Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, Полином Александера многих переменных выражается через инварианты Васильева, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 1, 227–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 03:34:26

ПОЛИНОМ АЛЕКСАНДЕРА МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ВЫРАЖАЕТСЯ ЧЕРЕЗ ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА

И. А. Дынников

Придуманное Васильевым [1] определение инварианта конечного порядка для зацеплений привело к построению красивой теории, содержащей в себе почти все известные полиномиальные инварианты. Бар-Натан, Бирман и Лин [2], [3] доказали, что из равенства всех инвариантов Васильева у двух зацеплений следует, что у них также равны полиномы HOMFLY и Кауффмана, и, как частные случаи HOMFLY, полиномы Джонса, Конвея и полином Александера от одной переменной. Полином Александера от многих переменных (описание которого с помощью локальных соотношений, данное в [4], существенно сложнее) выпал из этого списка. В настоящей заметке выполняется этот пробел.

Полином Александера от многих переменных определяется для *упорядоченных* ориентированных зацеплений [5]. Каждой компоненте соответствует своя переменная. Для упорядоченных зацеплений определение инварианта конечного порядка не требует модификации.

В стандартном определении полинома Александера имеется неоднозначность в выборе знака и умножении на мономы вида t_i^p . Это связано с тем, что полином Александера является инвариантом типа кручения (см. [6]), и создает трудности в изучении его взаимоотношений с инвариантами конечного порядка. Мы дадим ниже определение *нормированного* полинома Александера многих переменных, который однозначно определяется по диаграмме, и докажем, что все его коэффициенты после некоторой замены переменных являются инвариантами Васильева. Мы сразу будем давать определение для зацеплений в $\mathbb{R}^3$, которым разрешено иметь конечное число точек самопересечения. Рассматриваются зацепления с числом компонент ≥ 2 .

Определение нормированного полинома Александера мы начнем с простого алгебраического утверждения. Введем предварительно следующее обозначение. Для матрицы $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ обозначим через $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ матрицу, ij -й элемент которой равен $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ji}(A)$, где $\Delta_{ji}(A)$ – минор, дополнительный к a_{ji} .

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{K}$ – коммутативное кольцо с однозначным разложением на множители, A – матрица $n \times n$ с элементами из $\mathcal{K}$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ и $g = (g_1, \dots, g_n)$ – две строки взаимнопростых элементов кольца $\mathcal{K}$. Тогда если $rA = 0$, $Ag^T = 0$, то существует, и притом единственный, элемент $\lambda = \lambda(A, r, g) \in \mathcal{K}$ такой, что $\tilde{A} = g^T \lambda r$, т. е. $\tilde{a}_{ij} = \lambda g_i r_j$.

В нашем случае кольцом $\mathcal{K}$ будет кольцо $\mathbb{Z}[t_1^{1/2}, t_1^{-1/2}, \dots, t_k^{1/2}, t_k^{-1/2}]$ лорановских полиномов с целыми коэффициентами от k переменных $t_i^{1/2}$, $i = 1, \dots, k$.

Пусть D – диаграмма упорядоченного зацепления L из $k \geq 2$ компонент, имеющего, возможно, простые точки самопересечения. Пусть $\gamma_i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – кривая, представляющая i -ю компоненту зацепления L на диаграмме D . Обозначим через c_i степень отображения Гаусса $S^1 \rightarrow S^1$, заданного формулой $s \mapsto \dot{\gamma}_i(s)/|\dot{\gamma}_i(s)|$. Для нормировки полинома Александера нам понадобится следующий множитель: $\alpha = \prod_{i=1}^k t_i^{c_i/2}$.

Для точки $x \in \mathbb{R}^2$, не лежащей на проекции i -й компоненты, обозначим через $d_i(x)$ степень отображения $S^1 \rightarrow S^1$, определенного по формуле $s \mapsto (\gamma_i(s) - x)/|\gamma_i(s) - x|$. Для точки $x \notin D$ положим $w(x) = \prod_{i=1}^k t_i^{d_i(x)}$.

Разобьем кривые, составляющие диаграмму D , на конечное число *дуг*, так чтобы никакая дуга не содержала внутри себя точки пересечения диаграммы, а начало и конец каждой дуги были различными. Пусть число дуг равно n . Занумеруем их произвольным образом. Для i -й дуги мы обозначаем номер компоненты, частью которой она является, через (i) . Положим $g_i = t_{(i)} - 1$. Элементы матрицы Александера (нормированной) и строки r определяются согласно правилам, указанным ниже.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

В таблицах первый столбец указывает номера строк, а первая строка – номера столбцов матрицы Александера, в которые следует записывать прочие элементы таблицы. Все оставшиеся элементы матрицы полагаются равными нулю. Знак “?” обозначает произвольный из трех возможных типов пересечения.

Нетрудно проверить, что полученные таким образом матрица A и строки r, g удовлетворяют условию леммы. Определим нормированный полином Александера по формуле $\Delta_L = \alpha \lambda(A, r, g) \in \mathcal{K}$. Классический полиномом Александера есть Δ_L с точностью до умножения на обратимый элемент кольца $\mathcal{K}$. Следующее утверждение можно получить простым вычислением с нормированной матрицей Александера.

ТЕОРЕМА 1. 1) Данное выше определение полинома Δ_L корректно, т.е. не зависит от выбора диаграммы, изображающей зацепление L , произвола в разбиении этой диаграммы на дуги и их нумерации.

2) Нормированный полином Александера удовлетворяет локальному соотношению Васильева:

$$\Delta \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - \Delta \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array} \right) = \Delta \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right).$$

Сделаем теперь в полиноме Александера замену переменных: $t_i = e^{x_i}$. Получим ряд $\hat{\Delta}_L \in \mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_k]]$.

ТЕОРЕМА 2. Если зацепление L имеет m точек самопересечения, то ряд $\hat{\Delta}_L$ не содержит ненулевых членов степени $< m - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспомним определение полинома Александера. Если $r_i \neq 0$, то $\Delta_L = \alpha (-1)^{i+j} \frac{\Delta_{ij}(A)}{r_i g_j}$. Каждому самопересечению зацепления L соответствует пара строк в матрице Александера, совпадающих в нулевом члене после указанной замены переменных. Отсюда миноры $\Delta_{ij}(A)$, выраженные через переменные x_i , имеют порядок $O(|x|^m)$. Элементы α и r_i кольца $\mathcal{K}$, а значит, и их образы в $\mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_k]]$, обратимы. Элемент g_i имеет вид $g_i = t_i - 1 = x_i + \dots$.

Таким образом, коэффициенты ряда $\hat{\Delta}_L$ при членах степени m являются инвариантами Васильева порядка $\leq m + 1$. Отметим, что аналогичная конструкция для полиномов HOMFLY и Кауффмана дает инвариант порядка m .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vassiliev V. A. Cohomology of knot spaces // Theory of singularities and its Applications / ed. V.I. Arnold. Providence: Amer. Math. Soc., 1990. [2] Bar-Natan D. // Topology. 1995. V. 34. № 2. P. 423–472. [3] Birman J. S., Lin X-S. Knot polynomials and Vassiliev's invariants // Preprint: Colombia Univ., 1991. [4] Murakami J. // Pacific J. Math. 1993. V. 157. № 1. P. 109–135. [5] Torres G. // Ann. of Math. 1953. V. 57. № 1. P. 57–89. [6] Тураев В. Г. // УМН. 1986. Т. 41. № 1. С. 97–147.