Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Новиков, Алгебраические свойства двумерных разностных операторов,
УМН, 1997, том 52, выпуск 1, 225–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:55:12

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ДВУМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. П. Новиков

Рассмотрим двумерную решетку $\mathbb{Z}^2$ с базисными векторами-периодами T_1, T_2 . Точки решетки занумерованы парами целых чисел $n = (n_1, n_2)$, $n + T_1 = (n_1 + 1, n_2)$, $n + T_2 = (n_1, n_2 + 1)$. Через T_1, T_2 мы обозначим и соответствующие операторы сдвига на функциях. В данной работе мы рассматриваем лишь операторы с вещественными коэффициентами.

Дискретизация двумерного оператора Шрёдингера в квадратной решетке, где вершина взаимодействует с четырьмя ближайшими соседями, не допускает преобразований типа Лапласа. Как указывал автор в [1, Appendix 1], следует рассматривать правильную треугольную решетку, где вершина имеет шесть ближайших соседей, так как периоды $T_1, T_2, T_1^{-1}T_2, T_1^{-1}, T_2^{-1}, T_1T_2^{-1}$ все имеют одинаковую длину. Чисто вещественный самосопряженный оператор

$$L = a_n + b_n T_1 + c_n T_2 + b_{n-T_1} T_1^{-1} + c_{n-T_2} T_2^{-1} + d_{n-T_2} T_1 T_2^{-1} + d_{n-T_1} T_2 T_1^{-1}$$

допускает факторизацию вида $L = QQ^\dagger + w_n$, где $Q = x_n + y_n T_1 + z_n T_2$, $T_j^\dagger = T_j^{-1}$, $x_n^\dagger = x_n$, $y_n^\dagger = y_n$, $z_n^\dagger = z_n$, $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$, w_n – оператор умножения на вещественную функцию.

Преобразования Лапласа. Если $L\psi = 0$, то мы полагаем $\tilde{\psi} = Q^\dagger \psi$, $\tilde{L} = Q^\dagger w_n^{-1} Q + 1$. Легко видеть, что $\tilde{L}\tilde{\psi} = 0$. Если $w_n = w = \text{const}$, то преобразование Лапласа применяется к любой собственной функции. Пусть $w = 0$, $L = QQ^\dagger$. Мы полагаем $\tilde{L} = Q^\dagger Q$, а также $\tilde{\psi} = Q^\dagger \psi$ для любой собственной функции $L\psi = \lambda\psi$.

Вообще говоря, применить второй раз преобразование Лапласа ко всему спектру нельзя, кроме особых случаев, которые мы здесь и рассмотрим.

Замечание. Всего имеется шесть преобразований Лапласа, выбирая как базисные периоды любую пару (T_1^*, T_2^*) , идущую подряд в циклической последовательности

$$\dots, T_1, T_2, T_1^{-1}T_2, T_1^{-1}, T_2^{-1}, T_1T_2^{-1}, T_1, \dots$$

(выше мы выбирали $T_1^* = T_1, T_2^* = T_2$). Группа преобразований Лапласа не изучена. Любые слова в ней могут быть использованы для определения “циклических цепочек”, квазициклических, и т. д. Возникает разностный аналог двумеризованной цепочки Тода, по аналогии с [1], [2].

Мы построим в настоящей работе своеобразные q -аналоги известного оператора Шрёдингера–Ландау в однородном магнитном поле. Это – прямое развитие идеи совместной работы с И. А. Таймановым [1, Appendix 2] где строились q -аналоги одномерного гармонического осциллятора (в работе [1] указана предыстория, а также работы других авторов для одномерного случая).

ТЕОРЕМА 1. Для операторов $Q, Q^\dagger$, где

$$Q = Q_{c,d,u,v} = 1 + cu^{n_1}v^{n_2}T_1 + d(u^2v^{-1})^{n_1}u^{n_2}T_2,$$

имеют место соотношения

$$Q_{c,d,u,v}Q_{c',d',u,v}^\dagger - 1 = q(Q_{c',d',u,v}^\dagger Q_{c',d',u,v} - 1),$$

где $q = u^{-2}$, $c = qc'$, $d = qd'$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Спектр операторов $L = QQ^\dagger$, $\tilde{L} = Q^\dagger Q$ для всех $c \neq 0$, $d \neq 0$, $u > 0$, $v > 0$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$, для всех собственных значений $\lambda < 1$ дискретен и может лежать лишь в точках $\lambda_j = 1 - u^{2j}$, где $j \geq 0$ при $u < 1$ и $j \leq 0$ при $u > 1$ (возможно, спектр не покрывает все эти точки — см. ниже).

ТЕОРЕМА 2. Уравнения $Q\psi_0 = 0$ и $Q^\dagger\psi_0 = 0$ обладают ненулевыми решениями $\psi_0 \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$ в следующих случаях:

- (1a) $u^3 > v > u > 1$; (1b) $u > \max(v, v^{-1}) > 1$, $Q\psi_0 = 0$;
 (2a) $u^{-3} > v^{-1} > u^{-1} > 1$; (2b) $u^{-1} > \max(v, v^{-1}) > 1$, $Q^\dagger\psi_0 = 0$.

Пространства решений во всех этих случаях бесконечномерны, с базисами $\psi_0^{(k)} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^2)$:

- (1a) $\psi_0^{(k)} = c^{-n_1}d^{k-n_2}(-\sqrt{u})^{n_1+n_2-k}t^{-kn_1}\chi_{k-n_2}(t)e^{-Q_2(n)}$;
 (1b) $\psi_0^{(k)} = c^{k-n_1}d^{-n_2}(-\sqrt{u})^{n_1+n_2-k}t^{kn_2}\chi_{k-n_1}(t^{-1})e^{-Q_2(n)}$;
 (2a) $\psi_0^{(k)} = c^{n_1}d^{n_2-k}(-\sqrt{u})^{k-n_1-n_2}t^{kn_1}\chi_{n_2-k}(t)e^{-Q_2(n)}$;
 (2b) $\psi_0^{(k)} = c^{n_1-k}d^{n_2}(-\sqrt{u})^{k-n_1-n_2}t^{-kn_2}\chi_{n_1-k}(t^{-1})e^{-Q_2(n)}$;

здесь $k \in \mathbb{Z}$, $t = v^2u^{-2}$, $Q_2(n) = \alpha n_1^2 + 2\beta n_1n_2 + \alpha n_2^2$, функция $\chi_m(t)$ имеет вид:

$$\chi_0(t) = 1, \quad \chi_m(t) = 0, \quad m < 0, \quad \chi_m(t) = \prod_{j=1}^m (1 - t^j), \quad m > 0.$$

Параметры α, β таковы:

- (1a) $u = e^{2\alpha}$, $u^2v^{-1} = e^{2\beta}$; (1b) $u = e^{2\alpha}$, $v = e^{2\beta}$, $|\beta| < \alpha$;
 (2a) $u = e^{-2\alpha}$, $u^2v^{-1} = e^{-2\beta}$; (2b) $u = e^{-2\alpha}$, $v = e^{-2\beta}$, $|\beta| < \alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти базисы не ортонормированны, их полнота не доказана. Другие случаи труднее, и пока не исследованы.

СЛЕДСТВИЕ 2. В случаях (1a) и (1b) спектр операторов $Q^\dagger Q$ занимает все точки $\lambda_j = 1 - u^{-2j}$, $j \geq 0$. Спектр операторов $QQ^\dagger$ занимает все точки, кроме одной: $\lambda_j = 1 - u^{2j}$, $j \geq 1$. В случаях (2a) и (2b), напротив, спектр операторов $QQ^\dagger$ занимает все точки $\lambda_j = 1 - u^{2j}$, $j \geq 0$, а спектр операторов $Q^\dagger Q$ пропускает нуль: $\lambda_j = 1 - u^{2j}$, $j \geq 1$.

Соответствующие собственные функции получаются из $\psi_0^{(k)}$ применением итерации операторов $Q^\dagger$ для случая (1) и итерации операторов Q в случае (2), с соответствующими параметрами s_j, d_j .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Novikov S. P., Veselov A. P. // Amer. Math. Soc. Transl. 1997 (to appear). [2] Веселов А. П., Новиков С. П. // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 171–172.