Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Джумадильдаев, Ш. Ш. Ибраев, Определяющие соотношения нильпотентных подалгебр модулярных классических алгебр Ли, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 233–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm81>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:45:46

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДАЛГЕБР МОДУЛЯРНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

А. С. Джумадильдаев, Ш. Ш. Ибраев

Пусть $\mathbf{a} = (a_{i,j})$ – матрица Картана ранга n , $\Gamma(\mathbf{a})$, $\mathfrak{g}(\mathbf{a})$ – соответствующие система корней и алгебра Ли $([1], [2])$, k – основное поле характеристики $p \geq 0$. Базис в $\mathfrak{g}(\mathbf{a})$ ($k = \mathbb{C}$) можно подобрать так, что структурные константы будут целыми. Простая алгебра Ли $\mathfrak{g}(\mathbf{a})$ порождается $3n$ образующими и соотношениями Серра. Нас интересуют нильпотентная подалгебра, порожденная элементами положительными корней. В случае характеристики нуль эта подалгебра порождается соотношениями вида $\text{ad } e_i^{1-a_{j,i}} e_j = 0$. Поскольку структурные константы целые, мы можем рассматривать ее и над полями характеристики $p > 0$. Обозначим полученную алгебру через $\mathfrak{n}^+(\mathbf{a})$. Итак, размерность $\mathfrak{n}^+(\mathbf{a})$ совпадает с количеством положительных корней $\Gamma^+(\mathbf{a})$.

Простые алгебры Ли $\mathfrak{g}(\mathbf{a})$ при редукции по модулю $p > 0$ могут перестать быть простыми. Например, алгебры Ли типов B_n, C_n, D_n, F_4, E_7 , – непростые при $p = 2$. Алгебры Ли D_{2k+1} и E_7 ($p = 2$), E_6 , ($p = 3$), содержат одномерные центры, D_{2k} имеет двумерный центр A_{n-1} имеет одномерный центр, факторалгебры по которым простые. При $p = 3, 2$ алгебра Ли G_2 имеет идеал и факторалгебру изоморфную A_2 и A_3 . А также C_n содержит идеал D_n , B_n – идеал, факторалгебра по которому есть D_n , и F_4 содержит идеал D_4 . С учетом перекрестных изоморфизмов и факторизации под простыми алгебрами Ли классических типов над полем k характеристики $p > 0$, будем понимать простые алгебры следующих типов: $A_n(n > 1)$, $B_n(n > 1, p > 2)$, $C_n(n > 2, p > 2)$, $D_n(n > 3)$, $G_2(p > 3)$, $F_4(p > 2)$, E_6, E_7, E_8 . Внизу используется запись $[x, y, z, t, \dots]$ вместо $[\dots [[x, y], z], t] \dots]$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{n}^+$ – нильпотентная подалгебра простой классической алгебры Ли, $p > 0$. Если $p > 3$, то $\mathfrak{n}^+$, как и в случае характеристики 0, порождается соотношениями Серра $\text{ad } e_i^{1-a_{j,i}} e_j = 0$. При $p = 2, 3$ определяющие соотношения алгебры Ли $\mathfrak{n}^+$ состоят из соотношений Серра и из дополнительных соотношений (список см. ниже).

Список дополнительных соотношений.

$\mathfrak{g}(\mathbf{a})$	p	дополнительные соотношения и их	количество
$A_n, n > 2$	2	$[e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, e_i], i = 2, \dots, n-1$	$n-2$
$B_n, n > 2$	3	$[e_{n-2}, e_{n-1}, e_n, e_n, e_{n-1}, e_n]$	1
$C_n, n > 2$	3	$[e_{n-2}, e_{n-1}, e_n, e_{n-1}, e_{n-1}]$	1
$D_n, n > 3$	2	$[e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, e_i], i = 2, \dots, n-2$	$2n-2$
		$[e_{n-3}, e_{n-2}, e_n, e_{n-2}]$	
		$[e_{n-2}, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}]$	
		$[e_{n-3}, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_n]$	
		$[e_{n-3}, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_{n-1}]$	
		$[e_i, e_{i+1}, \dots, e_n, e_{n-3}, e_{n-2}, \dots, e_i], i = 1, \dots, n-3$	
F_4	3	$[e_3, e_4, e_2, e_3, e_3]$	5
		$[e_2, e_3, e_3, e_1, e_2, e_3]$	
		$[e_3, e_4, e_2, e_3, e_1, e_2, e_3, e_3]$	
		$[e_3, e_4, e_2, e_3, e_4, e_1, e_2, e_3, e_4]$	
		$[e_3, e_4, e_2, e_3, e_4, e_1, e_2, e_3, e_3, e_2, e_3]$	

E_n	2	$[e_1, e_3, e_4, e_3]$	$2(n-1)$
$n = 6, 7, 8$		$[e_2, e_4, e_3, e_4]$	
		$[e_2, e_4, e_5, e_4]$	
		$[e_3, e_4, e_5, e_4]$	
		$[e_4, e_5, e_6, e_5]$	
		$\delta(n=7)[e_5, e_6, e_7, e_6]$	
		$\delta(n=8)[e_6, e_7, e_8, e_7]$	
		$[e_2, e_4, e_3, e_5, e_4, e_2]$	
		$[e_2, e_4, e_3, e_5, e_4, e_3]$	
		$[e_2, e_4, e_3, e_5, e_4, e_5]$	
		$[e_1, e_3, e_4, e_2, e_5, e_4, e_3, e_1]$	
		$[e_2, e_4, e_3, e_5, e_4, e_6, e_5, e_6]$	
		$\delta(n=7)[e_2, e_4, e_3, e_5, e_4, e_6, e_5, e_7, e_6, e_7]$	
		$\delta(n=8)[e_2, e_4, e_3, e_5, e_4, e_6, e_5, e_7, e_6, e_8, e_7, e_8]$	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Seligman G. B. Modular Lie Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1967. [2] Серр Ж. П. Группы Ли и алгебры Ли. М.: Мир, 1969.

Институт математики Академии наук Республики Казахстан

Принято редколлегией
19.08.1998