Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бассалыго, В. А. Зиновьев, Многочлены специального вида над конечным полем с максимальным модулем тригонометрической суммы, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 31–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm816>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 07:26:06

УДК 519.2

МНОГОЧЛЕНЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА НАД
КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ С МАКСИМАЛЬНЫМ
МОДУЛЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

Л. А. Бассалыго, В. А. Зиновьев

СОДЕРЖАНИЕ

I. Случай нечетной характеристики ($p \geq 3$)	33
II. Случай четной характеристики ($p = 2$)	38
Список литературы	44

Пусть $q = p^l$, $Q = q^m = p^{lm}$, где p – простое число, l, m – целые положительные числа, $m > 1$, $F_p \subseteq F_q \subset F_Q$ – соответствующие конечные поля. Пусть, далее,

$$(1) \quad \begin{aligned} f(x) &= a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in F_Q, \\ S(f) &= \sum_{x \in F_Q} \exp \left\{ \frac{2\pi i \operatorname{Tr}_Q(f(x))}{p} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{Tr}_Q(x) = x + x^p + x^{p^2} + \dots + x^{p^{l-1}}, \quad x \in F_Q.$$

Нам понадобится также представление $\operatorname{Tr}_Q(x)$ в виде

$$(2) \quad \operatorname{Tr}_Q(x) = \operatorname{Tr}_q(\operatorname{Tr}_{Q \rightarrow q}(x)),$$

где

$$\operatorname{Tr}_{Q \rightarrow q}(x) = x + x^q + \dots + x^{q^{m-1}}, \quad x \in F_Q.$$

В настоящей работе мы изучаем значение модулей тригонометрических сумм для многочленов специального вида:

$$(3) \quad f(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_s x^{1+q^s}, \quad a_s \in F_Q, \quad \operatorname{Tr}_Q(f(x)) \neq \text{const}$$

(т.е. мы исключаем тривиальный случай, когда $|S(f)| = Q$). Исследование многочленов несколько более общего вида

$$f'(x) = \sum_{i,j=0}^{m-1} a_{ij} x^{q^i + q^j}$$

не добавляет новых значений тригонометрических сумм, ибо из соотношения $\text{Tr}_{Q \rightarrow q}(y) = \text{Tr}_{Q \rightarrow q}(y^q)$, $y \in F_Q$, вытекает, что для любого многочлена $f'(x)$ найдется многочлен $f(x)$ вида (3) такой, что

$$\text{Tr}_{Q \rightarrow q} f'(x) = \text{Tr}_{Q \rightarrow q} f(x)$$

и, следовательно, $S(f') = S(f)$.

Вообще исследование тригонометрических сумм многочлена от одной переменной над полем F_{q^m} сводится к исследованию кратных тригонометрических сумм многочлена от m переменных над полем F_q . Действительно, пусть $\Phi(x)$ – произвольный многочлен над полем F_Q , $Q = q^m$. Зафиксируем базис $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ поля F_Q над полем F_q : любой элемент $x \in F_Q$ представим в виде

$$x = \sum_{s=0}^{m-1} x_s \gamma_s, \quad x_s \in F_q.$$

Положим

$$(4) \quad G(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \text{Tr}_{Q \rightarrow q} \Phi \left(\sum_{s=0}^{m-1} x_s \gamma_s \right).$$

Ясно, что $G(x_0, \dots, x_{m-1})$ – многочлен от m переменных над полем F_q . По определению кратной тригонометрической суммы

$$S_m(G(x_0, \dots, x_{m-1})) = \sum_{x_0, \dots, x_{m-1} \in F_q} \exp \left\{ \frac{2\pi i \text{Tr}_q(G(x_0, \dots, x_{m-1}))}{p} \right\}$$

и в силу (1), (2), (4) имеем, что

$$S(\Phi(x)) = S_m(G(x_0, \dots, x_{m-1})).$$

Нахождение по многочлену $G(x_0, \dots, x_{m-1})$ такого многочлена $\Phi(x)$, что выполнение равенства (4), также возможно (этому была посвящена работа [1]). Конечно, такое сведение помогает лишь в том случае, когда мы можем вычислить кратную тригонометрическую сумму. Один такой случай – это квадратичные формы [2], [3]. В работе [1] мы показали, что для любой квадратичной формы $g(x_0, \dots, x_{m-1})$ соответствующий многочлен $\Phi(x)$ (см. (4)) может быть выбран в виде (3). С другой стороны, нетрудно видеть, что для любого многочлена $f(x)$ вида (3) соответствующий многочлен $G(x_0, \dots, x_{m-1})$ (см. (4)) является квадратичной формой $g(x_0, \dots, x_{m-1})$. Известно [2], [3], что модуль тригонометрической суммы квадратичных форм от m переменных над полем F_q может принимать любое значение:

$$\begin{aligned} & q^{r/2}, \text{ где } r = 2m-1, 2m-2, \dots, m, \quad q - \text{нечетное,} \\ & q^r, \text{ где } r = m-1, m-2, \dots, \lceil m/2 \rceil, \quad q - \text{четное,} \end{aligned}$$

и никаких других ненулевых нетривиальных ($\neq q^m$) значений принимать не может. Следовательно, то же самое относится и к модулю тригонометрической суммы многочленов вида (3). В данной работе описаны многочлены вида (3) с максимальным значением модуля тригонометрической суммы и приведено много примеров многочленов, для которых достигается граница Вейля: $|S(f)| \leq (n-1)\sqrt{Q}$.

1. Случай нечетной характеристики ($p \geq 3$)

В этом случае максимальное значение модуля тригонометрической суммы многочленов вида (3) равно $q^{m-\frac{1}{2}}$ [1] (для нечетных m это значение совпадает с границей Вейля). С. А. Степанов [4] дал примеры таких многочленов в явном виде. Здесь мы описываем все такие многочлены.

Для нечетного q любой многочлен вида (3) может быть представлен в следующем виде:

$$(5) \quad \varphi(x) = a_0 x^2 + 2 \sum_{s=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_s x^{1+q^s}.$$

Для нахождения коэффициентов соответствующей (см. (4)) квадратичной формы

$$g(x_0, \dots, x_{m-1}) = \text{Tr}_{Q \rightarrow q} \left(\varphi \left(\sum_{s=0}^{m-1} x_s \gamma_s \right) \right) = \sum_{u,v=0}^{m-1} c_{uv} x_u x_v, \quad c_{uv} = c_{vu},$$

выпишем вначале $\text{Tr}_{Q \rightarrow q}(\varphi(x))$:

$$\text{Tr}_{Q \rightarrow q}(\varphi(x)) = \sum_{i,j=0}^{m-1} b_{ij} x^{q^i + q^j},$$

где

$$(6) \quad \begin{aligned} b_{ii} &= a_0^{q^i}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \\ b_{ij} &= b_{ji} = a_{j-i}^{q^i} + a_{i-j}^{q^j}, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

и индексы у коэффициентов a_s рассматриваются по модулю m ($a_s = 0$, если $s > \lfloor m/2 \rfloor$). Обозначим через $B = [b_{ij}]$ симметричную матрицу коэффициентов b_{ij} . Тогда симметричная матрица коэффициентов $C = [c_{uv}]$ определяется следующим образом:

$$C = DBD^T,$$

где

$$D = [\gamma_i^{q^j}].$$

В силу невырожденности матрицы D (см., например, [2]) ранги матриц C и B равны: $\text{rank}(C) = \text{rank}(B)$.

Так как $S(\varphi(x)) = S_m(g(x_0, \dots, x_{m-1}))$ и

$$|S_m(g)| = q^{m-\frac{1}{2} \text{rank}(C)},$$

то имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\varphi(x)$ – произвольный многочлен вида (5) и матрица B определяется соотношениями (6). Тогда

$$|S(\varphi)| = q^{m-\frac{1}{2} \text{rank}(B)}.$$

Поскольку мы рассматриваем только нетривиальный случай $\text{rank}(B) \neq 0$, то максимальное значение модуля суммы $S(\varphi)$ получается, когда $\text{rank}(B) = 1$, и, следовательно, наша задача сводится к описанию всех многочленов $\varphi(x)$ вида (5) таких, что ранг соответствующей матрицы B равен 1. Случаи четного и нечетного m рассматриваются отдельно.

I.a. $m = 2k + 1, k \geq 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\varphi(x) = a_0 x^2 + 2 \sum_{s=1}^k a_s x^{1+q^s}.$$

Тогда $|S(\varphi)| = q^{m-\frac{1}{2}}$ (т.е. достигается оценка Вейля), если и только если

$$(7) \quad a_s = a_0^{\frac{q^s+1}{2}}, \quad s = 1, \dots, k,$$

где a_0 — произвольный ненулевой элемент поля F_{q^m} . Число различных таких многочленов $\varphi(x)$ равно $q^m - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при нечетном m матрица B имеет вид (см. (6))

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k & a_k^{q^{k+1}} & \dots & a_2^{q^{2k-1}} & a_1^{q^{2k}} \\ a_1 & a_0^q & a_1^q & \dots & a_{k-1}^q & a_k^q & \dots & a_3^{q^{2k-1}} & a_2^{q^{2k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

то ее ранг равен 1 тогда и только тогда, когда вторая строка пропорциональна первой (любая строка матрицы B является циклическим сдвигом предыдущей строки, каждый элемент которой возведен в степень q). Поэтому если вторая строка пропорциональна первой, то третья строка пропорциональна второй и т. д. Достаточно проверить, что при заданном a_0 все остальные коэффициенты a_s ($s = 1, \dots, k$) определяются однозначно в соответствии с (7). Действительно, соотношения (7) следуют непосредственно из пропорциональности подстрок:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & a_0^q & a_1^q & \dots & a_{k-2}^q & a_{k-1}^q \end{bmatrix}$$

(сначала находится a_1 , затем a_2 и т. д.). При этом коэффициент a_1 может принимать два значения:

$$a_1 = \pm a_0^{\frac{q+1}{2}},$$

а все следующие коэффициенты $a_2, a_3, \dots, a_k$ при заданных a_0 и a_1 определяются однозначно. Таким образом, при заданном a_0 из пропорциональности подстрок следуют два ответа:

$$a_s = a_0^{\frac{q^s+1}{2}}, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

и

$$a_s = (-1)^s a_0^{\frac{q^s+1}{2}}, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Однако в силу нечетности m все остальные пропорции выполнены лишь при первом ответе. Так как a_0 может принимать любое ненулевое значение из поля F_Q , а остальные $a_s, s = 1, \dots, k$, определяются однозначно при заданном a_0 , то число различных многочленов вида (5) с максимальным модулем тригонометрической суммы равно $q^m - 1$.

Теорема 1 наводит на мысль, что существуют многочлены вида (5) меньшей степени, для которых достигается оценка Вейля. Действительно, рассмотрим такие многочлены, у которых все коэффициенты, начиная с $(r+1)$ -го, равны нулю ($a_{r+1} = \dots = a_{\lfloor m/2 \rfloor} = 0$). Оценка Вейля для таких многочленов равна $q^{r+k+\frac{1}{2}}$ и она достигается тогда и только тогда, когда ранг соответствующей матрицы B (см. утверждение 1) равен $2(k-r)+1$. В теореме 1 мы изучили случай, когда $r=k$ и даже описали все такие матрицы. Общий случай довольно труден для решения, но другой крайний случай, когда $r=1$ (случай $r=0$ хорошо известен как суммы Гаусса), мы сейчас опишем, но при условии, что коэффициенты a_0, a_1 выбираются из поля F_q . В этом случае матрица B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Вычисления показывают, что ранг этой матрицы равен $2k-1$ тогда и только тогда, когда равен нулю определитель $\Delta_k = \Delta_k(a_0, a_1)$ следующей матрицы размера $k \times k$:

$$(8) \quad \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 - a_1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\Delta_k = a_0 \Delta_{k-1} - a_1^2 \Delta_{k-2}, \quad k \geq 2, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = a_0 - a_1,$$

то

$$\Delta_k(a_0, a_1) = \sum_{j=0}^k (-1)^{\lceil j/2 \rceil} \binom{k - \lceil j/2 \rceil}{\lfloor j/2 \rfloor} a_0^{k-j} a_1^j.$$

Поэтому имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(x) = a_0 x^2 + 2a_1 x^{1+q}$, где $a_0, a_1 \in F_q$ и $a_1 \neq 0$. Тогда

$$|S(\varphi)| = q^{k+\frac{3}{2}}$$

(т.е. достигается оценка Вейля) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_k(a_0, a_1) = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнение $\Delta_k(a_0, a_1) = 0$ не всегда имеет решение $a_0, a_1 \in F_q^*$. Например, уравнение

$$\Delta_2(a_0, a_1) = a_0^2 - a_0 a_1 - a_1^2 = 0$$

не имеет ненулевых решений в поле F_3 . Однако это уравнение всегда имеет решение, например, в любом четном расширении поля F_3 или в любом поле характеристики 5.

Но при $k = 1$ уравнение $\Delta_1(a_0, a_1) = a_0 - a_1 = 0$ всегда имеет ненулевое решение $a_0 = a_1$ в F_q . Этот пример был приведен Степановым [4] (впрочем, он следует и из теоремы 1). Отсюда и из замечания Родье [5] о том, что многочлен над конечным полем, достигающий границы Вейля, остается таковым и над любым расширением этого поля, вытекает, что пара $a_0 = a_1$ является решением уравнения $\Delta_k(a_0, a_1) = 0$ при любом k таком, что 3 делит $2k + 1$ (возможны также и другие решения).

I.b. $m = 2k, k \geq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\varphi(x) = a_0 x^2 + 2 \sum_{s=1}^k a_s x^{1+q^s}.$$

Тогда

$$|S(\varphi)| = q^{m-\frac{1}{2}},$$

если и только если либо

$$a_s = a_0^{\frac{q^s+1}{2}}, \quad s = 1, \dots, k-1,$$

где a_0 — произвольный квадратичный вычет поля $F_{q^{2k}}$, а a_k — произвольный корень уравнения

$$a_k + a_k^{q^k} = a_0^{\frac{q^k+1}{2}},$$

либо

$$a_s = (-1)^s a_0^{\frac{q^s+1}{2}}, \quad s = 1, \dots, k-1,$$

где a_0 — произвольный квадратичный вычет поля $F_{q^{2k}}$, а a_k — произвольный корень уравнения

$$a_k + a_k^{q^k} = (-1)^k a_0^{\frac{q^k+1}{2}}.$$

Число таких различных многочленов равно $(q^m - 1)q^{m/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При четном m матрица B имеет вид (см. (6)):

$$D = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k + a_k^{q^k} & a_{k-1}^{q^{k+1}} & \dots & a_1^{q^{2k-1}} \\ a_1 & a_0^q & a_1^q & \dots & a_{k-2}^q & a_{k-1}^q & a_k^q + a_k^{q^{k+1}} & \dots & a_2^{q^{2k-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае, ее ранг равен 1 тогда и только тогда, когда вторая строка пропорциональна первой. Вновь, как и в теореме 1, задав произвольно коэффициент a_0 , остальные коэффициенты найдем из условия пропорциональности подстроки

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k + a_k^{q^k} \\ a_1 & a_0^q & a_1^q & \dots & a_{k-2}^q & a_{k-1}^q \end{bmatrix}.$$

Ситуация, как мы видим, совпадает с ситуацией теоремы 1, за исключением последнего коэффициента a_k , для которого мы имеем следующее уравнение:

$$a_k + a_k^{q^k} = a_0^{\frac{q^k+1}{2}}, \quad \text{когда} \quad a_1 = a_0^{\frac{q+1}{2}},$$

и

$$a_k + a_k^{q^k} = (-1)^k a_0^{\frac{q^k+1}{2}}, \quad \text{когда} \quad a_1 = -a_0^{\frac{q+1}{2}}.$$

Нетрудно видеть, что любое из этих уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда a_0 является квадратичным вычетом в поле $F_{q^{2k}}$, и что число решений равно q^k . Несложно проверить, что при таком задании коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ остальные пропорции также выполнены. Общее число различных решений $a_0, a_1, \dots, a_k$ равно

$$\frac{q^{2k} - 1}{2} \cdot 2 \cdot q^k$$

(так как a_0 – произвольный квадратичный вычет; a_1 принимает точно два значения при заданном a_0 ; каждое a_i , $1 < i < k$, находится однозначно при заданных a_0 и a_1 ; а a_k принимает точно q^k значений при заданных a_0 и a_1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Частным случаем теорем 1 и 3 является теорема 1 работы [4].

Как мы видим, в теореме 3 не достигается оценка Вейля. Однако вновь, как и в предыдущем случае, мы можем рассмотреть многочлены вида (5) меньшей степени и показать, что по крайней мере для некоторых из них граница Вейля достигается. Рассмотрим сначала многочлены, у которых $a_k = 0$. Оценка Вейля для таких многочленов равна q^{2k-1} . Согласно утверждению 1 она достигается на многочленах, для которых соответствующая матрица B имеет ранг 2. Вновь рассматривая многочлены с коэффициентами только из маленького поля F_q , несложно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\varphi(x) = a_0 x^2 + 2 \sum_{s=1}^{k-1} a_s x^{1+q^s},$$

где $a_s \in F_q$, $s = 0, 1, \dots, k-1$. Тогда

$$|S(\varphi)| = q^{2k-1}$$

(т.е. достигается оценка Вейля) тогда и только тогда, когда

$$a_s = 0 \quad \text{для} \quad s \equiv k \pmod{2} \quad \text{и} \quad a_s = a \quad \text{для} \quad s \equiv k-1 \pmod{2},$$

где a – произвольный ненулевой элемент F_q .

Другой крайний случай – когда все коэффициенты, начиная с a_2 , равны нулю. Здесь мы имеем теорему, аналогичную теореме 2. Обозначим через $\Omega_k(a_0, a_1)$ определитель матрицы размера $k \times k$, отличающейся от матрицы (8) лишь элементом в нижнем правом углу, где вместо элемента $a_0 - a_1$ стоит элемент a_0 . Нетрудно вычислить, что

$$\Omega_k(a_0, a_1) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k-j}{j} a_0^{k-2j} a_1^{2j}.$$

Поэтому имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\varphi(x) = a_0x^2 + 2a_1x^{1+q}$, где $a_0, a_1 \in F_q$ и $a_1 \neq 0$. Тогда

$$|S(\varphi)| = q^{k+1}$$

(т.е. достигается оценка Вейля) тогда и только тогда, когда

$$\Omega_k(a_0, a_1) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что при нечетных k любая пара $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ является решением уравнения $\Omega_k(a_0, a_1) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [6] Вольфманн, в частности, вычислил точное значение тригонометрической суммы одночлена $a_r x^{1+q^r}$, где r делит k , $a_r \in F_q^*$, и дал необходимое и достаточное условие, чтобы эта сумма достигала оценки Вейля. Это условие можно вывести и из рассмотрения матрицы B , имеющей достаточно простой вид в случае одночленов.

Заключительное замечание относится к произвольному m — как четному, так и нечетному, и дает еще один пример многочленов, для которых достигается граница Вейля. Рассмотрим многочлен

$$f_a(x) = a \sum_{s \leq r: s \equiv r \pmod{m-2r}} x^{1+q^s}, \quad a \in F_{q^{m-2r}}^*.$$

Нетрудно проверить, что ранг матрицы B , соответствующей этому многочлену, равен $m - 2r$, если $m - 2r$ делит m (в этом случае матрица B содержит ровно $m - 2r$ различных строк). Поэтому имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $m - 2r$ делит m . Тогда для многочлена $f_a(x)$ достигается граница Вейля:

$$|S(f_a)| = q^{r + \frac{m}{2}}.$$

II. Случай четной характеристики ($p = 2$)

В этом случае максимальное значение модуля тригонометрической суммы для многочленов вида (3) равно q^{m-1} (см. [1]). С. А. Степанов [4] дал примеры таких многочленов в явном виде при нечетных m . Мы приводим здесь широкий класс таких многочленов как для нечетного, так и для четного m , но не утверждаем, что описываем все такие многочлены (как в случае нечетного q), хотя и полагаем, что это так.

В случае четной характеристики нет аналога утверждения 1, что вынуждает нас идти другим путем. Известно [2], [3], что только две квадратичные формы от m переменных в приведенном виде над полем F_q имеют модуль тригонометрической суммы, равный q^{m-1} :

$$(9) \quad z_1 z_2$$

и

$$(10) \quad z_1^2 + z_1 z_2 + a z_2^2, \quad \text{Tr}_q(a) = 1.$$

Поэтому наша задача заключается в нахождении таких многочленов вида (3), что соответствующие им квадратичные формы (см. (4))

$$(11) \quad g(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \text{Tr}_{Q \rightarrow q} \left(f \left(\sum_{s=0}^{m-1} x_s \gamma_s \right) \right) = \sum_{0 \leq u \leq v \leq m-1} c_{uv} x_u x_v$$

приводятся к одному из указанных видов. По аналогии с п. I выпишем вначале

$$(12) \quad h(x) = \text{Tr}_{Q \rightarrow q} \left(\sum_{s=0}^k a_s x^{1+q^s} \right) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq m-1} b_{ij} x^{q^i + q^j}.$$

Однако уже для вычисления коэффициентов b_{ij} через a_s удобнее случаи нечетного и четного m рассматривать отдельно.

II.a. $m = 2k + 1, k \geq 1$. В этом случае коэффициенты b_{ij} вычисляются следующим образом:

$$(13) \quad b_{ij} = \begin{cases} a_0^{q^i}, & \text{когда } i = j, \\ a_{j-i}^{q^i}, & \text{когда } 0 \leq i < j \leq k + i, \\ a_{m+i-j}^{q^j}, & \text{когда } k + i < j \leq m - 1. \end{cases}$$

Сначала рассмотрим ситуацию, когда квадратичная форма (11) может быть приведена к виду (9). Положим

$$(14) \quad z_1(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i x^{q^i}, \quad z_2(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j x^{q^j}$$

и потребуем выполнения следующего равенства:

$$(15) \quad h(x) = z_1(x) z_2(x).$$

Из (12)–(15) получаем следующую систему соотношений:

$$(16) \quad \begin{cases} a_0^{q^i} = \alpha_i \beta_i, & \text{когда } i = 0, 1, \dots, m-1, \\ a_{j-i}^{q^i} = \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i, & \text{когда } 0 \leq i < j \leq k + i, \\ a_{m+i-j}^{q^j} = \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i, & \text{когда } k + i < j \leq m-1. \end{cases}$$

Пусть α_i и β_j удовлетворяют следующему дополнительному ограничению:

$$(17) \quad \alpha_i = \alpha_0^{q^i}, \quad \beta_j = \beta_0^{q^j}, \quad \text{когда } i, j = 1, \dots, m-1.$$

При этом система соотношений (16) переходит в систему:

$$(18) \quad \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 \beta_0, \\ a_s &= \alpha_0 \beta_0^{q^s} + \alpha_0^{q^s} \beta_0, \quad s = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

При условии (17) $z_1(x)$ и $z_2(x)$ из (14) могут рассматриваться как линейные формы над полем F_q от m переменных $x_0, \dots, x_{m-1}$. Действительно, подставляя выражение x через базис $\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}$, получаем

$$z_1(x_0, \dots, x_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_0^{q^i} \left(\sum_{s=0}^{m-1} \gamma_s x_s \right)^{q^i} = \sum_{s=0}^{m-1} \text{Tr}_{Q \rightarrow q}(\alpha_0 \gamma_s) x_s$$

и

$$z_2(x_0, \dots, x_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_0^{q^i} \left(\sum_{s=0}^{m-1} \gamma_s x_s \right)^{q^i} = \sum_{s=0}^{m-1} \text{Tr}_{Q \rightarrow q}(\beta_0 \gamma_s) x_s.$$

Линейные формы $z_1(x_0, \dots, x_{m-1})$ и $z_2(x_0, \dots, x_{m-1})$ независимы над F_q тогда и только тогда, когда элементы α_0 и β_0 поля F_Q линейно независимы над полем F_q . Следовательно, при любом таком выборе α_0 и β_0

$$(19) \quad \alpha_0, \beta_0 \in F_Q^*, \quad \alpha_0 \neq c\beta_0, \quad c \in F_q^*,$$

и выборе коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ многочлена $f(x)$ вида (3), удовлетворяющем условию (18), соответствующая квадратичная форма (см. (11)), приводится к виду (9):

$$g(x_0, \dots, x_{m-1}) = z_1(x_0, \dots, x_{m-1}) z_2(x_0, \dots, x_{m-1}).$$

Оценим снизу число таких различных многочленов $f(x)$ вида (3). Ясно, что число различных упорядоченных пар (α_0, β_0) , удовлетворяющих условию (19), равно $(q^m - 1)(q^m - q)$. С другой стороны, число различных пар (α_0, β_0) , задающих один и тот же набор двух первых коэффициентов a_0 и a_1 (см. (18)):

$$\begin{aligned} \alpha_0 \beta_0 &= a_0, \\ \alpha_0 \beta_0^q + \alpha_0^q \beta_0 &= a_1, \end{aligned}$$

не превосходит $2(q - 1)$. Поэтому число таких различных многочленов вида (3) с максимальным модулем тригонометрической суммы q^{m-1} не меньше, чем $(q^m - 1)(q^m - q)/2(q - 1)$ (на самом деле, равно, так как наряду с парой (α_0, β_0) тот же самый набор коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ дают пары (β_0, α_0) и $(c\alpha_0, c^{-1}\beta_0)$, где c — произвольный ненулевой элемент поля F_q).

Перейдем теперь к ситуации, когда квадратичная форма (11) может быть приведена к виду (10). Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получим, что единственным отличием является замена системы соотношений (18) на другую:

$$(20) \quad \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0^2 + \alpha_0 \beta_0 + a \beta_0^2, \\ a_s &= \alpha_0 \beta_0^{q^s} + \alpha_0^{q^s} \beta_0, \quad s = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

где, конечно, α_0 и β_0 удовлетворяют условию (19). Оценим снизу число различных наборов коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$, задаваемых условием (20). Так как число различных пар (α_0, β_0) , задающих один и тот же набор двух первых коэффициентов a_0 и a_1 (см. (20)):

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0^2 + \alpha_0 \beta_0 + a \beta_0^2, \\ a_1 &= \alpha_0 \beta_0^q + \alpha_0^q \beta_0, \end{aligned}$$

не превосходит $2(q+1)$ (по теореме Безу), то число таких различных наборов не меньше, чем $(q^m - 1)(q^m - q)/2(q+1)$ – на самом деле, равно, так как наряду с парой (α_0, β_0) тот же самый набор коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ дают пары $(c_{11}\alpha_0 + c_{12}\beta_0, c_{21}\alpha_0 + c_{22}\beta_0)$, где $c_{ij} \in F_q$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{11}c_{21} + ac_{21}^2 &= 1, \\ c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21} &= 1, \\ c_{12}^2 + c_{12}c_{22} + ac_{22}^2 &= a, \end{aligned}$$

число решений которой равно $2(q+1)$.

Нетрудно показать, что, выбирая другой элемент $a' \neq a$, $a' \in F_q$, $\text{Tr}_q(a') = 1$, в квадратичной форме вида (10), мы получим тот же самый набор коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_k)$, что и при элементе a . Действительно, рассмотрим две системы уравнений с двумя неизвестными

$$(21) \quad \begin{aligned} x^2 + xy + ay^2 &= a_0, \\ xy^{q^s} + x^{q^s}y &= a_s, \quad s = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

и

$$(22) \quad \begin{aligned} u^2 + uv + a'v^2 &= a_0, \\ uv^{q^s} + u^{q^s}v &= a_s, \quad s = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Пусть (x, y) – решение системы (21). Тогда $u = b_1x + a^{1/2}y$, $v = a^{-1/2}x$ является решением системы (22), где элемент $b_1 \in F_q$ удовлетворяет уравнению

$$b_1^2 + b_1a^{-1/2} + a'a^{-1} = 1$$

(это уравнение всегда имеет решение, так как $\text{Tr}_q(a + a') = 0$).

С другой стороны, даже множества пар (a_0, a_1) первых коэффициентов, задаваемых квадратичной формой (9) и квадратичной формой (10) с фиксированным a , не пересекаются. Для доказательства этого достаточно показать, что две системы уравнений

$$(23) \quad \begin{aligned} uv &= a_0, \\ uv^q + u^qv &= a_1 \end{aligned}$$

и

$$(24) \quad \begin{aligned} x^2 + xy + ay^2 &= a_0, \\ xy^q + x^qy &= a_1 \end{aligned}$$

не имеют одновременно решений в поле F_Q при фиксированных $a_0, a_1 \in F_Q^*$. Действительно, если (x, y) – решение системы (24), то система (23) не имеет решений. Предположим противное. Рассмотрим эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} uv &= a_0, \\ v^{q-1} + u^{q-1} &= a_1/a_0. \end{aligned}$$

Если эта система разрешима, то в поле F_Q разрешимо квадратное уравнение ($z = v^{q-1}$):

$$z^2 + \frac{a_1}{a_0}z + a_0^{q-1} = 0.$$

Но это квадратное уравнение имеет решение в поле F_Q тогда и только тогда, когда

$$(25) \quad \text{Tr}_Q \left(\frac{a_0^{q-1}}{(a_1/a_0)^2} \right) = 0.$$

В силу (24) условие (25) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_Q \left(\frac{(x^{2q} + x^q y^q + a y^{2q})(x^2 + xy + ay^2)}{x^2 y^{2q} + x^{2q} y^2} \right) \\ &= \text{Tr}_Q(a) + \text{Tr}_Q \left(\frac{x^{2q+2} + x^{2q+1}y + x^{q+2}y^q + x^{q+1}y^{q+1}}{x^2 y^{2q} + x^{2q} y^2} \right) \\ &= \text{Tr}_Q(a) = \text{Tr}_q(a) = 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию (10).

Поэтому общее число построенных нами различных многочленов вида (3) с максимальным модулем тригонометрической суммы q^{m-1} равно

$$(q^m - 1)(q^m - q) \left(\frac{1}{2(q-1)} + \frac{1}{2(q+1)} \right) = \frac{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)q^2}{q^2 - 1}.$$

Тем самым мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(x) = \sum_{s=0}^k a_s x^{1+q^s}$. Если коэффициенты a_s удовлетворяют условиям (18) или (20), где $\text{Tr}_q(a) = 1, a \in F_q$, а элементы α_0, β_0 удовлетворяют условию (19), то

$$|S(f)| = q^{m-1}.$$

Число таких различных многочленов равно

$$\frac{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)q^2}{q^2 - 1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Частным случаем теоремы 6 является теорема 4 работы [4].

II.б. $m = 2k, k \geq 1$. В этом случае коэффициенты b_{ij} в (12) вычисляются следующим образом:

$$(26) \quad b_{ij} = \begin{cases} a_0^{q^i}, & \text{когда } i = j, \\ a_{j-i}^{q^i}, & \text{когда } 0 \leq i < j < k + i, \\ a_k^{q^i} + a_k^{q^j}, & \text{когда } j = k + i, \\ a_{m+i-j}^{q^j}, & \text{когда } k + i < j \leq m - 1. \end{cases}$$

Те же рассуждения, что и в п. II.а, с учетом (26) вместо (13), приводят к следующим двум системам соотношений между коэффициентами $a_0, \dots, a_k$ и параметрами α_0, β_0 , аналогичным системам (18) и (20):

$$(27) \quad \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 \beta_0, \\ a_s &= \alpha_0 \beta_0^{q^s} + \alpha_0^{q^s} \beta_0, \quad s = 1, \dots, k-1, \\ a_k + a_k^{q^k} &= \alpha_0 \beta_0^{q^k} + \alpha_0^{q^k} \beta_0 \end{aligned}$$

и

$$(28) \quad \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0^2 + \alpha_0 \beta_0 + a \beta_0^2, \\ a_s &= \alpha_0 \beta_0^{q^s} + \alpha_0^{q^s} \beta_0, \quad s = 1, \dots, k-1, \\ a_k + a_k^{q^k} &= \alpha_0 \beta_0^{q^k} + \alpha_0^{q^k} \beta_0. \end{aligned}$$

Системы (27) и (28) отличаются от аналогичных систем (18) и (20) только последним соотношением, связывающим коэффициент a_k с параметрами α_0, β_0 . Поэтому каждой паре параметров (α_0, β_0) соответствует не один набор коэффициентов $a_0, \dots, a_k$, как в предыдущем случае, а q^k наборов $a_0, \dots, a_{k-1}, a_k$, отличающихся только последним коэффициентом a_k . Действительно, при фиксированных α_0, β_0 уравнение относительно a_k

$$a_k + a_k^{q^k} = \alpha_0 \beta_0^{q^k} + \alpha_0^{q^k} \beta_0$$

имеет точно q^k различных решений в поле F_Q . Следовательно, общее число различных наборов коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ при четном m в $q^{m/2}$ раз больше, чем в случае нечетного m . За исключением указанного единственного отличия, случаи четного и нечетного m полностью аналогичны. Поэтому имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f(x) = \sum_{s=0}^k a_s x^{1+q^s}$. Если все коэффициенты a_s удовлетворяют условиям (27) или (28), где $\text{Tr}_q(a) = 1, a \in F_q$, а элементы α_0, β_0 удовлетворяют условию (19), то $|S(f)| = q^{m-1}$. Число таких различных многочленов равно

$$\frac{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)q^{m/2}q^2}{q^2 - 1}.$$

При $k \geq 2$ всегда существуют элементы α_0, β_0 такие, что $a_k = 0$ ($\alpha_0/\beta_0 \in F_{q^k}$). Для таких многочленов достигается оценка Вейля. Поэтому имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Среди указанных в теореме 7 многочленов при $k \geq 2$ имеются многочлены степени $q^{k-1} + 1$ (т.е. многочлены с $a_k = 0$). На таких многочленах достигается оценка Вейля.

Из этого следствия, в частности, вытекает следующее равенство:

$$(29) \quad S(q^k + 1, q^{2k+1}) = q^{2k+\frac{1}{2}},$$

где $k \geq 1$ и q – четная степень 2, которое в [1] мы умели доказывать для нечетных q ; здесь $S(d, Q) = \max |S(f)|$, где максимум берется по всем многочленам над F_Q степени не выше d таким, что $\text{Tr}_Q(f(x)) \neq \text{const}$. В частности, при $q = 4$ и $k = 1$ это равенство имеется у В.И. Левенштейна [7]. Мы по-прежнему полагаем [1], что когда q – нечетная степень 2, то равенство (29) не имеет места.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $q = 2^l$, где l – нечетное. Тогда

$$S(q^k + 1, q^{2k+1}) = q^{2k}.$$

Толчком к написанию данной работы послужило обсуждение доклада авторов на семинаре А. А. Карацубы по теории чисел Московского государственного университета, за что авторы признательны участникам семинара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бассалыго Л. А., Зиновьев В. А., Лицын С. М. Нижняя оценка полных тригонометрических сумм в терминах кратных сумм // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С. 1033–1036.
- [2] Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988.
- [3] Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды МИАН. 1962. Т. 65.
- [4] Степанов С. А. О нижних оценках сумм характеров над конечными полями // Дискретн. матем. 1991. Т. 3. № 2. С. 77–86.
- [5] Rodier F. Estimation asymptotique de la distance minimale du dual des codes BCH et polynomes de Dickson // Discrete Math. 1996. V. 149. P. 205–221.
- [6] Wolfmann J. The number of points on certain algebraic curves over finite fields // Comm. Algebra. 1989. V. 17. № 8. P. 2055–2060.
- [7] Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 43–110.

Институт проблем передачи информации РАН

Поступила в редакцию
15.09.1996