Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Олейник, Г. Каллианпур, О задачах со свободной границей, возникающих в теории вероятностей (теоремы существования), *УМН*, 1997, том 52, выпуск 1, 229–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:29:59

О ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ)

Г. КАЛЛИАНПУР, О. А. ОЛЕЙНИК

В [1] рассмотрены задачи со свободной границей, возникающие при изучении вопроса об оптимальной остановке марковского процесса, и доказаны теоремы единственности решений таких задач. Здесь мы докажем соответствующие теоремы существования решения. При этом мы используем методы, близкие к предложенным в [2], [3].

Рассматриваемая здесь задача со свободной границей сформулирована в [1], и там же указано интегральное тождество, определяющее слабое решение задачи.

Заметим, что задача со свободной границей (1)–(4) из [1] может иметь бесконечное число решений, если мы расширим указанные там классы единственности. Приведем пример. Пусть

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } Q = \{t, x : 0 < t < \infty, 0 < x < 1\},$$

$$(2) \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=x^*} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x^*-0} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x^*+0} = 0.$$

Здесь свободной границей является прямая $x = x^*$, $\lambda(t, x) \equiv 0$.

Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ – последовательность собственных значений задачи

$$\frac{d^2 v_j}{dx^2} + \Lambda_j v_j = 0, \quad v_j(0) = 0, \quad v_j(1) = 0,$$

$v_j(x)$ – соответствующие собственные функции. При $j > 1$ существует x_j такое, что $0 < x_j < 1$ и $v_j(x_j) = 0$. Очевидно, что функция $u_j(t, x) = \exp\{\Lambda_j t\} v_j(x)$, $j = 2, 3, \dots$, является решением задачи (1), (2) с $x^* = x_j$ и $u_j(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, если $x \neq x'$ и $v_j(x') = 0$, так как $\Lambda_j > 0$ при всех j .

Имеет место следующая теорема существования слабого решения задачи (1)–(4), определенной в [1]. Мы пользуемся обозначениями работы [1].

ТЕОРЕМА. 1) Пусть $k(t, x, u)c(t, x, u) \leq \gamma_0 = \text{const} < 0$ при $t > T$. Тогда существует ограниченное в Q слабое решение задачи (1)–(4) из [1]. Если $f(t, x, u) \equiv 0$ при $t > T$, T – некоторая постоянная, и $|u_1(t)| + |u_2(t)| \leq C_1 e^{-\alpha_1 t}$ при $t > T$, $C_1, \alpha_1 = \text{const} > 0$, то существует слабое решение $u(t, x)$ задачи (1)–(4) из [1], удовлетворяющее условию

$$|u(t, x)| \leq C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad C_2, \alpha_2 = \text{const} > 0.$$

2) Пусть $k(t, x, u)c(t, x, u) \leq \gamma_1$, $\gamma_1 = \text{const} > 0$. Тогда существует слабое решение задачи (1)–(4) из [1] такое, что

$$|u(t, x)| \leq C_3 e^{\alpha_3 t}, \quad C_3, \alpha_3 = \text{const} > 0,$$

где α_3 зависит от γ_1 , если $|u_1(t)| + |u_2(t)| \leq C_4 e^{-\alpha_4 t}$ и $\alpha_4 > 0$ – достаточно большая постоянная, $f(t, x, u) \equiv 0$ при $t > T$.

3) Если $k(t, x, u)c(t, x, u) \leq 0$ и $|k(t, x, u)b(t, x, u)| \leq \beta$, где β – достаточно малая постоянная, то существует слабое решение задачи (1)–(4) из [1], удовлетворяющее условию

$$|u(t, x, u)| \leq C_5 e^{-\alpha_5 t}, \quad C_5, \alpha_5 = \text{const} > 0,$$

при $|u_1(t)| + |u_2(t)| + |f(t, x, u)| \leq C_6 e^{-\alpha_6 t}$, $C_6, \alpha_6 = \text{const} > 0$, и α_6 – достаточно большая постоянная. Если $k(t, x, u)c(t, x, u) \leq 0$ в Q и $f(t, x, u) \equiv 0$ при $t > T$, то существует ограниченное в Q слабое решение задачи (1)–(4) из [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Каллианпур Г., Олейник О. А. // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 205–206. [2] Олейник О. А. // ДАН СССР. 1960. Т. 135. № 5. С. 1054–1058. [3] Oleinik O. A. On Stefan-type free boundary problems for parabolic equations // In Seminari 1962–1963 di analisi, algebra, geometria e topologia 1. Roma, 1965. P. 388–403.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
23.10.1996