Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. П. Кузьмина, О решении уравнения Ван-дер-Поля, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 1, 231–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:03:41

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Р. П. КУЗЬМИНА

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$(1) \quad \ddot{z} = -z + \varepsilon(1 - z^2)\dot{z}$$

с заданными начальными значениями z и $\dot{z}$. Здесь точка означает дифференцирование по независимой переменной τ . На интервале времени τ порядка ε^{-1} задача Коши для уравнения (1) является сингулярно возмущенной и метод Пуанкаре к ней не применим. Переходом к переменным

$$(2) \quad a = \sqrt{z^2 + (\dot{z})^2}, \quad \alpha = \arg(z + i\dot{z})$$

уравнение (1) приводится к стандартной для применения метода осреднения форме [1]. Рассмотрим другой подход к решению задачи (1), а именно: приведем (1) к почти регулярной задаче Коши [2]

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = F(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon)), \quad x|_{t=0} = 0,$$

где f — гладкая и ограниченная функция при малых значениях $\varepsilon > 0$, $F(x, t, \varepsilon, f)$ — гладкая функция при малых значениях $\varepsilon \geq 0$. Для этого введем новые переменные

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= a - v - \varepsilon g_1, & x_2 &= \alpha - \varphi - \varepsilon g_2, & \tau &= t/\varepsilon, \\ g_1 &= \frac{a}{4} \sin 2\alpha - \frac{a^3}{32} \sin 4\alpha + C_1, & g_2 &= \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{a^2}{4} \cos^4 \alpha + C_2, \\ v &= 2[1 + C_0 \exp(-t)]^{-1/2}, & \varphi &= -t/\varepsilon + \alpha_0, & C_0 &= 4a_0^{-2} - 1, \\ C_1 &= -\frac{a_0}{4} \sin 2\alpha_0 + \frac{a_0^3}{32} \sin 4\alpha_0, & C_2 &= -\frac{1}{2} \cos^2 \alpha_0 + \frac{a_0^2}{4} \cos^4 \alpha_0. \end{aligned}$$

Здесь a_0, α_0 — начальные значения переменных (2). Задача Коши для x_1, x_2 имеет вид

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{v}{2} \left(1 - \frac{v^2}{4}\right) + \varepsilon h_1, & \frac{dx_2}{dt} &= \varepsilon h_2, \\ x_1|_{t=0} &= x_2|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_1 &= -a \sin \alpha \cos \alpha (1 - a^2 \cos^2 \alpha) \left[\frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{a^2}{8} (2 - \cos^2 \alpha - 2 \cos^4 \alpha) \right], \\ h_2 &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (1 - a^2 \cos^2 \alpha) \left(1 - \frac{a^2}{2} \cos^2 \alpha \right). \end{aligned}$$

Зависимость a, α от x_1, x_2, t, ε определяется формулами (4). Из них следует система уравнений

$$(6) \quad \begin{aligned} x_1 &= a - v - \varepsilon g_1, & \cos \varphi &= \cos \alpha \cos(x_2 + \varepsilon g_2) + \sin \alpha \sin(x_2 + \varepsilon g_2), \\ \sin \varphi &= -\cos \alpha \sin(x_2 + \varepsilon g_2) + \sin \alpha \cos(x_2 + \varepsilon g_2). \end{aligned}$$

Исследуя (5), (6), нетрудно получить:

1) (5) — почти регулярная задача Коши (3) со значениями $x = (x_1, x_2), f = (\cos \varphi, \sin \varphi)$,

$$U(t, s) = \begin{pmatrix} q(t, s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q(t, s) = \exp(-t + s) \left[\frac{1 + C_0 \exp(-s)}{1 + C_0 \exp(-t)} \right]^{3/2},$$

- ($U(t, s)$ – матрица Коши уравнений в вариациях, см. [2]),
 2) решение задачи (5) можно построить в виде ряда

$$(7) \quad x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(t, \varepsilon) \varepsilon^k,$$

где $y^{(k)}(t, \mu)$ – коэффициенты разложения в ряд решения регулярно возмущенной задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t, \varepsilon, f(t, \mu)), \quad y|_{t=0} = 0;$$

$$y(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(t, \mu) \varepsilon^k,$$

- 3) для задачи (5) справедливы теоремы 1, 3, 5, 7, 9 из [2]. Из этих теорем следует, что для любых значений $T > 0$, β , $0 \leq \beta < 1/2$, $n \geq 0$ найдутся $\varepsilon_* > 0$, C_* , $C_*^0 \geq 0$, не зависящие от t, ε и такие, что при $0 \leq t \leq T\varepsilon^{-\beta}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$:

1) решение задачи (5) существует, единственно, удовлетворяет неравенству $\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{n+1} t(C_*^0 t^{2n} + C_*)$, где $X_n(t, \varepsilon)$ – частичная сумма ряда (7),

2) ряд (7) сходится равномерно к решению задачи (5).

К задаче Коши для остаточного члена $u = x - X_1(t, \varepsilon)$ был применен алгоритм доказательства теоремы 2.1 в работе [3]. Оценка остаточного члена u и интервала существования решения задачи (5) при этом улучшилась. Кроме того, в $X_1(t, \varepsilon)$ были выделены члены порядка $O(\varepsilon)$: $X_1 = \bar{X}_1 + \Delta X_1$, $\|\Delta X_1\| \leq C\varepsilon^2$ при $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Наконец, полученные результаты были пересчитаны для исходной переменной.

РЕЗУЛЬТАТЫ. *Найдутся такие значения $T > 0$, $\varepsilon_* > 0$ и постоянные K , что при $0 \leq \tau \leq T\varepsilon^{-2}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ решение задачи Коши для уравнения (1) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам*

$$|z - \bar{a} \cos \bar{\alpha}| \leq \varepsilon^2 (K\varepsilon^2 \tau^2 + K), \quad |a - \bar{a}| \leq \varepsilon^2 (K\varepsilon \tau + K), \quad |\alpha - \bar{\alpha}| \leq \varepsilon^2 (K\varepsilon^2 \tau^2 + K),$$

$$\bar{a} = v + \varepsilon C_3 v(4 - v^2) + \frac{\varepsilon v}{4} \sin 2\varphi \left(1 - \frac{v^2}{4} \cos 2\varphi\right),$$

$$\bar{\alpha} = \varphi + \frac{\varepsilon t}{16} + \varepsilon \left[\frac{\ln v}{8} - \frac{5v^2}{64} + \frac{\cos^2 \varphi}{2} \left(1 - \frac{v^2}{2} \cos^2 \varphi\right) + C_4 \right],$$

$$v = 2[1 + C_0 \exp(-\varepsilon \tau)]^{-1/2}, \quad \varphi = -\tau + \alpha_0,$$

$$C_3 = -\frac{\sin 2\alpha_0}{4(4 - a_0^2)} \left(1 - \frac{a_0^2}{4} \cos 2\alpha_0\right),$$

$$C_4 = -\frac{\ln a_0}{8} + \frac{5a_0^2}{64} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{2} \left(1 - \frac{a_0^2}{2} \cos^2 \alpha_0\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно доказать существование периодического решения уравнения (1) и получить соответствующие асимптотические формулы, используя гладкость решения и исследуя функции $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гребеников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. [2] Кузьмина Р. П. // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 161–162. [3] Кузьмина Р. П. Метод малого параметра в регулярно возмущенной задаче Коши. М.: Изд-во МГУ, 1991.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
25.12.1996