Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на кубические поверхности, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 1, 235–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:56:07

**БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ
ТРЕХМЕРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ,
РАССЛОЕННЫХ НА КУБИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ**

А. В. Пухликов

1. В настоящей работе дан набросок доказательства (уточненной) гипотезы В. А. Исковских об алгебраических многообразиях с пучком кубических поверхностей [1], являющейся точным аналогом известной теоремы В. Г. Саркисова о расслоениях на коники. В. А. Исковских предположил, что она может быть доказана методом максимальных особенностей [2] и сделал первые шаги в ее доказательстве. Однако дальше продвинуться не удалось в силу недостатков техники. Они были преодолены в работе [3] для пучков поверхностей Дель Пеццо степени 1 и 2. Данная работа является ее непосредственным продолжением.

2. Пусть V — гладкое трехмерное комплексное проективное многообразие, обладающее морфизмом $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, каждый слой которого — неприводимая приведенная кубическая поверхность, а общий слой F_η — гладкая кубическая поверхность над незамкнутым полем $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ с группой Пикара $\text{Pic } F_\eta = \mathbb{Z}K_{F_\eta}$. В частности, $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \mathbb{Z}F$, где F — слой морфизма π . Предположим, что многообразие V удовлетворяет следующему требованию [3]: класс 1-циклов $MK_V^2 - f$, где f — класс прямой в слое, не является эффективным ни для какого $M \in \mathbb{Z}$, а также следующему условию общности положения: (*) если слой $F_t = \pi^{-1}(t)$ над точкой $t \in \mathbb{P}^1$ — особая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, то он имеет единственную невырожденную особую точку $q \in F_t$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. *Любое бирациональное отображение*

$$\chi: V \dashrightarrow V',$$

где V' — неособое в коразмерности 1 трехмерное проективное многообразие, расслоенное морфизмом $\pi': V' \rightarrow \mathbb{P}^1$ на поверхности отрицательной кодифференциальной размерности, является послойным, т.е. $\pi' \circ \chi = \alpha \circ \pi$ для некоторого изоморфизма базы $\alpha: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Следствия. (i) V обладает единственным пучком рациональных поверхностей. В частности, V не рационально и не имеет структуры расслоения на коники.

(ii) Факторгруппа группы $\text{Bir } V$ бирациональных автоморфизмов многообразия V по нормальной подгруппе бирациональных автоморфизмов, сохраняющих слой π , изоморфной группе $\text{Bir } F_\eta$ бирациональных автоморфизмов общего слоя, конечна, в общем случае тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Относительно обильный пучок $\mathcal{O}_V(-K_V)$ порождается на каждом слое своими сечениями и определяет двойное вложение $V \hookrightarrow X$, где $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \mathcal{O}(a_3)$ — локально свободный пучок ранга 4 на $\mathbb{P}^1$, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$, совпадающий с точностью до подкручивания на обратимый пучок с $\pi^* \mathcal{O}_V(-K_V)$. Проекцию X на $\mathbb{P}^1$ снова обозначаем символом π . Пусть G — класс слоя морфизма $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, тогда $\text{Pic } X = \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}G$, где L — класс тавтологического пучка $\mathcal{O}_{X/\mathbb{P}^1}(1)$, т.е. $\pi^* \mathcal{O}_X(L) = \mathcal{E}$. Предположим, что $V \sim 3L + mG$ как дивизор на X . Легко проверить, что (основное) условие теоремы выполнено при $5m + 3(a_1 + a_2 + a_3) \geq 12$. В частности, если $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$, т.е. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то получаем условие $m \geq 3$, т.е. V задается уравнением $p_{3,m}(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v) = 0$ бистепени $(3, m)$, $m \geq 3$, см. [1] и [4], где нерациональность общего (в комплексно-аналитическом смысле) многообразия $V \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ доказана методом вырождения Клеменса.

(ii) Условие общности положения (*) является излишним. Теорема справедлива и без него. Однако количество частных случаев, требующих отдельного рассмотрения, в общем случае существенно больше, и соответствующие выкладки не доведены автором до конца.

(iii) Группа бирациональных автоморфизмов общего слоя описана в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00820).

3. Схема доказательства теоремы. Пусть $|\chi|$ – собственный прообраз пучка слоев морфизма π' относительно χ . Существуют однозначно определенные числа $n = n(\chi) \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \mathbb{Z}$ такие, что $|\chi| \subset |-n(\chi)K_V + lF|$. Если $n(\chi) = 0$, то $l = 1$ и утверждение теоремы выполнено. В противном случае ситуация оказывается противоречивой. Если $n(\chi) \geq 1$, то $l \geq 0$. В самом деле, пучок $|\chi|$ не имеет неподвижных компонент. Пусть $D_1, D_2 \in |\chi|$ – общие дивизоры, тогда $Z = (D_1 \cdot D_2)$ есть эффективный 1-цикл, класс которого есть $n^2 K_V^2 + 2nl(-K_V \cdot F) = n^2 K_V^2 + 2nldf$. В силу сделанного предположения l не может быть отрицательным. Далее, пучок $|\chi|$ обладает максимальной особенностью [1]–[3] – нормированием $\nu \in \mathcal{N}(V)$ таким, что $e(\nu) = \nu(|\chi|) - n\delta(\nu) > 0$, где $\delta(\nu) = K(V, \nu)$ – каноническая кратность (дискрепантность). Более того, можно показать, что либо существует максимальная особенность ν такая, что ее центр – прямая на V , либо существует конечное множество максимальных особенностей $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}(V)$, центры которых $Z(V, \nu) = x(\nu)$ – точки на V , причем выполнено неравенство

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \left(\max_{\{\nu \in \mathcal{M} \mid x(\nu) \in F_t = F_t\}} \frac{e(\nu)}{\nu(F_t)} \right) > l.$$

Максимальные кривые исключаются либо откручиваются по обычной схеме [1], [5], поэтому можно считать, что реализуется второй случай. Назовем неприводимую кривую $C \subset V$ *горизонтальной*, если $\pi(C) = \mathbb{P}^1$, и *вертикальной*, если $\pi(C)$ – точка. Эффективный 1-цикл $Z = (D_1 \cdot D_2)$, $D_1, D_2 \in |\chi|$, запишем в виде

$$Z = Z^v + Z^h = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v + Z^h,$$

где Z^h – горизонтальная, Z^v – вертикальная части Z , а Z_t^v – та часть Z^v , которая содержится в слое F_t . Из выписанного выше неравенства можно вывести, что найдется максимальная особенность ν , центр которой – точка $x \in F_t$ такая, что $\nu e(\nu) > \nu(F_t) \deg Z_t^v$, где степень понимается в смысле антиканонической линейной системы этого слоя. Дальнейшая работа строится по следующему плану. Если через точку x не проходит ни одна прямая, лежащая на F_t , то нетрудно показать, что для любой кривой $C \subset F_t$ выполнено неравенство $\text{mult}_x C \leq \frac{2}{3} \deg C$. Теперь, оценивая кратность $\text{mult}_x Z$ в одну сторону с помощью техники Исковских–Манина [2], и в обратную сторону через степень накрытия $\pi: Z^h \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\deg Z_t^v$, так, как это сделано в [3] (с учетом выписанного выше неравенства), получаем противоречие, доказывающее нашу теорему. Однако самым трудным является случай, когда через неособую точку $x \in F_t$ проходит одна или несколько прямых (если точка x – особая на слое F_t , то ситуация упрощается). Здесь метод, развитый в [3], не работает. Однако учет вклада, который дает прямая $L \ni x$ в 1-цикл Z_t^v , позволяет получить противоречие и в этом случае. Соответствующий анализ является весьма тонким и требует рассмотрения всех бесконечно близких базисных кривых линейной системы $|\chi|$, накрывающих прямую L . Подробности будут опубликованы в другом месте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Исковских В. А. // Труды МИАН. 1995. Т. 208. С. 128–138. [2] Исковских В. А., Манин Ю. И. // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166. [3] Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Del Pezzo fibrations // Warwick Preprint, 1996. [4] Bardelli F. // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1984. V. 137. P. 287–369. [5] Манин Ю. И. Кубические формы. М.: Наука, 1972.