Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Е. Павлюкевич, К расчету вероятностных характеристик некоторых оптимальных моментов остановки, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 1, 233–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 03:39:53

К РАСЧЕТУ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ОСТАНОВКИ

И. Е. ПАВЛЮКЕВИЧ

В работе [1] М. Жанблан-Пике и А. Н. Ширяев рассмотрели, следуя [2], модель эволюции капитала фирмы $X = (X_t)_{t \geq 0}$, предполагая, что

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t - dZ_t,$$

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс, коэффициенты $\mu > 0$, $\sigma > 0$. Неотрицательный неубывающий неупреждающий процесс $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ характеризует стратегию выплаты фирмой дивидендов.

Предполагается, что начальный капитал $X_0 = x \geq 0$, в момент первого обращения в нуль процесса X происходит разорение, и $dX_t = dZ_t = 0$ для $t \geq \tau$, где τ — момент разорения, $\tau = \inf\{t : X_t = 0\}$.

В [1] были найдены оптимальные дивидендные процессы $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$, т.е. те, которые доставляют суп функции эффективности функционирования фирмы (см. [2])

$$V(x) = \sup E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} dZ_t = \sup E_x \left[Z_0 + \int_{(0, \infty)} e^{-\lambda t} dZ_t \right], \quad \lambda > 0,$$

в трех случаях **A**, **B**, **C** (см. далее формулировку теоремы). Следуя общей идеологии [1], в настоящей работе вычислены математические ожидания момента τ разорения фирмы в каждом из этих трех случаев.

ТЕОРЕМА. Обозначим $\theta = 2\mu/\sigma^2$.

A. Пусть процесс $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ таков, что $dZ_t = u(X_t) dt$, $Z_0 = Z_0(x)$, где $u = u(x)$, $Z_0 = Z_0(x)$ — произвольные измеримые функции, причем $0 \leq u(x) \leq K < \infty$, $0 \leq Z_0(x) \leq x$. Тогда

- 1) если $K \leq K_*$, то при наличии начального капитала $X_0 = x$ дивиденды выплачиваются сразу (см. [1]) и, следовательно, $m_A(x) = 0$ для всех $x \geq 0$;
- 2) если $K > K_*$, то

$$m_A(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\mu} + \frac{1}{\theta\mu} e^{\theta\tilde{x}} - \frac{1}{\theta\mu} e^{\theta(\tilde{x}-x)}, & x \leq \tilde{x}, \\ -\frac{\tilde{x}}{\mu} + \frac{1}{\theta\mu} e^{\theta\tilde{x}} - \frac{1}{\theta\mu}, & x > \tilde{x}. \end{cases}$$

Здесь K_* — корень уравнения $\lambda/K_* = |\rho(K_*)|$, $\tilde{x} = \tilde{x}(K_*)$ — корень уравнения $\text{th}(\Delta\tilde{x}) = (2(\lambda + K\rho)\Delta)/(\mu(\lambda + K\rho) + 2\lambda\rho)$, $\rho = \rho(K) = (K - \mu)/2 - \sqrt{(K - \mu)^2/4 + \lambda}$, $\Delta = \sqrt{\mu^2/4 + \lambda}$.

B. Пусть процесс $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ принадлежит классу процессов вида

$$Z_t = \sum_{i \geq 0} e^{-\lambda T_i} \zeta_i I(T_i \leq t),$$

где $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ — моменты выплаты дивидендов, а $\zeta_0, \zeta_1, \dots$ — неотрицательные величины выплачиваемых дивидендов. При этом предполагается, что за каждую выплату дивидендов взимается плата $\gamma > 0$. Тогда

$$m_B(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{e^{-\theta\tilde{a}} - e^{-\theta\tilde{b}}} (1 - e^{-\theta x}), & x \leq \tilde{b}, \\ -\frac{\tilde{a}}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{e^{-\theta\tilde{a}} - e^{-\theta\tilde{b}}} (1 - e^{-\theta\tilde{b}}), & x > \tilde{b}. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – величины, определяющиеся из системы (3.14) в [1].

С. Пусть $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ – произвольный неотрицательный неубывающий непреждающий процесс, непрерывный справа при $t > 0$. Тогда

$$m_{\mathbf{C}}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\mu} + \frac{1}{\theta\mu}e^{\theta\bar{x}} - \frac{1}{\theta\mu}e^{\theta(\bar{x}-x)}, & x \leq \bar{x}, \\ -\frac{\bar{x}}{\mu} + \frac{1}{\theta\mu}e^{\theta\bar{x}} - \frac{1}{\theta\mu}, & x > \bar{x}. \end{cases}$$

Здесь $\bar{x}$ – корень уравнения $\text{th}(\Delta\bar{x}) = \mu\Delta/(2\Delta^2 - \lambda)$.

Функции $m_{\mathbf{A}}$, $m_{\mathbf{B}}$, $m_{\mathbf{C}}$ были найдены как решения следующих краевых задач. Пусть $\mathcal{L} = \mu \frac{d}{dx} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{dx^2}$, тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}) \quad & \begin{cases} \mathcal{L}m_{\mathbf{A}}(x) = -1, & x \in (0, \tilde{x}), \\ m_{\mathbf{A}}(0) = 0, \\ (\mu - K)m'_{\mathbf{A}}(\tilde{x}) + \frac{\sigma^2}{2}m''_{\mathbf{A}}(\tilde{x}) = -1, \end{cases} \\ (\mathbf{B}) \quad & \begin{cases} \mathcal{L}m_{\mathbf{B}}(x) = -1, & x \in (0, \tilde{b}), \\ m_{\mathbf{B}}(0) = 0, \\ m_{\mathbf{B}}(\tilde{b}-) = m_{\mathbf{B}}(\tilde{a}), \end{cases} & (\mathbf{C}) \quad \begin{cases} \mathcal{L}m_{\mathbf{C}}(x) = -1, & x \in (0, \bar{x}), \\ m_{\mathbf{C}}(0) = 0, \\ m'_{\mathbf{C}}(\bar{x}) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Краевая задача (C) может быть получена из задач (A) и (B), соответственно, предельным переходом при $K \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 0$. При этом $\tilde{x} = \tilde{x}(K) \rightarrow \bar{x}$, $\tilde{a}, \tilde{b} \rightarrow \bar{x}$ и $m_{\mathbf{A}}, m_{\mathbf{B}} \rightarrow m_{\mathbf{C}}$. Остается лишь добавить, что во всех случаях математическое ожидание времени разорения фирмы конечно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Жанблан-Пике М., Ширяев А. Н. // УМН. 1995. Т. 50. № 2. С. 25–46. [2] Radner R., Shepp L. Risk vs. Profit-Potential; A Model for Corporate Strategy // Preprint.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
02.12.1996