|\Delta b| \leq \frac{1}{2}b_0(a)$, $|a| > \Omega^{-1/2}$, то $|J[u]| \leq C\bar{u}\Omega^{-1/3}|a|^{-1/6}$ ($b = b_0(a) + \Delta b$, $(a, b_0) \in K$),
- 5) $|J[u]| \leq C\bar{u}m\Omega^{-1/4}$ во всей области (a, b) .

Для доказательства этих утверждений используется следующая информация о критических точках $-x_0, x_1, x_2$ корнях уравнения $x^3 + ax + b = 0$, вытекающая из точных формул для корней кубического уравнения. Если $(a, b) \in U_1 = \{(a, b) \mid A < 0, |A| > b^2\}$, то

$$|x_{1,2}| \asymp C|A|^{1/6}, \quad |x_0| \asymp b|A|^{-1/3}, \quad |\Phi^{(2)}(x_c)| \geq C(a).$$

Если $(a, b) \in U_2 = \{(a, b) \mid A < 0, |A| < b^2\}$, то

$$|x_c| \asymp C|b|^{1/3}, \quad |\Phi^{(2)}(x_0)| \geq C|b|^{2/3}, \quad |\Phi^{(2)}(x_{1,2})| \geq C|A|^{1/2}|b|^{-1/3}.$$

Если $(a, b) \in U_3 = \{(a, b) \mid 0 < A < b^2\}$, то

$$x_c = x_0 \asymp C|b|^{1/3}, \quad |\Phi^{(2)}(x_0)| \geq C|b|^{2/3}.$$

Если $(a, b) \in U_4 = \{(a, b) \mid A > b^2\}$, то

$$x_c = x_0 \asymp CbA^{-1/3}, \quad |\Phi^{(2)}(x_0)| \geq C|a|.$$

Если $(a, b) \in \mathcal{K}$, т.е. $b = b_0(a)$, то

$$x_0 = 3b_0a^{-1}, \quad x_1 = -3b_0a^{-1}, \quad \Phi^{(2)}(x_0) = 3a, \quad \Phi^{(2)}(x_1) = 0, \quad \Phi^{(3)}(x_1) = -9b_0a^{-1}.$$

Здесь и ниже запись $|f| \asymp Cg$ означает, что $C_1g \leq |f| \leq C_2g$. Экстремальные точки x_{ex} являются решениями уравнения $\Phi^{(3)}(x) = 3x^2 + a = 0$, и, следовательно, их нет при $a > 0$ и при $a \leq 0$

(5.9)

$$x_{ex}^{\pm} = \pm \left(\frac{|a|}{3} \right)^{1/2}, \quad \Phi^{(1)}(x_{ex}^{\pm}) = \mp \left(\frac{2|a|^{3/2}}{3^{3/2}} \right) + b, \quad |\Phi^{(1)}(x_{ex}^+) \Phi^{(1)}(x_{ex}^-)| = 4|A|.$$

В каждой из областей U_i для оценки применяется лемма 4.2 и утверждения 1)–3) доказываются по единой схеме. Полагая $\delta_{ic} = \delta_i$, $x_c \equiv x_{ic}$ при $(a, b) \in U_i$ и используя оценки $\Phi^{(2)}(x_{ic}, t) \geq \Phi_i$, приведенные выше, получим, что при $(a, b) \in U_i$

$$|J[u]| \leq C\bar{u}m \{ (\Omega\Phi_i)^{-1/2} + (\Omega\Phi_i\delta_i)^{-1} + (\Omega\Phi_i\Delta)^{-1} \}.$$

Величины δ_i определяются из условий $\delta_i = C_i(\Omega\Phi_i)^{-1/2}$. Так как $\bar{\Phi}_{ic}^{(3)} \leq C_i(\delta_i + |x_{ic}|)$, то из условия (4.17) и приведенных выше оценок величин критических точек x_{ic} получим ограничения на (a, b) , при которых $|J[u]| \leq C\bar{m}\{(\Omega\Phi_i)^{-1/2} + (\Omega\Phi_{i\Delta})^{-1}\}$. Значения $\Phi_{i\Delta}$ оцениваются с помощью (5.9). Таким образом, получаем утверждения 1)–3). Утверждение 5) сразу следует из теоремы 1.3, так как $|\Phi^{(4)}(x)| \geq 6$. Утверждение 4) доказывается с помощью леммы 4.3. Так как при этом оценка проводится равномерно по a , то можно считать, что единственным параметром является b и $\Phi_0^{(1)}(x) = x^3 + ax + b_0(a)$ ($b = b_0(a) \iff A = 0$). Экстремальную точку $x_{ex}^+ = x_1$ учитывать не надо, а $|\Phi_0^{(1)}(x_{ex}^-)| = C|a|^{3/2} = C|b_0(a)|$. Для обеих критических точек x_0, x_1 выбираем $\delta_0 = \delta_1 = Cb_0^{1/2}$. Из (4.32) следует, что $\tilde{\Phi}_{01} = Cb_0^{1/3}\delta_0^2$, и так как $(\bar{\Phi}_0^{(3)})_0 = Cb_0^{1/3}$, $(\bar{\Phi}_0^{(4)})_1 = C$, то условие (4.30) принимает вид $\delta_0 \leq Cb_0^{1/3}$. В соответствии с (4.29) можно считать, что $D_{0c}' = 0, D^1 = 1$, и условие (4.31) выполняется, если $|\Delta b| \leq |b - b_0| \leq C\delta_0^2 b_0^{1/3}$. Выбирая $\delta_0 = \delta_1 = Cb_0^{1/3}$, из (4.33) получаем утверждение 4). Второе утверждение леммы 2.1 следует из того, что при замене $a \rightarrow ag_1, b \rightarrow bg_1$ все утверждения остаются неизменными с точностью до умножения на константу, а это всегда можно компенсировать соответствующим выбором констант в определении величин δ_c и изменением констант в оценках.

Заметим, что оценки (2.44) улучшают оценку (1.14) из [42] в области $\Omega^{-2/3}|b|^{10/9} < A < b^2\Omega^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) и совпадают с оценкой (1.14) в остальной области a, b .

5.4. Ряды осцилляторных интегралов. В этом пункте рассматриваются задачи об оценке функции $F(\Omega)$, задаваемой в виде ряда одномерных О.И.

$$F(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n[u_n],$$

где $J_n[u_n]$ – О.И. вида (5.1), и дополнительно предполагается, что $|u_n| \leq C|n|^{-\sigma}$. Эта задача является модельной для задачи томографии.

В качестве первого примера рассмотрим случай $\Phi_n(x) = x^2/2 - nx^3/3$. Переходя к переменной $y = x - 1/(2n)$, получим, что

$$F(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{i\Omega}{12n^2}} \int u_n\left(y + \frac{1}{2n}\right) \exp\left\{-i\Omega n\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{y}{4n^2}\right)\right\} dy.$$

Интегралы, входящие в это выражение, были оценены в п. 5.1. Используя оценки (5.2), (5.3) при $\Omega \rightarrow n\Omega, t \rightarrow (4n^2)^{-1}$, получим

$$|F(\Omega)| \leq \frac{Cm}{\Omega^{1/2}} \sum_{n=1}^{C\Omega^{1/2}} n^{-\sigma} + \frac{Cm}{\Omega^{1/3}} \sum_{n=C\Omega^{1/2}}^{\infty} n^{-(\sigma+1/3)}.$$

Отсюда следует абсолютная сходимость ряда $F(\Omega)$ при $\sigma > 2/3$. Остается воспользоваться оценкой

$$\int_p^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=p}^N f(n) \leq f(p) + \int_p^N f(x) dx,$$

справедливой для невозрастающей функции f . В предположении $\Omega \geq 1$ это дает

$$|F(\Omega)| \leq \begin{cases} \frac{Cm\sigma}{\sigma-1} \Omega^{-1/2} & (\sigma > 1), \\ Cm(\ln \Omega) \Omega^{-1/2} & (\sigma = 1), \\ Cm \left(\frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma-2/3} \right) \Omega^{-\sigma/2} & (2/3 < \sigma < 1). \end{cases}$$

В случае $\Phi_n(x) = x^3/3 - (1/n)x$ совершенно аналогично получаем, что при $\Omega \geq 1$

$$|F(\Omega)| \leq \begin{cases} C(\sigma)m\Omega^{-1/2} & (\sigma > 5/4), \\ Cm(\ln \Omega) \Omega^{-1/2} & (\sigma = 5/4), \\ C(\sigma)m\Omega^{-(\frac{2}{3}\sigma-1/3)} & (1 < \sigma < 5/4). \end{cases}$$

Приведенные примеры демонстрируют эффект зависимости характера оценок величины $F(\Omega)$ от параметра σ , задающего скорость убывания $|u_n|$ с ростом n . В качестве следующего примера рассмотрим оценку $F(\Omega)$ при $\Phi_n(x) = x^2 - n^{-2} \cos nx$ и дополнительно предположим, что $\sup u \in (-1, 1)$ и

$$(5.10) \quad \begin{aligned} |u_n^{(p)}(x)| &\leq Cn^{-\sigma}, \quad \sigma > 1, \quad u_n^{(2p)}(0) = 0, \quad p \leq j-1, \\ u_n^{(2j)}(0) &\neq 0 \quad \text{или} \quad u_n^{(2j-1)}(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Все фазы Φ_n имеют общую невырожденную критическую точку $x_c = 0$. Вопрос состоит в определении величины $\sigma_0 = \sigma_0(j)$ такой, что при $\sigma > \sigma_0$ имеет место оценка

$$(5.11) \quad |F(\Omega)| \leq \frac{C_j \sigma[u]}{\Omega^{0.5+j}},$$

вид которой подсказывается первым членом асимптотики $J_n[u_n]$, получаемой по методу стационарной фазы (3.42). Так как производные Φ_n как функции параметра n растут с ростом их порядка, то подстановка асимптотики в ряд $F(\Omega)$ приводит к его расходимости. Метод оценки будет основан на применении теоремы 2.1 и в общих чертах состоит в следующем. Так как $\sigma > 1$, то от ряда $F(\Omega)$ переходим к конечной сумме с $n < N$. Остаток ряда оценивается как $CN^{-(\sigma-1)}$ и требование, чтобы он был меньше $\Omega^{-0.5-j}$, выполняется при $N > C\Omega^{\frac{0.5+j}{\sigma-1}}$. Таким образом, получаем конечную сумму О.И. с параметром n , который растет с ростом Ω . Теорема 2.1 позволяет в этом случае получить нужные оценки и доказать (5.11) при $\sigma > \sigma_0(j) = 2 + 2j$. Метод, используемый в этом примере, применяется и в задаче томографии.

Перейдем от ряда $F(\Omega)$ к конечной сумме

$$(5.12) \quad F(\Omega) = \sum_{n=1}^{N_0} J_n[u_n] + \Delta_0.$$

Так как $\sigma > 1$, то $\Delta_0 \leq C_\sigma N_0^{-(\sigma-1)}$, и, выбирая N_0 из условия $N_0 = \Omega^{\frac{0.5+j+\varepsilon}{\sigma-1}}$ ($\varepsilon > 0$), получим, что $\Delta_0 \leq C_\sigma \Omega^{-0.5-j-\varepsilon}$. Для оценки интегралов J_n используем теорему 2.1. Так как в общей критической точке $x_c = 0$ имеем $|\Phi^{(2)}(0)| = 1$, то $B_c = 1$. Из оценки

$|\Phi_n^{(p)}(x)| \leq 2n^{p-2}$ ($p \geq 2$) следует, что можно взять $\lambda = n^{-2}$, $\lambda_1 = n$. Экстремальные точки отсутствуют и, следовательно, $\tilde{\Phi}_1 = C\delta_0$, где $\delta_c = \delta_0$ – общий масштаб. Определяем δ_0 из условия $\delta_c = CB_c|\tilde{\Phi}^{(3)}|^{-1}$ (см. 2.3)), что дает $\delta_0 = Cn^{-1}$. При оценке величины $\Delta_{Nkr}^P[J_n]$ (2.17) полагаем $P = m$, $N = 3m$, $r = 2m$, $k = 3m$. Тогда, используя оценки (2.18), получим $|\Delta_{Nkr}^P[J_n]| \leq Cn^{-\sigma}(\Omega^{-1}n^2)^m$ и, подставляя разложение (2.16) для $J = J_n$ в равенство (5.12), находим

$$F(\Omega) = \sum_{n=1}^{N_0} (J_n)_{kr}^c + \Delta_0 + \Delta_{1m},$$

$$|\Delta_{1m}| \leq C_{\sigma m}(N_0^2\Omega^{-1})^m \quad (\forall m \geq 1).$$

Если выполняется условие

$$(5.13) \quad 1 - 2\frac{0.5+j+\varepsilon}{\sigma-1} = \gamma > 0 \quad \left(\frac{N_0^2}{\Omega} \leq \Omega^{-\gamma} < 1 \right),$$

то $|\Delta_{1m}| \leq C_{\sigma}\Omega^{-\gamma m}$ и, выбирая $m \geq (0.5+j)\gamma+\varepsilon$, получим $|\Delta_{1m}| \leq C_{\sigma m}\Omega^{-0.5-j-\varepsilon}$. Осталось рассмотреть критический вклад $(J_n)_{kr}^c$ (2.16). Для этого используем представление (2.29) при $Q = m - 1$. Последнее из условий (2.26) выполняется, и, следовательно, из (3.26) выводим

$$(J_n)_{kr}^c = (J_n)_c^Q + \Delta_Q(J_n), \quad |\Delta_Q(J_n)| \leq \frac{C_Q}{\Omega^{1/2}n^{\sigma}} \left(\frac{n^2}{\Omega} \right)^{Q+1},$$

где величина $(J_n)_c^Q$ определяется равенством (2.29). Таким образом,

$$(5.14) \quad F(\Omega) = \sum_{n=1}^{N_0} (J_n)_c^Q + \Delta, \quad |\Delta| \leq C_{\sigma q}\Omega^{-(0.5+j+\varepsilon)}.$$

В интересующем нас случае из (2.23) получаем

$$D_q^c = n^{2q} \sum_{p=0}^q C_{pq} u^{(2p)}(0) n^{-2p},$$

и, следовательно (с учетом (5.10)),

$$|(J_n)_c^Q| \leq \frac{C_Q}{\Omega^{1/2}} \sum_{s=j}^{m-1} \Omega^{-s} n^{-(\sigma+2j-2s)}.$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\sum_{n=1}^{N_0} |(J_n)_c^Q| \leq C_{m\sigma j} \Omega^{-(0.5+j)}.$$

Подставляя эту оценку в (5.14), получим нужный результат (5.11). Условие (5.13) ($\varepsilon > 0$) выполняется, если

$$1 - \frac{1+2j}{\sigma-1} > 0 \iff \sigma > 2(1+j) = \sigma_0(j),$$

что и требовалось доказать.

Аналогичную задачу можно рассмотреть, например, для $\Phi_n(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}n$. В этом случае $\lambda_1 = 1$, $\lambda = n$ и получим оценку (5.11) при $\sigma > 3.5 + 5j$.

5.5. Преобразование Фурье характеристической функции области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Доказательство леммы 2.2. В отличие от примеров в пп. 5.1–5.4, в рассматриваемой задаче нельзя дать явных формул для критических точек. В связи с этим возникает вопрос о явном виде условий (2.38), необходимом для получения оценок с константами. В этом случае полезна лемма 5.1, доказанная ниже, которая дает информацию о локализации корней трансцендентных (алгебраических) уравнений. Вся стратегия оценки преобразования Фурье полностью переносится на случай одномерных О.И., возникающих в задаче томографии.

ЛЕММА 5.1. Пусть трансцендентное (алгебраическое) уравнение $f(x) = 0$ при $|x| < b$ имеет вид

$$(5.15) \quad x = a + R(x), \quad |R(x)| \leq A|x|^\sigma, \quad \sigma > 1.$$

Тогда

1) если при некотором $\beta \leq 0.5$ выполняются условия

$$(5.16) \quad |a| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{A} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}, \quad |a| \leq (1-\beta)b,$$

то существует по крайней мере одно “близкое” к a решение x_0 и для всех близких решений

$$(5.17) \quad \frac{2}{3}|a| \leq |x_0| \leq 2|a|, \quad |x - a| \leq A(2|a|)^\sigma,$$

кроме того, возможно, имеются “далекие” решения, для которых эта оценка не выполняется, и для них

$$(5.18) \quad |x_0| \geq \left(\frac{1}{2A} \right)^{\sigma-1};$$

2) если $|a| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{A} \right)^{1/(\sigma-1)}$, то для всех решений, если они существуют, верна оценка

$$(5.19) \quad |x_0| \geq \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{A} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если при некотором β , $0 < \beta < 1$, выполняются условия

$$|a| \leq a_0(\beta) \equiv \beta^{1/(\sigma-1)}(1-\beta)^{-1/(\sigma-1)}, \quad |a| \leq (1-\beta)b,$$

то имеется по крайней мере одно решение x_0 такое, что

$$|a|(1+\beta)^{-1} \leq |x_0| \leq |a|(1-\beta)^{-1}, \quad |x_0 - a| \leq A|a|^\sigma(1-\beta)^\sigma.$$

Достаточно рассмотреть случай $a > 0$. В области $0 \leq x \leq b$, $A|x|^\sigma < \beta$ верна оценка $|R(x)| \leq \beta x$ и, следовательно, $g_-(x) \leq f(x) \leq g_+(x)$, $g_\pm(x) = x - a \pm \beta x$. Отсюда следует, что имеется по крайней мере один корень x_0 , лежащий между корнями $x_\pm = (1 \pm \beta)^{-1}$ уравнений $g_\pm(x) = 0$. Исходные предположения выполняются, если $x_- \leq b$, $A(x_-)^{\sigma-1} \leq \beta$, что эквивалентно условию (5.16), и при этом $|x_0 - a| \leq |R(x_0)| \leq Aa^{\sigma-1}(1-\beta)^{-\sigma+1}$. В случае $\beta = 1/2$ получаем (5.17). Если $|x_0| < \frac{2}{3}|a|$ или $|x_0| > 2a$, то $|x_0 - a| > 0.5x_0$ и, следовательно, $A|x_0|^{\sigma-1} \geq 0.5x_0$, откуда следует (5.18) и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) доказывается от противного. Пусть $a > 0$, и предположим, что есть решение $x_0 < a_0p^{-1}$ ($p \equiv 1 + \beta(1-\beta)^{\sigma-1}$). Тогда $|R(x_0)| \leq a_0p^{-\sigma}\beta(1-\beta)^{\sigma-1}$ и, следовательно, $|x_0| \geq a_0 - |R(x_0)| \geq a_0(1-\beta(1-\beta)^{\sigma-1})p^{-\sigma}$. Так как $(1-\beta(1-\beta)^{\sigma-1})p^{-\sigma} > p^{-1}$, то приходим к противоречию. Таким образом, если решение x_0 существует, то $x_0 > a_0p^{-1} \geq \frac{1}{3}(\beta/A)^{1/(\sigma-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2.

1. *Вспомогательные оценки и локализация критических точек.* Из предположения (2.47) и формул Серре–Френе (2.45) следует, что

$$|\vec{r}^{(n)}(s)| \leq C_n \bar{k} b^{n-2} \quad (n \geq 2),$$

$$|\Phi^{(n)}(s)| \equiv |\langle \vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle^{(n)}| \leq C_n \bar{k} b^{n-2}.$$

В силу определения (2.48) величин Δ_i имеет место двусторонняя оценка

$$(5.20) \quad |k(s)| \asymp C_i K_i |s - s_i^0|^{p_i} \quad (|s - s_i^0| \leq \Delta_i),$$

и, следовательно,

$$(5.21) \quad s_{i+1}^0 - s_i^0 \geq \max\{\Delta_i, \Delta_{i+1}\} \geq \frac{1}{2}(\Delta_i + \Delta_{i+1}).$$

Отсюда следует оценка для числа $\mathcal{N}$ выпуклых дуг, из которых состоит контур $\partial\mathcal{D}$:

$$(5.22) \quad \mathcal{N} \leq l_{\partial\mathcal{D}} \left(\min_i \left\{ \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} \right\} \right)^{-1} \quad (l_{\partial\mathcal{D}} - \text{длина } \partial\mathcal{D}).$$

Так как $\varphi_{i+1}^0 - \varphi_i^0 = \int_{s_i^0}^{s_{i+1}^0} k ds$, то имеется оценка

$$(5.23) \quad |\varphi_{i+1}^0 - \varphi_i^0| \geq C_i [K_i^{p_i} (\bar{k} b^{p_i+1})^{1-p_i} + K_{i+1}^{p_{i+1}} (\bar{k} b^{p_{i+1}+1})^{1-p_{i+1}}].$$

Это, конечно, не противоречит тому, что величина $\varphi_{t+1} - \varphi_t$ может быть сколь угодно малой. Рассмотрим уравнение $f(s) = 0$ ($f(s) = \langle \vec{\tau} \vec{\eta} \rangle(s)$) для критических точек. Разлагая функцию f в ряды Тейлора около точек уплощения s_i^0 , получим, что уравнение $f(s) = 0$ эквивалентно любому из уравнений вида

$$x_i = a_i + R_i(x) \quad (|R_i(x)| \leq A_i |x|^{\sigma_i}),$$

в которых

$$x_i = (s - s_i^0)^{p_i+1}, \quad A_i = \frac{\bar{k} b^{p_i+1}}{K_i(p_i+2)!}, \quad \sigma_i = 1 + \frac{1}{p_i+1}, \quad a_i = -\frac{(p_i+1)!}{K_i} \sin(\varphi - \varphi_i^0).$$

Введем величину

$$\Psi_i \equiv C_i^0 K_i^{p_i+2} (\bar{k} b^{p_i+1})^{-p_i-1}.$$

Если $|\varphi - \varphi_i^0| \leq \Psi_i$, то по лемме 5.1 имеются близкие к s_i^0 критические точки s_c , для которых

$$(5.24) \quad C_i^1 \left(\frac{|\varphi - \varphi_i^0|}{K_i} \right)^{\frac{1}{p_i+1}} \leq |s_c - s_i^0| \leq C_i^2 \left(\frac{|\varphi - \varphi_i^0|}{K_i} \right)^{\frac{1}{p_i+1}} < \Delta_i,$$

и, возможно, имеются далекие от s_i^0 точки s_c , для которых

$$(5.25) \quad |s_c - s_i^0| \geq C_i^3 K_i (\bar{k} b^{p_i+1})^{-1}.$$

Величину C_i^0 выбираем таким образом, что

$$(5.26) \quad C_i^2 \left(\frac{\Psi_i}{K_i} \right)^{\frac{1}{p_i+1}} \leq \gamma_i \Delta_i \quad (\gamma_i < 1/2).$$

тогда при $|\varphi - \varphi_i^0| \geq \Psi_i$ все точки s_c — далекие и

$$(5.27) \quad |s_c - s_i^0| \geq C_i^4 K_i (\bar{k} b^{p_i+1})^{-1}.$$

2. *Доказательство утверждения 1).* Пусть $\varphi_t < \varphi < \varphi_{t+1}$. Этот интервал играет роль связной компоненты V_i (2.34) дополнения к каустике $\mathcal{K} = \bigcup \varphi_t$. Для оценки воспользуемся леммой 4.2. В рассматриваемом случае амплитуда $u = [\vec{\tau} \vec{\eta}]$ и, следовательно, $|u| \leq 1$, $m[u] \leq C\mathcal{N}$. Кроме того, имеется оценка $m[\Phi^{(1)}] \leq C\mathcal{N}$ и число критических точек $K \leq C\mathcal{N}$. Уравнение $\Phi^{(2)}(s) = k \langle \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle = 0$ для экстремальных точек s_{ex} имеет решения двух типов $s'_{ex} = s_i^0$, $\vec{\tau}(s''_{ex}) = \pm \vec{\eta}$ и, следовательно (4.16),

$$|\Phi_{\Delta}^1(\varphi)| \geq \frac{2}{\pi} \min\{|\varphi - \varphi_t|, |\varphi - \varphi_{t+1}|\}.$$

Учитывая, что $|\Phi^{(2)}(s_c)| = |k(s_c)|$, из (4.18), (4.19) получаем оценку

$$(5.28) \quad |\widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi)| \leq C\mathcal{N} |\lambda|^{-1} \sum_{s_c} [|\lambda k(s_c)|^{-\frac{1}{2}} + |\lambda k(s_c) \delta_c|^{-1}] + C\mathcal{N} |\lambda|^{-2} (|\varphi - \varphi_t|^{-1} + |\varphi - \varphi_{t+1}|^{-1}).$$

Условия (4.17) выполняются, если $\Delta_c = \delta_c$,

$$(5.29) \quad |k(s_c)| \geq 2((\bar{k}_c)^2 + \bar{k}_c^{(1)})\delta_c.$$

Рассмотрим близкие к s_i^0 критические точки, для которых из (5.24), (5.20) следует, что

$$(5.30) \quad C_i^5 K_i \left(\frac{|\Delta\varphi_i|}{K_i} \right)^{\frac{p_i}{p_i+1}} \leq |k(s_c)| \leq C_i^6 K_i \left(\frac{|\Delta\varphi_i|}{K_i} \right)^{\frac{p_i}{p_i+1}} \quad (\Delta\varphi_i \equiv \varphi - \varphi_i^0).$$

Оценим сверху величину $k^{(1)}(s)$ при $|s - s_c| < \delta_c$. Пусть $\delta_c \leq C_i^7 |\Delta\varphi_i K_i^{-1}|^{1/(p_i+1)}$, $C_i^7 \leq C_i^2$. Тогда $|s - s_i^0| \leq |s - s_c| + |s_c - s_i^0| \leq 2C_i^2 |\Delta\varphi_i K_i^{-1}|^{1/(p_i+1)}$. Так как $|\Delta\varphi_i| \leq \Psi_i$, то при соответствующем выборе C_i^0 из (5.26) получим, что $|s - s_i^0| < \Delta_i$ и, следовательно, $|k^{(1)}(s)| \leq C_i^8 K_i^{\frac{2}{p_i+1}} |\Delta\varphi_i|^{\frac{(p_i-1)}{(p_i+1)}}$. Условие (5.29) выполняется, если $C_i^5 \geq 2C_i^7 (C_i^8 + \pi(C_i^6)^2)$, что всегда можно сделать с помощью соответствующего выбора величины C_i^7 . Выбираем δ_c , из условия равенства двух членов в квадратных скобках оценки (5.28). Это дает $\delta_c = |k(s_c)\lambda|^{-1/2}$. Требование $\delta_c = |k(s_c)\lambda|^{-1/2} \leq C_i^7 |\Delta\varphi_i K_i^{-1}|^{1/(p_i+1)}$ для близких к s_i^0 критических точек выполняется при $|\Delta\varphi_i| \geq \Delta_0 \varphi_t$. Для далеких от s_i^0 точек s_c имеем $|k(s_c)| \geq \tilde{k}$, и для выполнения (5.29) достаточно выполнения условия (2.50). Оценки (2.52) следуют из (5.30). Утверждение 1) доказано.

3. *Доказательство утверждения 2).* Используем лемму 4.3. Через s_{0c} обозначают критические точки фазы $\Phi_0(s) = \Phi(s, \varphi_t)$. Ниже считается, что $j \subset t, i \not\subset t$. При $\varphi = \varphi_t$ имеются вырожденные критические точки s_j^0 и невырожденные s_{0c}' ,

$$\Phi_0^{(n)}(s_j^0) = 0 \quad (n \leq p_j + 1), \quad |\Phi_0^{(p_j+2)}(s_j^0)| = K_j.$$

Соответствующие масштабы δ_{0c} обозначим через δ_j, δ_0 . Анализ экстремальных точек уже был проведен выше, и из него следует, что можно взять

$$\Phi_{0\Delta}^1 = \frac{2}{\pi} \min_{t' \neq t} |\varphi_t - \varphi_{t'}| \equiv \alpha_t.$$

Тогда из (4.33), (4.34) следует, что в некоторой окрестности точки $\varphi = \varphi_t$ имеет место оценка

$$(5.31) \quad |\widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi)| \leq C \mathcal{N} |\lambda|^{-1} \left[\sum_{s_{0c}'} |\lambda k(s_{0c}')|^{-1/2} + |\lambda k(s_{0c}') \delta_0|^{-1} \right] \\ + C(p) \mathcal{N} |\lambda|^{-1} \sum_{j \subset t} [K_j \lambda|^{-\frac{1}{p_j+2}} + (|\lambda| K_j \delta_j^{p_j+1})^{-1}] \\ + C(p) \mathcal{N} |\lambda|^{-2} \sum_{t' \neq t} |\varphi_t - \varphi_{t'}|^{-1}.$$

Рассмотрим условия ее справедливости. Используя оценки $|\partial_\varphi \Phi^{(1)}| \leq 1$, $|\partial_\varphi \Phi^{(p_j+2)}| \leq C_j \bar{k} b^{p_j}$ и учитывая, что $|\varphi - \varphi_t| \leq \Delta_0 \varphi_t$, получим, что условия (4.30), (4.31) выполняются, если

$$(5.32) \quad (\Delta_0 \varphi_t) \bar{k} b^{p_j} \leq \frac{1}{4} K_j, \quad |\Delta_0 \varphi_t| \leq \frac{1}{2} \frac{K_j}{(p_j + 1)!} \delta_j^{p_j+1}, \quad \delta_j \leq C_j (\bar{k} b^{p_j+1})^{-1},$$

и, соответственно,

$$(5.33) \quad (\Delta_0 \varphi_t) \bar{k} \leq \frac{1}{4} |k(s'_{0c})|, \quad (\Delta_0 \varphi_t) \leq \frac{1}{2} |k(s'_{0c})| \delta_0, \quad \delta_0 ((\bar{k})_{0c}^2 + \bar{k}_{0c}^{(1)}) \leq \frac{1}{4} |k(s'_{0c})|.$$

К этим условиям надо еще добавить условие $(\Delta_0 \varphi_t) \leq 0.5 \alpha_t$, которое выполняется, так как $\varphi_{t+1} - \varphi_t \geq C(p)(\Delta_0 \varphi_t + \Delta_0 \varphi_{t+1})$. Определим δ_j и δ_0 таким образом, чтобы во втором из условий (5.32) и (5.33) был знак равенства,

$$\delta_j = C_j K_j^{\frac{1}{p_j+1}} (\Delta_0 \varphi_t)^{\frac{1}{p_j+1}}, \quad \delta_0 = C(\Delta_0 \varphi_t) |k(s'_{0c})|^{-1}.$$

При таком выборе δ_j , δ_0 нужная оценка (2.53) сразу следует из (5.31). Оценки (2.54) доказываются точно так же, как и (2.52). Первое и третье из условий (5.32), а также первое из условий (5.33) принимают вид $|\lambda| \geq \lambda_t [\tilde{n}, K_i, b, p_i]$. Последнее из условий (5.33) имеет тот же вид, что и (5.29) при $\varphi = \varphi_t$. Для доказательства его выполнения достаточно заметить, что при нашем выборе δ_c выполняется условие $\delta_c \leq C_i^5 (|\varphi_t - \varphi_i^0| K_i^{-1})^{\frac{1}{p_i+1}}$. Остальные рассуждения аналогичны приведенным выше при доказательстве утверждения 1). Лемма 2.2 доказана.

Рассмотрим случай, когда нет двух точек уплощения с параллельными касательными, т.е. когда $j \subset t \implies j = j(t)$. Условие $|\lambda k(s'_{0c})|^{1/2} > |\lambda K_j|^{\frac{1}{p_j+2}}$ выполняется при $|\lambda| \geq \lambda_t$, если

$$|\varphi_i^0 - \varphi_j^0| \geq C_{ij} K_i^{-\frac{1}{p_i}} K_j^{\frac{2(p_i+1)}{p_j(p_j+2)}} |\lambda|^{-\frac{p_j}{p_j+2} \frac{p_i+1}{p_i}}.$$

При этих условиях из (2.53) следует, что

$$(5.34) \quad \begin{aligned} \widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi) &\leq C(p) \mathcal{N} |\lambda|^{-1} |\lambda K_j|^{\frac{1}{p_j+2}} \text{ при} \\ |\varphi - \varphi_j^0| &\leq |\Delta_0 \varphi_j| \equiv C_j K_j^{\frac{1}{p_j+2}} |\lambda|^{-\frac{p_j+1}{p_j+2}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, при $|\varphi - \varphi_i^0| > \Delta_0 \varphi_i$

$$\min_{s_c} \{|\lambda|^{1/2} |k(s_c)|^{1/2}\} \leq \min_i \{|\varphi - \varphi_i^0| |\lambda|\},$$

и, следовательно, в этой области

$$(5.35) \quad |\widehat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi)| \leq C \mathcal{N} |\lambda|^{-3/2} \sum_{s_c} |k(s_c)|^{-1/2}.$$

При $|\varphi - \varphi_j^0| = \Delta_0 \varphi_j$

$$\min_{s_c} \{|k(s_c)|^{1/2} |\lambda|^{1/2}\} = C_j K_j^{\frac{1}{p_j+2}} |\lambda|^{\frac{1}{(p_j+2)}} \quad (\lambda \geq \lambda_t).$$

Таким образом, оценки (5.34), (5.35) совпадают при $|\varphi - \varphi_j^0| = \Delta_0 \varphi_j$ и, следовательно, являются согласованными. Отсюда, в свою очередь, следует, что оценка (5.35) справедлива во всей области φ при $|\lambda| \geq \lambda_t[\tilde{k}, K_i, p, \bar{k}, b]$. Так как для $k(s_c)$ в (5.35) выполняется оценка (2.52), то при вычислении условий

$$(5.36) \quad \begin{aligned} C_j K_j^{\frac{1}{(p_j+1)}} |\varphi - \varphi_j^0|^{\frac{p_j}{p_j+1}} &< \tilde{k}, \\ C_i K_i^{\frac{1}{p_i+1}} |\varphi - \varphi_i^0|^{\frac{p_i}{p_i+1}} &\geq C_j K_j^{\frac{1}{p_j+1}} |\varphi - \varphi_j^0|^{\frac{p_j}{p_j+1}} \end{aligned}$$

получаем оценку

$$(5.37) \quad |\hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi)| \leq \frac{C_j \mathcal{N}}{|\lambda|^{3/2} K_j^{\frac{1}{2(p_j+1)}}} \frac{1}{|\varphi - \varphi_j^0|^{\frac{p_j}{2(p_j+1)}}}.$$

Результат Рандела [30] следует из этой оценки.

Заметим, что если есть несколько точек s_i^0 таких, что касательные в них параллельны, то полученные выше оценки уже не будут согласованными. Отметим также, что в [30] фактически доказано только утверждение 1 леммы 2.2. Это связано с тем, что на с. 273 этой работы пропущено условие $\delta < p_1$ (в обозначениях [30]).

5.6. Ошибки регуляризации, доказательство леммы 2.3. В этом пункте рассматривается общая задача оценки ошибки регуляризации Δf_R для функции $f = \chi_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$,

$$\Delta f_R(\vec{r}_0) = f_R(\vec{r}_0) - f(\vec{r}_0) \quad (f(\vec{r}_0) \equiv \chi_{\mathcal{D}}(\vec{r}_0)),$$

где величина f_R отвечает введению регуляризатора R в формулу обращения преобразования Фурье (Радона) и определяется равенством (2.56). Предполагается, что регуляризатор однороден, т.е. выполняется условие (2.57), и величина Ω^{-1} играет роль параметра регуляризации. Относительно вида функции G пока будем предполагать, что G – кусочно-гладкая функция и $G \in L^1$, что в силу оценок величины $\hat{f}(\lambda \vec{\eta}) \equiv \hat{\chi}_{\mathcal{D}}(\lambda, \varphi)$, приведенных в п. 5.5, обеспечивает абсолютную сходимость интеграла (2.56). Более точные условия на G будут сформулированы ниже. Описанную задачу можно рассматривать как задачу о сходимости общего однородного и сферически-симметричного метода суммирования интеграла Фурье для функций вида

$$f(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^I g_i(\vec{r}_0) \chi_{\mathcal{D}_i}(\vec{r}_0) \quad (g_i \in C^\infty, \partial \mathcal{D}_i \in \{\partial \mathcal{D}\}),$$

так как в силу результатов [28] достаточно рассмотреть случай $f = \chi_{\mathcal{D}}$. Начнем с преобразования выражения $f_R(\vec{r}_0)$. Используя (1.15) и условия однородности (2.57), имеем

$$(5.38) \quad \begin{aligned} f_R(\vec{r}_0) &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^\infty d\xi G(\xi) \int_{\partial\mathcal{D}} ds K(\Omega\xi\vec{l}), \\ K(\vec{a}) &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{\tau}, \vec{\eta}] e^{i\langle \vec{a}, \vec{\eta} \rangle}, \quad \vec{l} = \vec{r}(s) - \vec{r}_0. \end{aligned}$$

С помощью интегрального представления функции Бесселя

$$(5.39) \quad J_0(|\vec{z}|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\langle \vec{z}, \vec{\eta} \rangle} d\varphi \quad (\vec{z} \in \mathbb{R}^2)$$

получим, что

$$K(\vec{a}) = \left(\tau_x \frac{\partial}{\partial a_y} - \tau_y \frac{\partial}{\partial a_x} \right) J_0(|\vec{a}|) = J_0^{(1)}(|\vec{a}|) \frac{[\vec{\tau}, \vec{a}]}{|\vec{a}|},$$

и, следовательно,

$$(5.40) \quad f_R(\vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} ds \frac{[\vec{\tau}, \vec{l}]}{l^2} \int_0^\infty d\xi G(\xi) \frac{d}{d\xi} J_0(\Omega\xi l) \quad (l \equiv |\vec{l}|).$$

Интегрируя по частям и используя формулу Гаусса [48]

$$(5.41) \quad \chi_{\mathcal{D}}(\vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^2} ds \quad (\vec{r}_0 \notin \partial\mathcal{D}),$$

получим нужное представление ошибки регуляризации

$$(5.42) \quad \begin{aligned} \Delta f_R(\vec{r}_0) &= \sum_{\xi_p \neq 0} \frac{\Delta_p G}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} ds \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^2} J_0(\xi_p \Omega l) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} ds \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^2} \int_0^\infty G^{(1)}(\xi) J_0(\Omega\xi l) d\xi. \end{aligned}$$

В этой формуле

$$\Delta_p G \equiv G(\xi_p + 0) - G(\xi_p - 0)$$

и ξ_p — точки нарушения гладкости функции G , т.е. точки, в которых некоторая производная $G(k)$ имеет разрыв первого рода. Поведение входящих в выражение (5.42) интегралов по ξ описывается следующей леммой.

ЛЕММА 5.2. Пусть функция $F(b | g)$ задается равенством

$$(5.43) \quad F(b | g) = \int_0^\infty g(\xi) J_0(\xi b) d\xi \quad (b > 0)$$

и выполнены условия:

- 1) функция g и все ее производные $g^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, N$, абсолютно интегрируемы и являются кусочно-гладкими,
- 2) если ξ_p , $p = 0, 1, 2, \dots$ ($\xi_0 = 0$), — точки нарушения гладкости функций $g^{(n)}$, то для них выполняются условия

$$(5.44) \quad \sum_{p=1}^{\infty} |\Delta_p g^{(n)}| < \infty, \quad \xi_{p+1} - \xi_p \geq \Delta\xi \quad (\xi_p \geq p\Delta\xi).$$

Тогда имеет место равенство

$$(5.45) \quad F(b | g) = \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1} g^{(n)}(+0) \alpha_n}{(ib)^{n+1}} + \frac{1}{b^{3/2}} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{b^n} \sum_{p=1}^{\infty} C_{np}(g) e^{i\xi_p b} \right\} + \Delta_N F,$$

в котором

$$(5.46) \quad |\Delta_N F| \leq \frac{\|g^{(N)}\|_{L^1}}{b^N} + \frac{1}{b^{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\Delta_p(g^{(n)})|}{(\xi_p)^{N-n}} C_n$$

и коэффициенты α_n , $C_{np}(g)$ задаются соотношениями

$$(5.47) \quad \begin{aligned} \alpha_n &= \int_1^\infty \frac{dt}{t^{n+1} \sqrt{1-t^2}}, \\ C_{np}(g) &= \sum_{k=0}^n \frac{i^{k+1} \varphi_k^{(n-k)}(1)}{(\xi_p)^{n-k+0.5}} \Delta_p(g^{(k)}) \frac{\Gamma(n-k+0.5)}{(n-k)!} e^{\frac{i\pi}{2}(n-k+0.5)}, \\ \varphi_k(t) &\equiv (t+1)^{-1/2} t^{-k-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем интегральное представление [47] функции Бесселя J_0 :

$$J_0(k) = \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \int_1^\infty (t^2 - 1)^{-1/2} e^{ixt} dt$$

и запишем интеграл $F(b | g)$ (5.43) в виде

$$(5.48) \quad F(b | g) = \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(\xi) d\xi \int_1^\infty (t^2 - 1)^{-1/2} e^{it\xi b} dt.$$

Предположим, что в этом интеграле можно изменить порядок интегрирования, что будет обосновано ниже. Тогда

$$(5.49) \quad F(b | g) = \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \int_1^\infty (t^2 - 1)^{-1/2} dt \int_0^\infty g(\xi) e^{it\xi b} d\xi.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(\xi) e^{itb\xi} d\xi &= \sum_{p=0}^\infty \int_{\xi_p}^{\xi_{p+1}} g(\xi) e^{itb\xi} d\xi \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n g^{(n-1)}(+0)}{(itb)^n} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{(itb)^n} \sum_{p=1}^\infty e^{itb\xi_p} \Delta_p(g^{(n-1)}) \\ &\quad + \frac{(-1)^N}{(itb)^N} \int_0^\infty e^{it\xi b} g^{(N)}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в (5.49) и изменим порядок интегрирования и суммирования по p , что возможно в силу условия 2). Тогда

$$\begin{aligned} (5.50) \quad F(b | g) &= \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1} g^{(n)}(+0)}{(ib)^{n+1}} \alpha_n \\ &\quad + \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1} \Delta_p(g^{(k)})}{(ib)^{k+1}} Q_{kp} + \Delta_N^1 \end{aligned}$$

и в этом равенстве

$$(5.51) \quad Q_{kp} = \int_1^\infty \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{t-1}} e^{i\xi_p b t} dt, \quad |\Delta_N^1| \leq \|g^{(N)}\|_{L^1} b^{-N}.$$

Интегралы вида Q_{kp} рассмотрены в [49], и для них имеет место разложение

$$\begin{aligned} (5.52) \quad Q_{kp} &= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Gamma(m+0.5)}{m!} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(m+0.5)}}{(\xi_p b)^{m+0.5}} \varphi_k^{(m)}(1) e^{i\xi_p b} + R_M^k, \\ |R_M^k| &\leq C_{kM} (\xi_p b)^{-M} \quad \left(C_{kM} = \int_1^\infty \frac{|\varphi_k^{(M)}(t)|}{\sqrt{t-1}} dt \right). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (5.50), выбирая $M = N - k$ и переходя от суммирования по m к суммированию по $n = k + m$, получим (5.45) вместе с оценкой, уточняющей (5.46):

$$(5.53) \quad |\Delta_N F| \leq \|g^{(N)}\|_{L^1} b^{-N} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{b^{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=1}^\infty \frac{|\Delta_p g^{(M)}|}{\xi_p^{N-n}} C_{n, N-n}.$$

Остается обосновать изменение порядка интегрирования в (5.48). Для этого запишем интеграл $F(b | g)$ в виде

$$\begin{aligned} F(b | g) &= \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(\xi) d\xi \int_1^T \frac{e^{i\xi b t}}{\sqrt{t^2-1}} dt + \Delta_T, \\ \Delta_T &= -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \\ \Delta_1 &= \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g d\xi \int_1^T \frac{e^{i\xi b t}}{\sqrt{t^2-1}} dt, \quad \Delta_2 = \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \int_\delta^\infty g d\xi \int_T^\infty \frac{e^{i\xi b t}}{\sqrt{t^2-1}} dt, \\ \Delta_3 &= \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g d\xi \int_1^\infty \frac{e^{i\xi b t}}{\sqrt{t^2-1}} dt, \end{aligned}$$

и будем считать, что $T \geq 2$. Непосредственно из определений при $g \leq \bar{g}$ получаются оценки

$$\Delta_1 \leq \frac{2}{\pi} \bar{g} \delta \ln(2T), \quad \Delta_3 \leq \bar{g} \delta.$$

Величину Δ_2 представим в виде $\Delta_2 = \text{Im} \frac{2}{\pi} (\Delta_2^1 + \Delta_2^2)$, где

$$\Delta_2^1 = \int_{\delta}^{\infty} g d\xi \int_T^{\infty} \frac{e^{i\xi bt}}{t} dt, \quad \Delta_2^2 = \int_{\delta}^{\infty} g d\xi \int_T^{\infty} e^{i\xi bt} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Так как

$$|\Delta_2^2| \leq \int_0^{\infty} |g| d\xi \int_T^{\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - t^{-2}}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad 1 - \sqrt{1 - t^{-2}} \leq t^{-2}, \quad \sqrt{t^2 - 1} \geq \frac{3}{4}t \quad (t > 2),$$

то для Δ_2^2 получаем оценку

$$|\Delta_2^2| \leq \|g\|_{L^1} T^{-2}.$$

Используя неравенство

$$\left| \int_T^{\infty} \frac{e^{i\xi bt}}{t} dt \right| \leq \frac{2}{\xi bt},$$

имеем

$$|\Delta_2| \leq \frac{2\|g\|_{L^1}}{\delta bt} + \frac{\|g\|_{L^1}}{T^2}$$

и, следовательно,

$$|\Delta_T| \leq C\bar{g}\delta \ln T + \frac{2\|g\|_{L^1}}{\delta bt} + \frac{\|g\|_{L^1}}{T^2}.$$

Выбирая $\delta = T^{-1/2}$, получим

$$|\Delta_T| \leq \frac{C\bar{g} \ln T}{T^{1/2}} + \frac{C\|g\|_{L^1}}{bT^{1/2}} + \frac{\|g\|_{L^1}}{T^2}.$$

Таким образом, $\Delta_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ равномерно по b при $b > b_0 > 0$. Остается заметить, что в силу принципа равномерной (абсолютной) сходимости

$$\int_0^{\infty} g(\xi) d\xi \int_1^T \frac{e^{i\xi bt}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \int_0^{\infty} g(\xi) e^{i\xi bt} d\xi,$$

что и завершает доказательство.

Применим доказанную лемму для оценки ошибки регуляризации Δf_R (2.55). Запишем эту величину в виде

$$(5.54) \quad \Delta f_R(\vec{r}_0) = \Delta_0 f_R^{(\vec{r}_0)} + \Delta_1 f_R(\vec{r}_0),$$

где по определению

$$(5.55) \quad \begin{aligned} \Delta_0 f_R(\vec{r}_0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \Delta_p G \int_{\partial \mathcal{D}} ds \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^2} J_0(\xi_p \Omega l), \\ \Delta_1 f_R(\vec{r}_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathcal{D}} ds \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^2} F(\Omega l \mid G^{(1)}), \end{aligned}$$

и введем интегралы

$$(5.56) \quad I_n = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^{n+3}} ds, \quad I_{n,p} = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^{n+2.5}} e^{i\Omega\xi_p l} ds.$$

Если функция $G^{(1)}$ удовлетворяет условиям леммы 5.2, то

$$(5.57) \quad F(\Omega|\vec{l}| \mid G^{(1)}) = \operatorname{Im} \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1} G^{(n+1)}(+0)}{(i\Omega l)^{n+1}} \alpha_n I_n \right. \\ \left. + (\Omega l)^{-3/2} \sum_{n=0}^{N-1} (\Omega l)^{-n} \sum_{p=1}^{\infty} C_{np}(G^{(1)}) e^{i\xi_p l} \right\} + \Delta_N F.$$

Следовательно,

$$(5.58) \quad \Delta_1 f_R(\vec{r}_0) = \operatorname{Im} \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1} G^{(n+1)}(+0)}{(i\Omega)^{n+1}} \alpha_n I_n \\ + \operatorname{Im} \frac{1}{\Omega^{3/2} \pi^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\Omega^n} \sum_{p=1}^{\infty} C_{np}(G^{(1)}) I_{n+1,p} + \Delta_1^N(\vec{r}_0)$$

и для величины $\Delta_1^N(\vec{r}_0)$ справедлива оценка

$$|\Delta_1^N(\vec{r}_0)| \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{|\vec{l}, \vec{\tau}|}{l^2} ds |\Delta_N F|, \\ |\Delta_N F| \leq \frac{\|G^{(N+1)}\|_{L^1}}{(\Omega l)^N} + \frac{1}{(\Omega l)^{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Delta_p(G^{(n+1)}) C_n}{(\xi_p)^{N-n}}.$$

Нас будет интересовать случай, когда точка $\vec{r}_0$ находится на расстоянии, большем чем d_0 , от границы области

$$d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) \geq d_0, \quad l \geq d_0.$$

В этом случае

$$(5.59) \quad |\Delta_1^N(\vec{r}_0)| \leq \frac{l_{\partial\mathcal{D}}}{\pi^2 d_0} \frac{\|G^{(N+1)}\|_{L^1}}{(\Omega d_0)^N} + \frac{1}{(\Omega d_0)^{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\Delta_p G^{(n+1)}|}{(\xi_p)^{N-n}} C_n.$$

Предположим, что все производные $G^{(p)}$, $0 \leq p \leq N$, непрерывны. Тогда в (5.54), (5.58)

$$C_{np}(G^{(1)}) = 0, \quad \Delta_0 f_R = 0,$$

и, следовательно, в этом случае

$$(5.60) \quad \Delta f_R(\vec{r}_0) = \operatorname{Im} \pi^{-2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1} G^{(n+1)}(0)}{(i\Omega l)^{n+1}} \alpha_n I_n + \Delta_1^N(\vec{r}_0) \right], \\ |\Delta_1^N(\vec{r}_0)| \leq l_{\partial\mathcal{D}} \|G^{(N+1)}\|_{L^1} (\pi^2 d_0 (\Omega d_0)^N)^{-1}.$$

Если, кроме того,

$$G^{(n)}(+0) = 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

то получим, что

$$(5.61) \quad |\Delta f_R(\vec{r}_0)| \leq \frac{l_{\partial\mathcal{D}} \|G^{(N+1)}\|_{L^1}}{\pi^2 d_0 (\Omega d_0)^N}.$$

Таким образом, при $d_0 \geq \Omega^{-1+\varepsilon}$ за счет выбора регуляризатора можно получить оценку $|\Delta f_R(\vec{r}_0)| \leq C \Omega^{-T} \forall T$.

Дальнейшее исследование величины $\Delta_1 f_R$ сводится к задаче оценки О.И. вида $I_{n,p}$ с фазой $\Phi(s) = l(s)$. Покажем, что и величину $\Delta_0 f_R$ можно выразить через такие интегралы. Для этого достаточно заметить, что асимптотическое разложение функции Бесселя $J_0(x)$ ($x \rightarrow \infty$) является обертывающим [50] и, следовательно,

$$(5.62) \quad J_0(x) = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix} \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^{-n} + \Delta_N J_0,$$

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{1^2 3^2 \dots (2n-1)^2}{2^{3n} n!} e^{-\frac{i\pi n}{2} - \frac{i\pi}{4}} \quad (n \geq 1).$$

При этом величина $\Delta_N J_0$ меньше первого отброшенного члена:

$$|\Delta_N J_0| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{|a_N|}{x^N}.$$

Используя разложение (5.62) для $J_0(\xi_p \Omega l)$ в (5.55), получим

$$(5.63) \quad \Delta_0 f_R(\vec{r}_0) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi \Omega}} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{\Omega^n} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Delta_p G}{(\xi_p)^{n+0.5}} I_{n,p} \right\} + \Delta_0^N$$

вместе с оценкой

$$(5.64) \quad |\Delta_0^N| \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|a_N|}{\Omega^{N+0.5}} \frac{l_{\partial\mathcal{D}}}{d_0^{1.5+N}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\Delta_p G|}{\xi_p^{N+0.5}}.$$

Таким образом, задача оценки ошибки регуляризации сведена к задаче оценки одномерных О.И. вида

$$J[u] = \int_{\partial\mathcal{D}} e^{i\Omega l(s)} u(s) ds.$$

Используя результаты §4, можно получить асимптотически точные оценки ошибки регуляризации, различные в зависимости от положения точки $\vec{r}_0$ относительно эволюты Γ контура $\partial\mathcal{D}$ (эволюта Γ является каустикой фазы $\Phi(s) = l(s)$ в интегралах $J[u]$). Это, в частности, позволяет выяснить характер сходимости различных методов суммирования интегралов Фурье для функций $f = \chi_{\mathcal{D}}$. Рассмотрим, например, вопрос о сходимости двумерного интеграла Фурье по кругам [19], [20]. В этом случае

$$G(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| > 1, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$(5.65) \quad \Delta f_R(\vec{r}_0) = \Delta_0 f_R(\vec{r}_0) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2\pi^3 \Omega}} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{\Omega^n} I_{n,1} \right\} + \Delta_0^N,$$

$$I_{n,1} \equiv \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l^{n+2.5}} e^{i\Omega l} ds.$$

Доказательство леммы 2.3. Первое утверждение этой леммы сразу следует из (5.65), так как, положив $N = 1$, имеем

$$(5.66) \quad |\Delta f_R(\vec{r}_0)| \leq \frac{Cl_{\partial \mathcal{D}}}{\Omega^{1/2} d^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{\Omega d} \right) \quad (d \equiv d(r_0, \partial \mathcal{D})).$$

Доказательство второго утверждения сводится к анализу критических точек s_c фазы $\Phi(s) = l(s)$. Так как $\Phi^{(1)}(s) = l^{-1} \langle \vec{l}, \vec{\tau} \rangle$, то критические точки s_c находятся из условия $\langle \vec{l}, \vec{\tau} \rangle = 0$ и, следовательно, для их определения достаточно провести нормали к контуру $\partial \mathcal{D}$ из точки $\vec{r}_0$. В точке s_c

$$(5.67) \quad \Phi^{(2)}(s_c) = l(s_c)^{-1} (1 + k(s_c) \langle \vec{l}(s_c), \vec{\nu}(s_c) \rangle) = l^{-1}(s_c) k(s_c) \tilde{d}_\Gamma(s_c),$$

где $\tilde{d}_\Gamma(s_c) \equiv |\vec{r}_0 - \vec{r}_\Gamma(s_c)|$ ($\vec{r}_\Gamma(s) \in \Gamma$). Таким образом, при $\vec{r}_0 \notin \Gamma$ критические точки невырождены. При $\vec{r}_0 \in \Gamma$ имеются как невырожденные критические точки s'_c , так и вырожденные s''_c , в которых $\Phi^{(2)}(s''_c) = 0$, $|\Phi^{(3)}(s''_c)| = |K^{(1)}(s''_c)|$. Если $\vec{r}_0 \notin \Gamma_0$, то $k^{(1)}(s''_c) \neq 0$. Если $k^{(1)}(s''_c) = 0$, то точка s''_c совпадает с одной из вершин s_0 , и в этом случае $|\Phi^{(4)}(s''_c)| = |\Phi^{(4)}(s_0)| = |k^{(2)}(s_0)|$, и т. д. Для контура общего положения $\Phi^{(4)}(s_0) \neq 0$, что и завершает доказательство, если заметить, что оценка (2.58) точна в центре круга.

С помощью лемм 4.2, 4.3 можно получить оценки Δf_R с константами. Приведем только простейший результат – оценку в области $d_\Gamma > 0$, $d_\Gamma \equiv d(\vec{r}_0, \Gamma)$. Пусть область $\mathcal{D}$ целиком лежит внутри круга T единичного диаметра и $\vec{r}_0 \in T$ ($d(\vec{r}_0, \vec{r}(s)) < 1$). Из (5.67) следует, что

$$(5.68) \quad \Phi^{(2)}(s_c) \geq \begin{cases} Cl(s_c)^{-1}, & |k(s_c)l(s_c)| < 0.5, \\ C\tilde{d}_\Gamma(s_c)l(s_c)^{-2}, & |k(s_c)l(s_c)| > 0.5. \end{cases}$$

Для оценки в области $d_\Gamma > 0$ используем лемму 4.2 для случая $(u, \Phi) \in L^1(n_1, n_2, n_3)$ и дополнение к ней. Берем $\Psi(s) = \langle \vec{l}, \vec{\tau} \rangle$ ($\Phi^{(1)}(s) = l^{-1}\Psi(s)$), тогда $\Psi_\Delta = Cd_\Gamma$ и, применяя лемму 4.2 и (4.25), получим, что при выполнении условий

$$(5.69) \quad d_\Gamma^3 d^{7/2} + d_\Gamma^{7/2} d^3 \geq C\Omega^{-1/2} (1 + \bar{k})^2 \tilde{l}_{\partial \mathcal{D}}^2 (1 + \bar{k} + \bar{k}^2 + \bar{k}^{(1)}),$$

$$\tilde{l}_{\partial \mathcal{D}} = \begin{cases} l_{\partial \mathcal{D}} & (d < l_{\partial \mathcal{D}}), \\ d & (d > l_{\partial \mathcal{D}}), \end{cases}$$

имеет место оценка

$$(5.70) \quad |\Delta f_R(\vec{r}_0)| \leq C \frac{\mathcal{K}(\vec{r}_0)}{\Omega} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\sqrt{dd_\Gamma}} \right),$$

где $\mathcal{K}(\vec{r}_0)$ – число различных нормалей, проведенных из точки $\vec{r}_0$ к $\partial\mathcal{D}$.

5.7. Специальный класс двумерных О.И., связанный с задачей томографии. Этот последний пример демонстрирует, что дают теорема 2.1 и следствие 2.1 для некоторого класса двумерных О.И. по полупространству. В частности, для этих интегралов будет получен ответ на следующие вопросы: насколько близко к границе области интегрирования могут подходить критические точки и как быстро могут расти с ростом Ω производные фазы, чтобы теорема 2.1 и следствие 2.1 еще оставались справедливыми.

Фаза Φ_{nm} (1.4) как функция двух переменных φ, ξ при $d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) > 0$ имеет только невырожденные критические точки. Отсюда следует, что в О.И. задачи томографии – все особенности класса A_k . Именно это обстоятельство лежит в основе решения этой задачи [28]. Заметим, что функции $S_{\alpha c}$, фигурирующие в теореме 2.3, в этом случае имеют вид $S(s)$ (1.11).

Рассматриваемый класс $\{J_2\}$ составляют О.И. вида

$$(5.71) \quad J_2[u] = \int_0^\infty dt \int_0^{2\pi} d\varphi u(\varphi, t) e^{i\Omega\Phi(\varphi, t)}, \quad \Phi(\varphi, t) = f(\varphi) + tg(\varphi).$$

Критические точки $x_c = (\varphi_c, t_c)$ фазы $\Phi(x)$, $x = (\varphi, t)$, определяются из условий

$$(5.72) \quad g(\varphi_c) = 0, \quad t_c = -f_c^{(1)}(g_c^{(1)})^{-1} \quad (f_c \equiv f(\varphi_c)),$$

и, следовательно,

$$(5.73) \quad \Phi_c'' = \begin{pmatrix} f_c^{(2)} + t_c g_c^{(2)}, & g_c^{(1)} \\ g_c^{(1)}, & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Phi_c'')^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & (g_c^{(1)})^{-1} \\ (g_c^{(1)})^{-1}, & -(g_c^{(1)})^{-2}(f_c^{(2)} + t_c g_c^{(2)}) \end{pmatrix},$$

$$\det \Phi_c'' = -(g_c^{(1)})^2, \quad \kappa_c = 0.$$

Таким образом, при $g_c^{(1)} \neq 0$ критические точки невырождены. Будем говорить, что $J_2 \in \{J_2\}$, если выполнены условия:

1) u – гладкая функция с компонентным носителем по t и

$$u(\varphi, t) = 0, \quad t \geq t_H, \quad |\partial^\alpha u(x)| \leq a^{-\alpha} v_{|\alpha|}(x) \quad (a \leq 1),$$

$$\|v\|_Q \leq \Omega^{\theta_1}, \quad \bar{v}_Q \leq \Omega^{\theta_2}, \quad \bar{v}_Q(\varphi_c, t_c) \leq A,$$

2) функции f, g – периодические (с периодом 2π) и их производные удовлетворяют оценкам

$$|f^{(n)}(\varphi)| \leq \bar{f} \lambda_f^n, \quad n \geq 2, \quad |g^{(n)}(\varphi)| \leq \bar{g} \lambda_g^n, \quad n \geq 1,$$

$$\bar{f} + \bar{g}(t_H + 1) \leq \Omega^{\theta_3}, \quad \lambda_f \geq 1, \quad \lambda_g \geq 1,$$

3) критические точки $x_c = (\varphi_c, t_c)$ фазы Φ невырождены, т.е.

$$(5.74) \quad |g^{(1)}(\varphi_c)| \geq g_1 > 0, \quad g_1 \leq 1.$$

Таким образом, $(u, \Phi) \in \Lambda_{\overline{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, a) \quad \forall \overline{\alpha}$ и

$$\lambda = \max\{\overline{f} + t_H \overline{g}, \overline{g}\}, \quad \lambda_1 = \max\{\lambda_f, \lambda_g\}.$$

Через φ_{ex} обозначим экстремальные точки функции g ($g^{(1)}(\varphi_{ex}) = 0$), и в силу уже сделанных предположений

$$(5.75) \quad |g(\varphi_{ex})| \geq \tilde{g}.$$

ЛЕММА 5.3. Пусть $J_2 \in \{J_2\}$, $\Omega \geq 1$ и выполнены следующие условия:

$$(5.76) \quad \begin{aligned} |t_c| \geq t^0 &\equiv C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} g_1^{-2} \lambda^{3/2} \lambda_1^3, & \delta_c = \delta_0 = t^0, \\ \lambda \lambda_1^{24/11} &\leq C\Omega^{\frac{1-\varepsilon_2}{11}} g_1^{12/11}, & a \geq C\Omega^{-1/6} \lambda_1 \lambda^{5/6} g_1^{-1}, & a \geq t^0, \\ \tilde{g} &\geq C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \lambda_1^{1/2} \lambda, & \lambda \geq C\Omega^{-1+\varepsilon_3}, & \overline{g} \lambda^2 g_1^{-1} \leq C\Omega^{\theta_4}. \end{aligned}$$

Тогда для любых θ_i , $0 < \varepsilon_i \leq 1$, $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, имеет место равенство

$$(5.77) \quad J_2[u] = \sum_{x_c} (J_2)_c^Q + (J_2)_0^P + (\Delta J_2)_{QT},$$

в котором критический вклад $(J_2)_c^Q$ определен в (2.29), вклад границы

$$(5.78) \quad (J_2)_0^P = \sum_{p=0}^P \left(\frac{i}{\Omega} \right)^{p+1} \int_0^{2\pi} e^{i\Omega f} \frac{g}{(f^{(1)})^2 + g^2} A_{\Phi}^p(u) \Big|_{t=0} d\varphi, \quad P = P(\varepsilon_i, \theta_i),$$

и для остаточного члена $(\Delta J_2)_{QT}$ справедлива оценка

$$(5.79) \quad |(\Delta J_2)_{QT}| \leq C_T(\varepsilon_i \theta_i) \left[\left(\frac{\lambda^5 (\overline{\lambda}_1)^6 \lambda^6}{g_1^6 \Omega} \right)^{Q+1} \frac{A}{\Omega g_1} + \frac{1}{\Omega^T} \right] \quad (\forall Q, T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как из определения J_2 следует, что $(u, \Phi) \in \Lambda_{\overline{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, a)$, то остается вычислить величины B_c , $\tilde{\Phi}_1$ (2.3) (2.19) и проверить выполнение условий следствия 2.1. Из (2.3), (5.73) сразу следует, что можно взять $B_c = B_0 = Cg_1^2 \lambda^{-1} \lambda_1^{-2}$. Для определения $\tilde{\Phi}_1$ необходимо рассмотреть экстремальные точки $x_{ex} = (\varphi_{ex}, t_{ex})$ решения уравнения (2.20). Так как $\partial_t^2 \Phi \equiv 0$, то φ_{ex} определяется из условия $g^{(1)}(\varphi_{ex}) = 0$ и, следовательно, $G(x_{ex}) \geq (g^{(1)}(\varphi_{ex}))^2 \geq \tilde{g}^2$. Условия (2.22) достаточной малости δ_0 имеют вид $\tilde{g} \geq Cg_1^2 \lambda^{-1} \lambda_1^{-2} \delta_0$ и выполняются в силу наших условий (5.76), и, следовательно, можно взять $\tilde{\Phi}_1 = CB_0 \delta_0$. Так как $|\varphi_c - \varphi_{c'}| \geq g_1(\overline{g} \lambda^2)^{-1}$, то для числа K_M критических точек имеется оценка $K_M \leq C\Omega^{\theta_3}$. Остальные условия справедливости следствия 2.1 выполняются, и, применяя его, получим требуемый результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
- [2] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984.
- [3] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 5. С. 971–1003.
- [4] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.
- [5] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
- [6] Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981.
- [7] Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера // УМН. 1973. Т. 28. № 5. С. 17–44.
- [8] Duistermaat J. J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of Singularities // Comm. Pure and Appl. Math. 1974. V. 27. P. 207–281.
- [9] Colin de Verdier. Nombre de pointe entere dans une famille homothetique de Domaines in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Sci. Ecoll. Norm. Sup. Ser. 4 1977. V. 40. № 4. P. 559–575.
- [10] Варченко А. Н. Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 3. С. 13–38.
- [11] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической и гиперболической фазой // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 3–39.
- [12] Карпушкин В. Н. Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1984. № 10. С. 250–269.
- [13] Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962.
- [14] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ОГИЗ, 1948.
- [15] Венков А. Б. Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики // УМН. 1979. Т. 34. № 3. С. 69–135.
- [16] Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его приложения в теории чисел. М.: Мир, 1964.
- [17] Варченко А. Н. О числе целых точек в семействе гомотетических областей в $\mathbb{R}^n$ // Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 2. С. 1–6.
- [18] Pinsky M. A., Stanton N. K., Trapa P. F. Fourier Series of Radial Functions in Several Variables // J. Funct. Anal. 1993. V. 116. P. 111–132.
- [19] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. Е. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // УМН. 1976. Т. 31. № 6. С. 28–93.
- [20] Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К. Кратные ряды и интегралы Фурье // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 42. М.: ВИНТИ, 1989. С. 7–104.
- [21] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
- [22] Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
- [23] Computed Tomography. Ed. Shepp L. A. // Proc. Symp. in Appl. Math. 1983. V. 27. A.M.S.
- [24] Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.
- [25] Реконструктивная вычислительная томография // ТИИЭР. 1983. Т. 71. № 3.
- [26] Herman G. H., Natterer F. (ed.) Mathematical Aspects of Computerized Tomography // Lect. Notes in Med. Inform. V. 8. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [27] Попов Д. А. Исследование алгоритма свертки и обратной проекции // Вопросы реконструктивной томографии. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. С. 125–136.
- [28] Popov D. A. On convergence of a class of algorithms for the inversion of numerical Radon Transform // Mathematical Problems of Tomography / ed. Gelfand J. M., Gindikin S. G. Transl. Math. Monographs. V. 81, 1990. P. 7–65. A. M. S.

- [29] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. М.: Наука, 1982.
- [30] Randol B. On the Fourier Transform of the indicator function of a planar set // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 139. P. 271–278.
- [31] Randol B. On the Asymptotic behavior of the Fourier Transform of the indicator function of a convex set // Trans. A. M. S. 1969. V. 139. P. 279–285.
- [32] Икромов И. А. Об оценке преобразования Фурье индикатора невыпуклых областей // Функц. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 3. С. 16–24.
- [33] Попов Д. А. О применении гладких регуляризаторов для вычисления свертки // ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 38–42.
- [34] Попов Д. А., Сушко Д. В. О сходимости алгоритмов численного решения уравнения свертки // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 309–314.
- [35] Popov D. A., Suchko D. V. Computation of Singular Convolutions. Applied Problems of Radon Transform // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 / ed. Gindikin S.. V. 162, 1994. P. 43–127. A. M. S.
- [36] Van der Corput. Zahlentheoretische Abschätzungen // Math. Ann. 1921. V. 84. № 1. P. 33–79.
- [37] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм. М.: Наука, 1971.
- [38] Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле // ДАН СССР. 1976. Т. 227. № 6. С. 1308–1310.
- [39] Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 1. С. 61–68.
- [40] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы // Труды МИАН. Т. 151. М.: Наука, 1980.
- [41] Юринский В. В. Оценки характеристических функций некоторых вырожденных распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 18. № 1. С. 99–110.
- [42] Икромов И. А. Инвариантные оценки двумерных тригонометрических интегралов // Матем. сборник. 1989. Т. 180. № 8. С. 1017–1032.
- [43] Phong D. H., Stein E. M. Oscillatory integrals with polynomial phases // Invent. Math. 1992. V. 110. P. 39–62.
- [44] Phong D. H. Regularity of Fourier Integral Operators // Proc. Intern. Congr. Math. Zurich. 1994. V. 2. P. 862–874. Basel. 1995.
- [45] Stein E. M. Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals // N. Y. Princeton Univ. Press. 1993.
- [46] Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.
- [47] Абрамовиц М., Стиган И. М. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- [48] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматгиз, 1960.
- [49] Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.
- [50] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.